应用数学和力学，第7卷第11期（1986年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性弹性理论的混合能量形式广义变分原理*

胡成栋

（吉林大学数学系，1983年8月9日收到）

摘　　要

本文首先对弹性材料的应变能函数$\Sigma(E_{ij})$和余应能函数$\Sigma^c(S_{ij})$的部分“对应”变量作Legendre变换，引进“对应”的混合余应变能函数$\Sigma^c{}_{kl}$和混合应变能函数Σ_{kl}．进而，给出非线性弹性理论的各种“对应”的混合能量形式广义变分原理．线性弹性理论也有相应结果[1]，它是本文结果的特殊情况．

一、前　　言

线性弹性理论和非线性弹性理论的各种广义变分原理已有很多论述和应用[1]~[6]．但是，对应力、应变作某些假设的工程理论，例如梁、板、壳的经典理论却不能由线性弹性理论的一般广义变分原理得出[1]．胡海昌先生针对板壳经典理论的直法线假设，对线性弹性材料，首先定义了一个混合应变能函数，然后引进一个线性弹性理论的特殊的三类变量广义变分原理——混合能量形式广义变分原理[1]．由这个特殊的变分原理，就能够得到梁、板、壳的经典理论．但是，在非线性弹性理论中，还未见到关于混合能量形式广义变分原理的论述和应用．

本文应用Legendre变换[7][8]，对非线性弹性材料的应变能函数$\Sigma(E_{ij})$和余应变能函数$\Sigma^c(S_{ij})$的部分“对应”变量作Legendre变换，定义“对应”的混合余应变能函数$\Sigma^c{}_{kl}$和混合应变能函数$\Sigma_{kl}(k=0,1,\cdots,6;\ k+l=6)$．进而，我们引进非线性弹性理论的各种“对应”的三类变量混合能量形式广义变分原理．线性弹性理论中也有相应结果[1]，它是非线性弹性理论中的混合能量形式广义变分原理的特殊情况．

本文采用文献[2]中张量记法和符号．x_i为直角Cartesian坐标系，而且表示物体的Lagrange变数．英文字母$i,j,\cdots$取值范围为1,2,3，希腊字母$\alpha,\beta,\cdots$取值范围为1,2．E_{ij}为Green应变张量；S_{ij}为Kirchhoff应力张量；$\Sigma(E_{ij})$、$\Sigma^c(S_{ij})$分别为初始构形上的单位体积的应变能函数和余应变能函数；f_i为初始构形上的单位体力；T_i为初始构形上单位面积力．

* 郭仲衡推荐．

二、混合余应变能函数和混合应变能函数

弹性体B的初始构形$V+A$为自然态[2]。设B存在应变能函数$\Sigma(E_{ij})$，且由本构方程

$$\frac{\partial\Sigma E(_{kl})}{\partial E_{ij}}=S_{ij} \tag{2.1}$$

确定的S_{ij}与E_{ij}一一对应。对$\Sigma(E_{ij})$的全部变量E_{ij}作Legendre变换，由Trans 定理[7]，一定存在余应变能函数$\Sigma^c(S_{ij})$，

$$\Sigma^c(S_{ij})=[E_{ij}S_{ij}-\Sigma(E_{ij})]|_{E_{ij}=E_{ij}(S_{kl})} \tag{2.2a}$$

且
$$\frac{\partial\Sigma^c(S_{kl})}{\partial S_{ij}}=E_{ij} \tag{2.2b}$$

反之，对$\Sigma^c(S_{ij})$的全部变量S_{ij}作Legendre变换，必有

$$\Sigma(E_{ij})=[E_{ij}S_{ij}-\Sigma^c(S_{ij})]|_{S_{ij}=S_{ij}(E_{kl})} \tag{2.3a}$$

且
$$\frac{\partial\Sigma(E_{kl})}{\partial\Sigma_{ij}}=S_{ij} \tag{2.3b}$$

$\Sigma(E_{ij})$亦可认为是6个独立变量E_{11}，E_{22}，E_{33}，Γ_{12}，Γ_{13}，Γ_{23}的函数，并记E_{11}，…，Γ_{23}为$E_i(i=1,2,\cdots,6)$，$\Gamma_{12}=2E_{12}=2E_{21}$，$\Gamma_{13}=2E_{13}=2E_{31}$，$\Gamma_{23}=2E_{23}=2E_{32}$。同样，$\Sigma^c(S_{ij})$可以认为是6个独立变量$S_{11}$，$S_{22}$，$S_{33}$，$S_{12}$，$S_{13}$，$S_{23}$的函数，并记$S_{11}$，…，$S_{23}$为$S_i(i=1,2,\cdots,6)$。于是(2.2b)、(2.3b)又可以表示为

$$\frac{\partial\Sigma^c(S_j)}{\partial S_i}=E_i \tag{2.2c}$$

$$\frac{\partial\Sigma(E_j)}{\partial E_i}=S_i \tag{2.3c}$$

我们称E_i和$S_i(i=1,2,\cdots,6)$为“对应”变量。

对应变能函数$\Sigma(E_i)$的部分变量E_p，…，E_q作Legendre变换，由Trans定理，必有$\Sigma^c_{kl}(S_p,\cdots,S_q;\ E_r,\cdots,E_s)$存在，

$$\Sigma^c_{kl}(S_p,\cdots,S_q;\ E_r,\cdots,E_s)=\Big[\sum_{i=p,\cdots,q}E_iS_i-\Sigma(E_j)\Big]\Big|_{\substack{E_p=E_p(S_p,\cdots,S_q;E_r,\cdots,E_s)\\ \cdots\cdots\\ E_q=E_q(S_p,\cdots,S_q;E_r,\cdots,E_s)}} \tag{2.4a}$$

且
$$\frac{\partial\Sigma^c_{kl}}{\partial S_p}=E_p,\ \cdots,\ \frac{\partial\Sigma^c_{kl}}{\partial S_q}=E_q \tag{2.4b}$$

$$\frac{\partial\Sigma^c_{kl}}{\partial E_r}=-S_r,\cdots,\ \frac{\partial\Sigma^c_{kl}}{\partial E_s}=-S_s \tag{2.4c}$$

同样，对余应变能函数$\Sigma^c(S_i)$的部分变量$S_p,\cdots,S_q$作Legendre变换，必有$\Sigma_{kl}(E_p,\cdots,E_q;\ S_r,\cdots,S_s)$存在，

$$\Sigma_{kl}(E_p,\cdots,E_q;\ S_r,\cdots,S_s)=\Big[\sum_{i=p,\cdots,q}E_iS_i-\Sigma^c(S_j)\Big]\Big|_{\substack{S_p=S_p(E_p,\cdots,E_q;S_r,\cdots,S_s)\\ \cdots\cdots\\ S_q=S_q(E_p,\cdots,E_q;S_r,\cdots,S_s)}} \tag{2.5a}$$

且 $$\frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial E_p}=S_p,\ \cdots,\ \frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial E_q}=S_q \tag{2.5b}$$

$$\frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial S_r}=-E_r,\ \cdots,\ \frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial S_s}=-E_s \tag{2.5c}$$

$E_r,\cdots,E_s(S_r,\cdots,S_s)$是$E_i(S_i)(i=1,\cdots,6)$去掉$E_p,\cdots,E_q(S_p,\cdots,S_q)$所余下的应变（应力）分量，$k$是参加 Legendre 变换的应变（应力）分量个数，l是未进行 Legendre 变换的应变（应力）分量个数，$k+l=6$。

我们称$\Sigma^c{}_{kl}$和Σ_{kl}为“对应”的混合余应变能函数和混合应变能函数。

例如，我们对各向同性线性弹性材料的$\Sigma(E_i)$和$\Sigma^c(S_i)$的“对应”变量$\Gamma_{\alpha3}$、$S_{\alpha3}$ $(\alpha=1,2)$分别作 Legendre 变换，则有

$$\Sigma^c_{24}=\frac{1}{2G}(S^2_{13}+S^2_{23})-\frac{1}{2}[\lambda(E_{11}+E_{22}+E_{33})^2+2G(E^2_{11}+E^2_{22}+E^2_{33})+G\Gamma^2_{12}] \tag{2.6}$$

$$\Sigma_{24}=\frac{1}{2}G(\Gamma^2_{13}+\Gamma^2_{23})-\frac{1}{2E}[(S^2_{11}+S^2_{22}+S^2_{33})-2\nu(S_{11}S_{22}+S_{22}S_{33}+S_{33}S_{11})+2(1+\nu)S^2_{12}] \tag{2.7}$$

与文献[1]的混合能量函数w相比，$\Sigma_{24}=-w$.

显然，我们能够得到很多“对应”的混合能量函数。对$\Sigma(E_i)$和$\Sigma^c(S_i)$的全部变量作 Legendre 变换，有

$$\Sigma^c_{60}(S_i)=\Sigma^c(S_i),\quad \Sigma_{60}(E_i)=\Sigma(E_i) \tag{2.8}$$

因此，余应变能函数和应变能函数是“对应”的混合能量函数的极端情况。

三、非线性弹性理论的各种混合能量形式广义变分原理

非线性弹性理论的基本方程和边界条件：

$$(F_{ik}S_{jk})_{,j}+f_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.1}$$

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\Sigma(E_{kl})}{\partial E_{ij}}=S_{ij},\ \text{或}\ \frac{\partial\Sigma^c(S_{kl})}{\partial S_{ij}}=E_{ij} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.3}$$

$$\overset{*}{T}_i=F_{ik}S_{jk}\nu_j=\mathring{T}_i \qquad (\text{在}A_\sigma\text{上}) \tag{3.4}$$

$$u_i=\mathring{u}_i \qquad (\text{在}A_u\text{上}) \tag{3.5}$$

f_i，$\mathring{T}_i$为死载荷[5]，$F_{ik}=\delta_{ik}+u_{i,k}$为变形梯度张量，$u_i$为位移向量，$A_\sigma$、$A_u$分别为已知力边界和位移边界，$\nu_i$为边界曲面单位外法向量。非线性弹性理论(3.1)～(3.5)的解u_i，S_{ij}相当于二类变量泛函数（见[3](2.5a,b)）。

$$V(u_i,S_{ij})=\int_V\{\Sigma(E_{ij})-[E_{ij}-E_{ij}(u_k)]S_{ij}-u_if_i\}dV-\int_{A_u}(u_i-\mathring{u}_i)\overset{*}{T}_idA-\int_{A_\sigma}u_i\mathring{T}_idA \tag{3.6}$$

$$J(u_i,S_{ij})=\int_V\left\{\Sigma^c(S_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}S_{ij}\right.$$

$$\left.+u_i[(F_{ik}S_{jk})_{,j}+f_i]\right\}dV-\int_{A_u}\mathring{u}_i\overset{v}{T}_i dA$$

$$-\int_{A_\sigma}u_i(\overset{v}{T}-\mathring{T}_i)dA \tag{3.7}$$

的驻值问题。泛函数V,J的独立变量是u_i,S_{ij}。E_{ij}不是独立变量，它依赖于S_{ij}，由本构方程(3.3)决定。F_{ij}，$\overset{v}{T}_i$也不是独立变量。式中$E_{ij}(u_k)$是个缩写，

$$E_{ij}(u_k)\equiv\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \tag{3.8}$$

我们用

$$\sum_{i=p,\cdots,q}E_iS_i-\Sigma^c_{kl}(S_p,\cdots,S_q;\ E_r,\cdots,E_s) \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=p,\cdots,q}E_iS_i-\Sigma_{kl}(E_p,\cdots,E_q;\ S_r,\cdots,S_s) \tag{3.10}$$

分别代换V、J中的$\Sigma(E_{ij})$和$\Sigma^c(S_{ij})$)，则有泛函数

$$V_k(u_i,\ S_{ij},\ E_r,\cdots,E_s)$$

$$=\int_V\left\{\sum_{i=p,\cdots,q}E_iS_i-\Sigma^c_{kl}-[E_{ij}-E_{ij}(u_k)]S_{ij}-u_if_i\right\}dV$$

$$-\int_{A_u}(u_i-\mathring{u}_i)\overset{v}{T}_idA-\int_{A_\sigma}u_i\mathring{T}_idA \tag{3.11}$$

$$J_k(u_i,\ S_{ij},\ E_p,\cdots,E_q)$$

$$=\int_V\left\{\sum_{i=p,\cdots,q}E_iS-\Sigma_{kl}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}S_{ij}+u_i[(F_{ik}S_{jk})_{,j}\right.$$

$$\left.+f_i]\right\}dV-\int_{A_u}\mathring{u}_i\overset{v}{T}_i\,dA-\int_{A_\sigma}(u_i\overset{v}{T}_i-\mathring{T}_i)dA \tag{3.12}$$

V_k是不受约束的独立自变函数u_i，S_{ij}，$E_r,\cdots,E_s$的泛函数，J_k是不受约束的独立自变函数u_i，S_{ij}，$E_p,\cdots,E_q$的泛函数。V_k和J_k的独立应变分量自变函数合起来正好是全部应变分量。我们称V_k和J_k为“对应”的泛函数。

混合能量形式广义变分原理I_k：

$$\delta V_k|_{u_i,S_{ij},E_r,\cdots,E_s}=0 \tag{3.13}$$

或 $$V_k|_{u_i,S_{ij},E_r,\cdots,E_s}=\text{驻值} \tag{3.14}$$

的充分必要条件是u_i，S_{ij}，$E_r,\cdots,E_s$满足：

平衡方程(3.1)，

部分应变位移方程

$$E_r=E_r(u_i),\cdots,E_s=E_s(u_i),\qquad(\text{在}V\text{内}) \tag{3.15}$$

部分本构方程

$$\frac{\partial\Sigma^c_{kl}}{\partial E_r}=-S_r,\cdots,\frac{\partial\Sigma^c_{kl}}{\partial E_s}=-S_s,\qquad(\text{在}V\text{内}) \tag{3.16}$$

部分应变位移关系和本构关系的混合方程

$$\frac{\partial \Sigma_{kl}^{c}}{\partial S_p}=E_p(u_i),\cdots,\ \frac{\partial \Sigma_{kl}^{c}}{\partial S_q}=E_q(u_i) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.17}$$

边界条件(3.4)、(3.5).

式中$E_r(u_i),\cdots,E_q(u_i)$由(3.8)式定义。

混合能量形式广义变分原理Ⅱ$_k$:

$$\delta J_k|_{u_i,S_{ij},E_p,\cdots,E_q}=0 \tag{3.18}$$

或

$$J_k|_{u_i,S_{ij},E_p,\cdots,E_q}=\text{驻值} \tag{3.19}$$

的充分必要条件是u_i, S_{ij}, $E_p,\cdots,E_q$满足:

平衡方程(3.1),

部分应变位移方程

$$E_p=E_p(u_i),\cdots,E_q=E_q(u_i) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.20}$$

部分本构方程

$$\frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial E_p}=S_p,\cdots,\ \frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial E_q}=S_q \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.21}$$

部分应变位移关系和本构关系的混合方程

$$\frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial S_r}=-E_r(u_i),\cdots,\ \frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial S_s}=-E_s(u_i) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.22}$$

边界条件(3.4)、(3.5)。

我们称混合能量形式广义变分原理Ⅰ$_k$与Ⅱ$_k$为"对应"的混合能量形式广义变分原理。我们不去一般地证明广义变分原理Ⅰ$_k$、Ⅱ$_k$，而以广义变分原理Ⅰ$_2$、Ⅱ$_2$为例证明之。

用

$$\Gamma_{\alpha3}S_{\alpha3}-\Sigma_{24}^{c}(S_{\alpha3},\ E_{11},\ E_{22},\ E_{33},\ \Gamma_{12}) \tag{3.23}$$

$$\Gamma_{\alpha3}S_{\alpha3}-\Sigma_{24}(\Gamma_{\alpha3},\ S_{11},\ S_{22},\ S_{33},\ S_{12}) \tag{3.24}$$

分别代换(3.6)、(3.7)中的$\Sigma(E_{ij})$和$\Sigma^c(S_{ij})$，有

$$\begin{aligned}&V_2(u_i,\ S_{ij},\ E_{11},\ E_{22},\ E_{33},\ \Gamma_{12})\\&=\int_V\{\Gamma_{\alpha3}S_{\alpha3}-\Sigma_{24}^{c}-[E_{ij}-E_{ij}(u_k)]S_{ij}-f_iu_i\}dV\\&\quad-\int_{A_u}(u_i-\mathring{u}_i)\check{T}_idA-\int_{A_\sigma}u_i\mathring{T}_idA\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}J_2(u_i,\ S_{ij},\ \Gamma_{\alpha3})=&\int_V\left\{\Gamma_{\alpha3}S_{\alpha3}-\Sigma_{24}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}S_{ij}\right.\\&\left.+u_i[(F_{ik}S_{jk})_{,j}+f_i]\right\}dV-\int_{A_u}\mathring{u}_i\check{T}dA\\&-\int_{A_\sigma}u_i(\check{T}_i-\mathring{T}_i)dA\end{aligned} \tag{3.26}$$

V_2是u_i, S_{ij}, $E_{11},\cdots,\Gamma_{12}$ 13个独立自变函数的泛函数，J_2是u_i, S_{ij}, $\Gamma_{\alpha3}$ 11个独立自变函数的泛函数。

混合能量形式广义变分原理Ⅰ$_2$:

$$\delta V_2|_{u_i,S_{ij},E_{11},\cdots,\Gamma_{12}}=0 \tag{3.27}$$

或

$$V_2|_{u_2,S_{ij},E_{11},\cdots,\Gamma_{12}}=\text{驻值} \tag{3.28}$$

的充分必要条件是u_i, S_{ij}, $E_{11},\cdots,\Gamma_{12}$满足:

(3.1),

$$\left.\begin{aligned} &E_{11}=E_{11}(u_i), \qquad E_{22}=E_{22}(u_i) \\ &E_{33}=E_{33}(u_i), \qquad \Gamma_{12}=\Gamma_{12}(u_i) \end{aligned}\right\} \quad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.29}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial E_{11}}=-S_{11}, \qquad \frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial E_{22}}=-S_{22} \\ &\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial E_{33}}=-S_{33}, \qquad \frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial \Gamma_{12}}=-S_{12} \end{aligned}\right\} \quad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial S_{\alpha3}}=\Gamma_{\alpha3}(u_i)=2E_{\alpha3}(u_i) \qquad (\alpha=1,2)\ (\text{在}V\text{内}) \tag{3.31}$$

边界条件(3.4)、(3.5)。

对V_2作变分，并利用Gauss定理以及

$$S_{ij}E_{ij}(u_p)=(u_iF_{ik}S_{jk})_{,j}-u_i(F_{ik}S_{jk})_{,j}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}S_{ij} \tag{3.32}$$

则有

$$\begin{aligned} \delta V_2=-\int_V\Big\{&[(F_{ik}S_{jk})_{,j}+f_i]\delta u_i+\Big(S_{11}+\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial E_{11}}\Big)\delta E_{11} \\ &+\Big(S_{22}+\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial E_{22}}\Big)\delta E_{22}+\Big(S_{33}+\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial E_{33}}\Big)\cdot\delta E_{33} \\ &+\Big(S_{12}+\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial \Gamma_{12}}\Big)\delta\Gamma_{12}+[E_{11}-E_{11}(u_i)]\delta S_{11} \\ &+[E_{22}-E_{22}(u_i)]\delta S_{22}+[E_{33}-E_{33}(u_i)]\delta S_{33} \\ &+[\Gamma_{12}-2E_{12}(u_i)]\delta S_{12}+\Big[\frac{\partial\Sigma_{24}^c}{\partial S_{\alpha3}}-2E_{\alpha3}(u_i)\Big]\delta S_{\alpha3}\Big\}dV \\ &+\int_{A_u}(\mathring{u}_i-u_i)\delta\check{T}_i dA+\int_{A_\sigma}(\check{T}_i-\hat{T}_i)\delta u_i dA \end{aligned} \tag{3.33}$$

由变分式(3.33)，立刻证明了混合能量形式广义变分原理Ⅰ$_2$。

混合能量形式广义变分原理Ⅱ$_2$：

$$\delta J_2|_{u_i,S_{ij},\Gamma_{\alpha3}}=0 \tag{3.34}$$

或

$$J_2|_{u_i,S_{ij},\Gamma_{\alpha3}}=\text{驻值} \tag{3.35}$$

的充分必要条件是u_i，S_{ij}，$\Gamma_{\alpha3}$满足：

(3.1)，

$$\Gamma_{\alpha3}=\Gamma_{\alpha3}(u_i)=2E_{\alpha3}(u_i) \qquad (\alpha=1,2,\ \text{在}V\text{内}) \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial\Gamma_{\alpha3}}=S_{\alpha3} \qquad (\alpha=1,2;\quad \text{在}V\text{内}) \tag{3.37}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{11}}=-E_{11}(u_i), \qquad \frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{22}}=-E_{22}(u_i), \\ &\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{33}}=-E_{33}(u_i), \qquad \frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{12}}=-\Gamma_{12}(u_i)=-2E_{12}(u_i), \end{aligned}\right\} \quad (\text{在}V\text{内}) \tag{3.38}$$

边界条件(3.4)、(3.5)。

同样，利用(3.32)和Gauss定理，对J_2作变分，

$$\delta J_2=\int_V\Big\{[(F_{ik}S_{jk})_{,j}+f_i]\delta u_i+\Big(S_{\alpha3}-\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial\Gamma_{\alpha3}}\Big)\delta\Gamma_{\alpha3}$$
$$-\Big[E_{11}(u_i)+\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{11}}\Big]\delta S_{11}-\Big[E_{22}(u_i)+\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{22}}\Big]\delta S_{22}$$
$$-\Big[E_{33}(u_i)+\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{33}}\Big]\delta S_{33}-\Big[\Gamma_{12}(u_i)+\frac{\partial\Sigma_{24}}{\partial S_{12}}\Big]\delta S_{12}$$
$$+[\Gamma_{\alpha3}-2E_{\alpha3}(u_i)]\delta S_{\alpha3}\Big\}dV-\int_{A_u}(\mathring{u}_i-u_i)\delta\check{T}dA$$
$$-\int_{A_\sigma}(\check{T}_i-\mathring{T}_i)\delta u_i dA \tag{3.39}$$

于是，由变分式(3.39)可见，混合能量形式广义变分原理Ⅱ$_2$正确。

对$\Sigma(E_{ij})$、$\Sigma^c(S_{ij})$不同的“对应”变量作Legendre变换，我们就可以得到很多“对应”的混合能量形式广义变分原理。不难计算，总计有63对“对应”的混合能量形式广义变分原理。其中有一对特殊的“对应”的混合能量形式广义变分原理。用

$$S_{ij}E_{ij}-\Sigma^c(S_{ij}) \tag{3.40}$$
$$S_{ij}E_{ij}-\Sigma(E_{ij}) \tag{3.41}$$

分别代换泛函数(3,6)、(3.17)中的$\Sigma(E_{ij})$和$\Sigma^c(S_{ij})$，我们便得到以u_i，S_{ij} 9个独立自变函数的泛函数

$$V_6(u_i,\ S_{ij})=\int_V[E_{ij}(u_k)S_{ij}-\Sigma^c(S_{ij})-u_if_i]dV$$
$$-\int_{A_u}(u_i-\mathring{u}_i)\check{T}_i dA-\int_{A_\sigma}u_i\mathring{T}_i dA \tag{3.42}$$

和以u_i，S_{ij}，E_{ij}15个独立自变函数的泛函数

$$J_6(u_i,S_{ij},E_{ij})=\int_V\Big\{S_{ij}E_{ij}-\Sigma(E_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}S_{ij}$$
$$+u_i[(F_{ik}S_{jk})_{,j}+f_i]\Big\}dV$$
$$-\int_{A_u}\mathring{u}_i\check{T}dA-\int_{A_\sigma}u_i(\check{T}_i-\mathring{T}_i)dA \tag{3.43}$$

$V_6(u_i,\ S_{ij})$正是非线性弹性理论的满足应变位移关系的以u_i，S_{ij}为自变函数的二类变量广义变分原理（见[3](2.7a)）的泛函数，而$J_6(u_i,\ S_{ij},\ E_{ij})$正是以$u_i$，$S_{ij}$，$E_{ij}$为自变函数的三类变量完全广义变分原理（见[3](1.24b)的泛函数。从“对应”的混合能量形式广义变分原理的观点来看，满足应变位移关系的二类变量广义变分原理和三类变量完全广义变分原理也是一对“对应”的混合能量形式广义变分原理，但是，它们是“对应”的混合能量形式广义变分原理的极端情况。

线性弹性理论中的混合能量形式广义变分原理，可用本文同样方法处理，但是，它们是本文的特殊情况，这里不一一陈述。容易看出，文献[1]中的混合能量形式广义变分原理是本文广义变分原理Ⅱ$_2$的特殊情况。

四、关于弹性薄板大挠度问题

作为非线性弹性理论的混合能量形式广义变分原理的应用，我们应用Ritz方法，从混合

能量形式广义变分原理Ⅱ$_2$推导出弹性薄板大挠度理论的基本方程和边界条件。从而，弹性薄板大挠度理论便“纳入”[1]了非线性弹性理论体系。

取直角Cartesian坐标系$x_i(i=1,2,3)$，$x_1=x$，$x_2=y$，$x_3=z$，xy平面为板中平面，板厚为h。由薄板大挠度问题的基本假设（见[2]，p463，(H1)—(H6)），我们取：

位移 $$U_\alpha(x_i)=u_\alpha(x_\beta)-zw_{,\alpha},\quad U_3(x_i)=w(x_\alpha) \tag{4.1}$$

应变 $$\Gamma_{\alpha 3}=0,\quad(\alpha=1,2) \tag{4.2}$$

应力 $$\left.\begin{aligned}&S_{\alpha\beta}(x_i)=N_{\alpha\beta}(x_\gamma)/h+M_{\alpha\beta}(x_\gamma)z/J\\&Q_\alpha'(x_\beta)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}S_{\alpha 3}dz\\&S_{33}=0\qquad(J\equiv h^3/12)\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

在泛函数J_2中，取

$$E_{\alpha\beta}(U_i)=(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}-2zw_{,\alpha\beta}+w_{,\alpha}w_{,\beta})/2 \tag{4.4}$$

又由[2](p463)之(H3)、(H4)，T_α $(\alpha=1,2)$中略去一阶量，T_3中也略去一阶量，于是，在边界处，可用$\overset{\nu}{T}_i=S_{ij}\nu_j$代替$\overset{\nu}{T}=F_{ik}S_{jk}\nu_j$。

薄板上、下表面为应力边界：

$$T_1=T_2=0,\quad T_3=\pm q/2\ (\text{在}z=\pm h/2\text{上}) \tag{4.5}$$

薄板侧面一部分为位移边界A_u，一部分为应力边界A_σ，

$$\left.\begin{aligned}&U_\alpha(x_i)=\mathring{U}_\alpha=\mathring{u}_\alpha-z\mathring{\psi}_\alpha\\&U_3(x_i)=w=\mathring{w}\end{aligned}\right\}\quad(\text{在}A_u\text{上}) \tag{4.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&T_\alpha(x_i)=\mathring{T}_\alpha=\mathring{P}_\alpha/h+\mathring{M}_{\alpha\beta}z\nu_\beta/J\\&T_3(x_i)=\mathring{T}_3=\mathring{P}_3/h\end{aligned}\right\}\quad(\text{在}A_\sigma\text{上}) \tag{4.7}$$

将(4.1)～(4.7)代入(3.26)，并对$z=-h/2$到$z=h/2$积分之，有

$$\begin{aligned}J_2=&\iint_\Omega\Big[V_N+V_M+M_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+w_{,\alpha}w_{,\beta})N_{\alpha\beta}\\&+F_\alpha u_\alpha+Pw\Big]d\Omega+\int_{s_u}[(u_\alpha-\mathring{u}_\alpha)N_{\alpha\beta}\nu_\beta-(w_{,\alpha}-\mathring{\psi}_\alpha)M_{\alpha\beta}\nu_\beta\\&+(w-\mathring{w})Q_\alpha'\nu_\alpha]ds+\int_{s_\sigma}(\mathring{P}_\alpha u_\alpha-\mathring{M}_{\alpha\beta}\nu_\beta w_{,\alpha}+\mathring{P}_3w)ds\end{aligned} \tag{4.8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&V_N\equiv\frac{1}{2Eh}[(N_{11}+N_{22})^2+2(1+\nu)(N^2_{12}-N_{11}N_{22})]\\&V_M\equiv\frac{1}{2EJ}[(M_{11}+M_{22})^2+2(1+\nu)(M^2_{12}-M_{11}M_{22})]\\&F_\alpha\equiv\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f_\alpha dz,\quad P=q+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f_3dz\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Ω为板中面区域，s_u为板中面已知位移边线，s_σ为板中面已知外力边线。

J_2是不受约束独立变量u_α，w，$N_{\alpha\beta}$，$M_{\alpha\beta}$，Q'_α的泛函数。对J_2作变分，并整理之，有

$$
\begin{aligned}
\delta J_2=\iint_\Omega \Big\{&\Big[\frac{1}{Eh}(N_{11}-\nu N_{22})-\Big((u_{1,1}+\frac{1}{2}w_{,1}^2\Big)\Big]\delta N_{11}\\
&+\Big[\frac{1}{Eh}(N_{22}-\nu N_{11})-\Big(u_{2,2}+\frac{1}{2}w_{,2}^2\Big)\Big]\delta N_{22}\\
&+\Big[\frac{2}{Eh}(1+\nu)N_{12}-(u_{1,2}+u_{2,1}+w_{,1}w_{,2})\Big]\delta N_{12}\\
&+\Big[\frac{1}{EJ}(M_{11}-\nu M_{22})+w_{,11}\Big]\delta M_{11}\\
&+\Big[\frac{1}{EJ}(M_{22}-\nu M_{11})+w_{,22}\Big]\delta M_{22}\\
&+\Big[\frac{2}{EJ}(1+\nu)M_{12}+2w_{,12}\Big]\delta M_{12}+(N_{\alpha\beta,\beta}+F_\alpha)\delta u_\alpha\\
&+[(N_{\alpha\beta}w_{,\alpha})_{,\beta}+M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+P]\delta w\Big\}d\Omega\\
&+\int_{s_u}\Big\{(u_\alpha-\mathring{u}_\alpha)\delta N_{\alpha\beta}\nu_\beta-\Big(\frac{\partial w}{\partial\nu}-\mathring{\psi}_\nu\Big)\delta M_\nu\\
&+(w-\mathring{w})\delta\Big[\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}+Q_\nu'+M_{\nu s}\delta(s-s_1)-M_{\nu s}\delta(s-s_2)\Big]\\
&+[Q_\nu'-Q_\nu+M_{\nu s}\delta(s-s_1)-M_{\nu s}\delta(s-s_2)]\delta w\Big\}ds\\
&+\int_{s_\sigma}\Big\{(\mathring{P}_\alpha-N_{\alpha\beta}\nu_\beta)\delta u_\alpha+(M_\nu-\mathring{M}_\nu)\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial\nu}\Big)\\
&+\Big[\Big(\mathring{P}_3+\frac{d\mathring{M}_{\nu s}}{ds}+\mathring{M}_{\nu s}\delta(s-s_2)\\
&-\mathring{M}_{\nu s}\delta(s-s_1)-\Big(Q_\nu+\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}\Big)\Big]\delta w\Big\}ds
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

整理过程中用到下述各式：

$$
\left.
\begin{aligned}
&M_\nu=M_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta,\quad \mathring{M}_\nu=\mathring{M}_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta,\\
&M_{\nu s}=M_{\alpha\beta}\nu_\alpha s_\beta,\quad \mathring{M}_{\nu s}=\mathring{M}_{\alpha\beta}\nu_\alpha s_\beta\\
&\mathring{\psi}_\nu=\mathring{\psi}_\alpha\nu_\alpha,\qquad \frac{\partial w}{\partial\nu}=w_{,\alpha}\nu_\alpha,\qquad \frac{\partial w}{\partial s}=w_{,\alpha}s_\alpha\\
&Q'_\nu=Q'_\alpha\nu_\alpha\qquad Q_\alpha\equiv M_{\alpha\beta,\beta}\qquad Q_\nu=M_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.11}
$$

(4.10)中s是板边界曲线的弧参数，s_1，s_2分别是s_u的起点与终点的弧参数，边界曲线的单位切向量s_α的方向指向s增大的方向，ν_α向s_α的转向与x轴向y轴转向一致。$\delta(s)$为狄拉克函数。

由(4.10)，变量Q_α'只出现在s_u边界上。令$\delta J_2=0$，由δw的任意性，必有

$$Q'_\nu=Q_\nu-M_{\nu s}\delta(s-s_1)+M_{\nu s}\delta(s-s_2)\ (\text{在}s_u\text{上}) \tag{4.12}$$

令(4.12)首先满足，则Q_α'就不是独立变量了。Q_ν'用(4.12)代替之，并代入J_2，δJ_2，有

$$J_2=\iint_{\Omega}\Big[V_N+V_M+M_{\alpha\beta}\,w_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+w_{,\alpha}w_{,\beta})N_{\alpha\beta}+F_\alpha u_\alpha+Pw\Big]d\Omega$$
$$+\int_{s_u}\Big[(u_\alpha-\mathring{u}_\alpha)N_{\alpha\beta}\nu_\beta-\Big(\frac{\partial w}{\partial\nu}-\mathring{\psi}_\nu\Big)M_\nu+(w-\mathring{w})\Big(Q_\nu+\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}\Big)\Big]ds$$
$$+\int_{s_\sigma}\Big(\mathring{P}_\alpha u_\alpha+\mathring{q}w-\mathring{M}_\nu\frac{\partial w}{\partial\nu}\Big)ds \tag{4.13}$$

$$\delta J_2=\iint_{\Omega}\Big\{\Big[\frac{1}{Eh}(N_{11}-\nu N_{22})-\Big(u_{1,1}+\frac{1}{2}w_{,1}^2\Big)\Big]\delta N_{11}$$
$$+\Big[\frac{1}{Eh}(N_{22}-\nu N_{11})-\Big(u_{2,2}+\frac{1}{2}w_{,2}^2\Big)\Big]\delta N_{22}$$
$$+\Big[\frac{2}{Eh}(1+\nu)N_{12}-(u_{1,2}+u_{2,1}+w_{,1}w_{,2})\Big]\delta N_{12}$$
$$+\Big[\frac{1}{EJ}(M_{11}-\nu M_{22})+w_{,11}\Big]\delta M_{11}$$
$$+\Big[\frac{1}{EJ}(M_{22}-\nu M_{11})+w_{,22}\Big]\delta M_{22}$$
$$+\Big[\frac{2}{EJ}(1+\nu)M_{12}+2w_{,12}\Big]\delta M_{12}+(N_{\alpha\beta,\beta}+F_\alpha)\delta u_\alpha$$
$$+[(N_{\alpha\beta}w_{,\alpha})_{,\beta}+M_{\alpha\beta,\beta\alpha}+P]\,\delta w\Big\}d\Omega$$
$$+\int_{s_u}\Big[(u_\alpha-\mathring{u}_\alpha)\delta N_{\alpha\beta}\nu_\beta-\Big(\frac{\partial w}{\partial\nu}-\mathring{\psi}_\nu\Big)\delta M_\nu+(w-\mathring{w})\delta\Big(Q_\nu+\frac{\delta M_{\nu s}}{\partial s}\Big)\Big]ds$$
$$+\int_{s_\sigma}\Big\{(\mathring{P}_\alpha-N_{\alpha\beta}\nu_\beta)\delta u_\alpha-(\mathring{M}_\nu-M_\nu)\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial\nu}\Big)+\Big[\mathring{q}-\Big(Q_\nu+\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial s}\Big)\Big]\delta w\Big\}ds \tag{4.14}$$

式中

$$\mathring{q}\equiv\mathring{P}_3+\frac{d\mathring{M}_{\nu s}}{ds}+\mathring{M}_{\nu s}\delta(s-s_2)-\mathring{M}_{\nu s}\delta(s-s_1) \tag{4.15}$$

为综合剪力。

由$\delta J_2=0$，弹性薄板大挠度理论的基本方程和边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&N_{\alpha\beta,\beta}+F_\alpha=0\\&M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+(N_{\alpha\beta}w_{,\alpha})_{,\beta}+P=0\end{aligned}\quad(\text{在}\Omega\text{内})\right\} \tag{4.16}$$

$$\left.\begin{aligned} N_{11}&=B[(u_{1,1}+\nu u_{2,2})+(w_{,1}^{2}+\nu w_{,2}^{2})/2] \\ N_{22}&=B[(u_{2,2}+\nu u_{1,1})+(w_{,2}^{2}+\nu w_{,1}^{2})/2] \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \\ N_{12}&=(1-\nu)B(u_{1,2}+u_{2,1}+w_{,1}w_{,2})/2 \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{11}&=-D(w_{,11}+\nu w_{,22}) \\ M_{22}&=-D(w_{,22}+\nu w_{,11}) \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \\ M_{12}&=-D(1-\nu)w_{,12} \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

$$\text{在}s_u\text{上，}\ u_\alpha=\mathring{u}_\alpha,\ \ w=\mathring{w},\ \ \partial w/\partial\nu=\mathring{\psi}_\nu \tag{4.19}$$

$$\text{在}s_\sigma\text{上，}\ N_{\alpha\beta}\nu_\beta=\mathring{P}_\alpha,\ \ M_\nu=\mathring{M}_\nu\ \ Q_\nu+\partial M_{\nu s}/\partial s=\mathring{q} \tag{4.20}$$

式中
$$B\equiv\frac{Eh}{1-\nu^2},\quad D\equiv\frac{EJ}{1-\nu^2}$$

可以预料，通过非线性弹性理论的混合能量形式广义变分原理Ⅱ$_2$，梁、板、壳的大挠度理论均可纳入非线性弹性理论体系。

参 考 文 献

[1] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社（1980），407—414.

[2] Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall (1965), 351, 463—470.

[3] 戴天民，论非线性弹性理论的各种变分原理，应用数学和力学，3，5（1982），585—585.

[4] 郭仲衡，非线性弹性理论变分原理的统一理论，应用数学和力学，1，1（1980），5—23.

[5] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社（1980），186—202.

[6] 钱伟长，《变分法及有限元》上册，科学出版社（1980）.

[7] Гантмахер Ф. Р., *Лекции по Аналитической Механике*, Физматгиз, Москва (1960), 86—87.

[8] Courant, R. and D. Hilbert, *Method of Mathematical Physics*, Vol.2, John Wiley and Sons, New York, London (1962), 32—39.

The Generalized Variational Principles about Blending Energy Form of Non-Linear Elasticity

Hu Cheng-dong

(*Department of Mathematics, Jilin University, Changchun*)

Abstract

First of all, this paper gives Legendre transformation for the so-called partial corresponding variables of strain energy function $\Sigma(E_{ij})$ and complementary strain energy function $\Sigma^c(S_{ij})$ of the elastic material, and introduces the corresponding blending complementary strain energy function $\Sigma^c{}_{hl}$ and blending strain energy function Σ_{hl}. Moreover, a series of generalized variational principles of the corresponding blending energy form of non-linear elasticity is given. As a special case, there exist corresponding results[1] in linear elasticity.