

# 任意分布载荷下两对边简支单向非均匀 变厚度矩形板的弯曲问题\*

叶开沅 王银邦

(兰州大学, 1986年1月23日收到)

## 摘 要

本文使用阶梯折算法<sup>[1,2]</sup>, 研究了任意分布载荷下两对边简支 ( $x=0$  和  $x=a$  边) 单向非均匀变厚度 ( $D=D(y)$ ) 矩形板的弯曲问题, 得到了问题的阶梯近似解. 文末对静水压力作用下四边简支线性变厚度正方形板的弯曲作了数值计算, 所得结果与[3]一致. 这样便验证了阶梯折算法的准确性.

## 一、引 言

在[1,2]应用过的阶梯折算法的基础上, 本文研究了任意分布载荷下两对边简支 ( $x=0$  和  $x=a$  边) 单向非均匀变厚度 ( $D=D(y)$ ) 矩形板的弯曲问题, 得到了问题的阶梯近似解. 其中,  $D(y)=E(y)h^3(y)/12(1-\nu^2)$  为抗弯刚度,  $E(y)$  为杨氏弹性模量,  $h(y)$  为板的厚度,  $\nu$  为泊松比, 为使问题不致太繁复, 假定  $\nu$  为常量. 主要的概念是将  $D(y)$  离散化, 最后只需求解一个二元联立代数方程组. 文末对静水压力作用下四边简支线性变厚度正方形板的弯曲作了数值计算, 所得结果与文献[3]一致, 这样便验证了阶梯折算法的准确性.

## 二、均匀等厚度板的初参数解

在讨论非均匀变厚度板的弯曲问题之前, 我们先给出在任意分布载荷下两对边简支均匀等厚度矩形板的初参数形式的通解.

考虑  $x=0$  和  $x=a$  两边简支的矩形薄板  $ABCF$  (见图1). 问题的基本方程为:

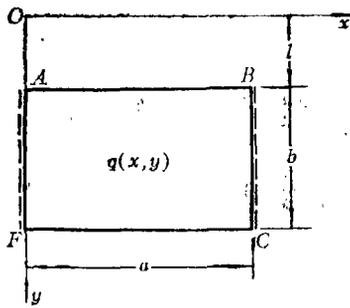
$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = q \quad (2.1)$$

其中  $w(x, y)$  为挠度,  $D = \text{const}$  为抗弯刚度,  $q(x, y)$  为任意分布横向载荷.

弯矩  $M_y$  和等效剪力  $V_y$  与挠度  $w$  有如下的关系:

\* 本文得到高等学校科技资金的资助.

本文曾发表在兰州大学学报(自然科学版), 力学专号, 1(1979), 115—132, 但某些计算结果有误, 现予以更正, 重新发表.



$$\left. \begin{aligned} M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ V_y &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

根据Levy解法<sup>[3]</sup>, 方程(2.1)的解为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \beta x \quad (\beta = m\pi/a) \quad (2.3)$$

图 1

其中

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{sh} \beta y + B_m \operatorname{ch} \beta y + C_m \beta y \operatorname{sh} \beta y + D_m \beta y \operatorname{ch} \beta y + \frac{1}{2\beta^3 D} \int_0^y [\beta(y-t) \operatorname{ch} \beta(y-t) - \operatorname{sh} \beta(y-t)] F_m(t) dt \quad (2.4)$$

$$F_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \beta x dx \quad (2.5)$$

将(2.3)代入(2.2)可得:

$$M_y = \sum_{m=1}^{\infty} M_{my} \sin \beta x, \quad V_y = \sum_{m=1}^{\infty} V_{my} \sin \beta x \quad (2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M_{my} &= -D [Y_m''(y) - \nu \beta^2 Y_m(y)] \\ V_{my} &= -D [Y_m'''(y) - (2-\nu) \beta^2 Y_m'(y)] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

为了以后方便起见, 现在将(2.4)写成下列二种形式的初参数解.

在  $y=l$  边夹紧或悬空的情况, 引进初参数  $Y_m(l)$ ,  $Y_m'(l)$ ,  $M_{my}(l)$  和  $V_{my}(l)$ , 则(2.4)可写成:

$$\begin{aligned} Y_m(y) &= Y_m(l) f_1(\beta(y-l)) + Y_m'(l) \frac{1}{\beta} f_2(\beta(y-l)) \\ &+ \frac{M_{my}(l)}{D} \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta(y-l)) + \frac{V_{my}(l)}{D} \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta(y-l)) \\ &- \frac{1}{\beta^3 D} \int_0^y f_4(\beta(y-t)) F_m(t) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= \operatorname{ch} \xi - \frac{1}{2} (1-\nu) \xi \operatorname{sh} \xi, \quad f_2(\xi) = \frac{1}{2} [(1+\nu) \operatorname{sh} \xi + (1-\nu) \xi \operatorname{ch} \xi] \\ f_3(\xi) &= -\frac{1}{2} \xi \operatorname{sh} \xi, \quad f_4(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \xi - \xi \operatorname{ch} \xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

在  $y=l$  边夹紧或简支的情况, 引进初参数  $Y_m(l)$ ,  $Y_m'(l)$ ,  $Y_m''(l)$ , 和  $Y_m'''(l)$ , 则(2.4)可写成:

$$Y_m(y) = Y_m(l) f_5(\beta(y-l)) + Y_m'(l) \frac{1}{\beta} f_6(\beta(y-l))$$

$$\begin{aligned}
 & -Y_m''(l) \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta(y-l)) - Y_m''(l) \frac{1}{\beta^2} f_4(\beta(y-l)) \\
 & - \frac{1}{\beta^3 D} \int_l^y f_4(\beta(y-t)) F_m(t) dt
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中

$$f_5(\xi) = \operatorname{ch}\xi - \frac{1}{2} \xi \operatorname{sh}\xi, \quad f_6(\xi) = \frac{1}{2} (3\operatorname{sh}\xi - \xi \operatorname{ch}\xi) \quad (2.11)$$

### 三、阶梯近似解

考虑图 2 所示的  $x=0$  和  $x=a$  两边简支的矩形薄板在任意分布横向载荷  $q(x, y)$  作用下的弯曲问题, 其抗弯刚度  $D(y)$  为  $y$  的任意函数。

对于  $D(y)$  的一般情形, 要求得问题的精确解是困难的, 因此, 本文建议用阶梯函数近似  $D(y)$  (离散化), 从而可得问题的阶梯近似解。

设给定区间  $[0, b]$  的分割:  $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n < b_{n+1} = b$ 。在此分割上取:

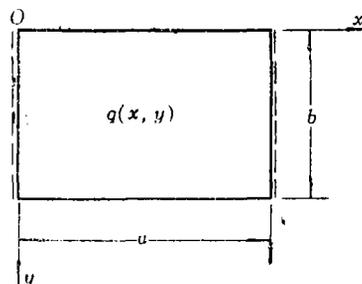


图 2

$$D(y) \approx k_n(y) \equiv D_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \{y - b_i\}^{\circ} \left( \frac{1}{\delta_i} - \frac{1}{\delta_{i-1}} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{D(y)} \approx g_n(y) \equiv \frac{1}{D_0} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \{y - b_i\}^{\circ} (\delta_i - \delta_{i-1}) \right] \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \delta_i = D_0 / D_i \\
 & D_i = \begin{cases} D(b_i) & \text{对于内接阶梯,} \\ D((b_i + b_{i+1})/2), & \text{对于中阶梯,} \\ D(b_{i+1}), & \text{对于外接阶梯,} \end{cases} \quad (i=0, 1, \dots, n)
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\{y - b_i\}^{\circ} = \begin{cases} 1, & y \geq b_i \\ 0, & y < b_i \end{cases} \quad (3.4)$$

现在仍用 Levy 型的解(2.3), 则问题的基本方程可简化为:

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2\beta^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \beta^4 Y_m = g_n(y) F_m(y) \quad (y \in (0, b) \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}) \quad (3.5)$$

而在各阶梯连接处  $Y_m(y)$  须服从连续条件:

$$\left. \begin{aligned}
 & Y_m(b_i - 0) = Y_m(b_i + 0), \quad Y_m'(b_i - 0) = Y_m'(b_i + 0) \\
 & M_{m_y}(b_i - 0) = M_{m_y}(b_i + 0), \quad V_{m_y}(b_i - 0) = V_{m_y}(b_i + 0)
 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.6)$$

在此情形,  $M_{m_y}$ ,  $V_{m_y}$  与  $Y_m$  有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} M_{m_y}(y) &= -k_n(y)[Y_m''(y) - \nu\beta^2 Y_m(y)] \\ V_{m_y}(y) &= -k_n(y)[Y_m'(y) - (2-\nu)\beta^2 Y_m'(y)] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

在  $y=0$  或  $y=b$  处的边界条件为:

$$1) \text{ 夹紧边 } Y_m = Y_m' = 0 \quad (3.8)$$

$$2) \text{ 简支边 } Y_m = Y_m'' = 0 \quad (3.9)$$

$$3) \text{ 悬空边 } M_{m_y} = V_{m_y} = 0 \quad (3.10)$$

现在的问题变为在边界条件(3.8)~(3.10)和连续条件(3.6)下求解方程(3.5)。

在  $y=0$  边夹紧或悬空的情况, 根据(2.8), 方程(3.5)的解可取为:

$$\begin{aligned} Y_m(y) &= Y_m(0)f_1(\beta y) + Y_m'(0) \frac{1}{\beta} f_2(\beta y) + \frac{M_{m_y}(0)}{D_0} \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta y) \\ &+ \frac{V_{m_y}(0)}{D_0} \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta y) - \frac{1}{\beta^3} \int_0^y f_4(\beta(y-t))g_n(t)F_m(t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \{y-b_i\}^{\circ} \left[ \frac{M_i}{D_0} \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta(y-b_i)) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

将上式代入(3.7)可得:

$$\left. \begin{aligned} M_{m_y}(y) &= k_n(y) \left\{ Y_m(0) \frac{\beta^2}{2} (1-\nu)^2 \beta y \operatorname{sh} \beta y \right. \\ &+ Y_m'(0) \frac{\beta}{2} (\nu-1) [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta y + (1-\nu) \beta y \operatorname{ch} \beta y] \\ &+ \frac{M_{m_y}(0)}{D_0} f_7(\beta y) + \frac{V_{m_y}(0)}{D_0} \frac{1}{\beta} f_2(\beta y) \\ &- \frac{1}{\beta} \int_0^y f_2(\beta(y-t))g_n(t)F_m(t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \{y-b_i\}^{\circ} \left[ \frac{M_i}{D_0} f_7(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} \frac{1}{\beta} f_2(\beta(y-b_i)) \right] \left. \right\} \\ V_{m_y}(y) &= k_n(y) \left\{ Y_m(0) \frac{\beta^3}{2} (1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta y - (1-\nu) \beta y \operatorname{ch} \beta y] \right. \\ &+ Y_m'(0) \frac{\beta^2}{2} (1-\nu)^2 \beta y \operatorname{sh} \beta y + \frac{M_{m_y}(0)}{D_0} \beta f_8(\beta y) \\ &+ \frac{V_{m_y}(0)}{D_0} f_1(\beta y) - \int_0^y f_1(\beta(y-t))g_n(t)F_m(t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \{y-b_i\}^{\circ} \left[ \frac{M_i}{D_0} \beta f_8(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} f_1(\beta(y-b_i)) \right] \left. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其中

$$f_7(\xi) = \operatorname{ch} \xi + \frac{1}{2} (1-\nu) \xi \operatorname{sh} \xi, \quad f_8(\xi) = \frac{1}{2} [(1+\nu) \operatorname{sh} \xi - (1-\nu) \xi \operatorname{ch} \xi] \quad (3.13)$$

容易验证(3.11)自动满足连续条件(3.6a)和(3.6b)。而将(3.12)代入(3.6c)和(3.6d),

即可得出关于 $M_i$ 和 $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )的如下表达式:

$$\begin{aligned}
 M_i = D_0 \psi_i \left\{ & Y_m(0) \frac{\beta^2}{2} (1-\nu)^2 \beta b_i \operatorname{sh} \beta b_i \right. \\
 & + Y_m'(0) \frac{\beta}{2} (\nu-1) [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta b_i + (1-\nu) \beta b_i \operatorname{ch} \beta b_i] \\
 & + \frac{M_{m_y}(0)}{D_0} f_7(\beta b_i) + \frac{V_{m_y}(0)}{D_0} \frac{1}{\beta} f_2(\beta b_i) \\
 & - \frac{1}{\beta} \int_0^{b_i} f_2(\beta(b_i-t)) g_n(t) F_m(t) dt + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{M_j}{D_0} f_7(\beta(b_i-b_j)) \right. \\
 & \left. + \frac{V_j}{D_0} \frac{1}{\beta} f_2(\beta(b_i-b_j)) \right] \left. \right\} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_i = D_0 \psi_i \left\{ & Y_m(0) \frac{\beta^3}{2} (1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta b_i - (1-\nu) \beta b_i \operatorname{ch} \beta b_i] \right. \\
 & + Y_m'(0) \frac{\beta^2}{2} (1-\nu)^2 \beta b_i \operatorname{sh} \beta b_i + \frac{M_{m_y}(0)}{D_0} \beta f_8(\beta b_i) \\
 & + \frac{V_{m_y}(0)}{D_0} f_1(\beta b_i) - \int_0^{b_i} f_1(\beta(b_i-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{M_j}{D_0} \beta f_8(\beta(b_i-b_j)) + \frac{V_j}{D_0} f_1(\beta(b_i-b_j)) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

其中

$$\psi_i = (D_{i-1} - D_i) / D_i \quad (3.15)$$

初参数 $Y_m(0)$ ,  $Y_m'(0)$ ,  $M_{m_y}(0)$ 和 $V_{m_y}(0)$ 可由 $y=0$ 和 $y=b$ 处的边界条件确定, 其中的二个是已知的.

在 $y=0$ 边夹紧或简支的情况, 根据(2.10), 方程(3.5)的解为:

$$\begin{aligned}
 Y_m(y) = & Y_m(0) f_6(\beta y) + Y_m'(0) \frac{1}{\beta} f_8(\beta y) - Y_m''(0) \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta y) \\
 & - Y_m'''(0) \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta y) - \frac{1}{\beta^3} \int_0^y f_4(\beta(y-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\
 & + \sum_{i=1}^n \{y-b_i\} \left[ \frac{M_i}{D_0} \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta(y-b_i)) \right] \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

将其代入(3.7)可得

$$\begin{aligned}
 M_{m\nu}(y) = & k_n(y) \left\{ Y_m(0) \beta^2 \left[ \nu \operatorname{ch} \beta y + \frac{1}{2} (1-\nu) \beta y \operatorname{sh} \beta y \right] \right. \\
 & + Y'_m(0) \frac{\beta}{2} \left[ (3\nu-1) \operatorname{sh} \beta y + (1-\nu) \beta y \operatorname{ch} \beta y \right] - Y''_m(0) f_7(\beta y) \\
 & - Y'''_m(0) \frac{1}{\beta} f_2(\beta y) - \frac{1}{\beta} \int_0^y f_2(\beta(y-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\
 & \left. + \sum_{i=1}^n \{y-b_i\} \left[ \frac{M_i}{D_0} f_7(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} \frac{1}{\beta} f_2(\beta(y-b_i)) \right] \right\} \\
 V_{m\nu}(y) = & k_n(y) \left\{ Y_m(0) \frac{\beta^3}{2} \left[ (3-\nu) \operatorname{sh} \beta y - (1-\nu) \beta y \operatorname{ch} \beta y \right] \right. \\
 & + Y'_m(0) \beta^2 \left[ (2-\nu) \operatorname{ch} \beta y - \frac{1}{2} (1-\nu) \beta y \operatorname{sh} \beta y \right] - Y''_m(0) \beta f_8(\beta y) \\
 & - Y'''_m(0) f_1(\beta y) - \int_0^y f_1(\beta(y-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\
 & \left. + \sum_{i=1}^n \{y-b_i\} \left[ \frac{M_i}{D_0} \beta f_8(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} f_1(\beta(y-b_i)) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中

$$\begin{aligned}
 M_i = & D_0 \psi_i \left\{ Y_m(0) \beta^2 \left[ \nu \operatorname{ch} \beta b_i + \frac{1}{2} (1-\nu) \beta b_i \operatorname{sh} \beta b_i \right] \right. \\
 & + Y'_m(0) \frac{\beta}{2} \left[ (3\nu-1) \operatorname{sh} \beta b_i + (1-\nu) \beta b_i \operatorname{ch} \beta b_i \right] - Y''_m(0) f_7(\beta b_i) \\
 & - Y'''_m(0) \frac{1}{\beta} f_2(\beta b_i) - \frac{1}{\beta} \int_0^{b_i} f_2(\beta(b_i-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{M_j}{D_0} f_7(\beta(b_i-b_j)) + \frac{V_j}{D_0} \frac{1}{\beta} f_2(\beta(b_i-b_j)) \right] \right\} \\
 V_i = & D_0 \psi_i \left\{ Y_m(0) \frac{\beta^3}{2} \left[ (3-\nu) \operatorname{sh} \beta b_i - (1-\nu) \beta b_i \operatorname{ch} \beta b_i \right] \right. \\
 & + Y'_m(0) \beta^2 \left[ (2-\nu) \operatorname{ch} \beta b_i - \frac{1}{2} (1-\nu) \beta b_i \operatorname{sh} \beta b_i \right] - Y''_m(0) \beta f_8(\beta b_i) \\
 & - Y'''_m(0) f_1(\beta b_i) - \int_0^{b_i} f_1(\beta(b_i-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{M_j}{D_0} \beta f_8(\beta(b_i-b_j)) + \frac{V_j}{D_0} f_1(\beta(b_i-b_j)) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

初参数  $Y_m(0)$ ,  $Y'_m(0)$ ,  $Y''_m(0)$  和  $Y'''_m(0)$  可由  $y=0$  和  $y=b$  处的边界条件确定, 其中的二个是已知的。

## 四、实 例

为了验证本文方法的正确性, 现在来计算一块四边简支受有静水压强的线性变厚度正方形板( $b/a=1$ )在 $x=a/2$ 处的挠度. 在此情形, 取

$$q(x, y) = q_0 y/b, \quad D(y) = D_0' \left[ 1 + \lambda \left( \frac{2y}{b} - 1 \right) \right]^3 \quad (4.1)$$

$y=0$  和  $y=b$  两边的边界条件为:

$$Y_m(0) = Y_m''(0) = 0, \quad Y_m(b) = Y_m''(b) = 0 \quad (4.2)$$

此问题曾由 H. Farve, 和 H. Gilg<sup>[3]</sup> 用小参数法处理过.

将边界条件(4.2a, b)代入(3.16)可得:

$$\begin{aligned} Y_m(y) = & Y_m'(0) \frac{1}{\beta} f_0(\beta y) - Y_m''(0) \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta y) \\ & - \frac{1}{\beta^3} \int_0^y f_4(\beta(y-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\ & + \sum_{i=1}^n \{y-b_i\} \cdot \left[ \frac{M_i}{D_0} \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta(y-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta(y-b_i)) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

将上式代入边界条件(4.2c, d), 可得

$$\left. \begin{aligned} & Y_m'(0) \frac{1}{\beta} f_0(\beta b) - Y_m''(0) \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta b) + I_1(b) \\ & + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{M_i}{D_0} \frac{1}{\beta^2} f_3(\beta(b-b_i)) + \frac{V_i}{D_0} \frac{1}{\beta^3} f_4(\beta(b-b_i)) \right] = 0 \\ & Y_m'(0) \left( \frac{\beta}{2} \operatorname{sh}\beta b - \frac{1}{2} \beta^2 b \operatorname{ch}\beta b \right) + Y_m''(0) \left( \frac{1}{2\beta} \operatorname{sh}\beta b + \frac{1}{2} b \operatorname{ch}\beta b \right) \\ & + I_2(b) - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{M_i}{D_0} \left[ \operatorname{ch}\beta(b-b_i) + \frac{1}{2} \beta(b-b_i) \operatorname{sh}\beta(b-b_i) \right] \right. \\ & \left. + \frac{V_i}{D_0} \left[ \frac{1}{2\beta} \operatorname{sh}\beta(b-b_i) + \frac{1}{2} (b-b_i) \operatorname{ch}\beta(b-b_i) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1(y) = & - \frac{1}{\beta^3} \int_0^y f_4(\beta(y-t)) g_n(t) F_m(t) dt \\ = & \frac{2q_0}{D_0 a \beta^3} \left\{ \beta y \operatorname{ch}\beta y - 3 \operatorname{sh}\beta y + 2\beta y + \sum_{j=1}^n \{y-b_j\} \cdot (\delta_j - \delta_{j-1}) \right. \\ & \cdot \left[ \beta(y-b_j) \operatorname{ch}\beta(y-b_j) - 3 \operatorname{sh}\beta(y-b_j) + 2\beta y \right. \\ & \left. \left. + \beta b_j (\beta(y-b_j) \operatorname{sh}\beta(y-b_j) - 2 \operatorname{ch}\beta(y-b_j)) \right] \right\} \\ I_2(y) = & \frac{1}{2\beta} \int_0^y [\beta(y-t) \operatorname{ch}\beta(y-t) + \operatorname{sh}\beta(y-t)] g_n(t) F_m(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$= \frac{2q_0}{D_0 a \beta^4} \left\{ \beta y \operatorname{ch} \beta y - \operatorname{sh} \beta y + \sum_{j=1}^n \{y - b_j\}^2 (\delta_j - \delta_{j-1}) \cdot [\beta(y - b_j) \operatorname{ch} \beta(y - b_j) - \operatorname{sh} \beta(y - b_j) + \beta b_j \beta(y - b_j) \operatorname{sh} \beta(y - b_j)] \right\}$$

(m为奇数)

当m为偶数时,  $F_m(y) = 0$ .

注意到(4.2a, b), 先由(3.18)求得  $M_i$  和  $V_i$ , 然后将它们代入(4.4)可解得  $Y_m'(0)$  和  $Y_m''(0)$ , 再代回可最后确定  $M_i$  和  $V_i$ , 则挠度可由(4.3)和(2.3)计算. 按照以上步骤, 我们在HN-3070计算机上用 Fortran 语言对正方形板 ( $b/a=1$ ) 的情形作了数值计算. 计算时取

表 1  $x=a/2$ 时w的值  $w(a/2, y)$  (单位:  $10^{-3} q_0 a^4 / D_0$ )

$w_i = w(a/2, i b / 10)$			
$n+1$	6	10	14
$w_1$	0.648332	0.648857	0.649106
$w_2$	1.211672	1.213329	1.213627
$w_3$	1.640601	1.639800	1.639774
$w_4$	1.899066	1.899018	1.898875
$w_5$	1.979636	1.978123	1.977712
$w_6$	1.878462	1.875969	1.875321
$w_7$	1.602843	1.601155	1.600467
$w_8$	1.175460	1.172582	1.171601
$w_9$	0.623023	0.622204	0.620755

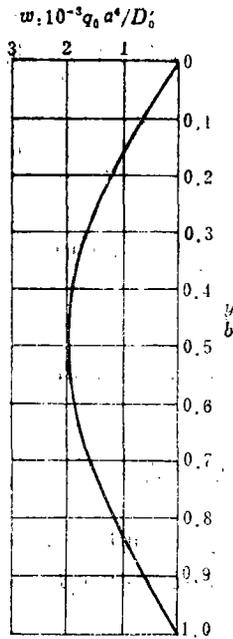


图 3

$\nu=0.25$ ,  $\lambda=0.2$ ,  $b_i=ib/(n+1)$ ,  $D_i=D((b_i+b_{i+1})/2)$ ,  $m=6$ . 计算结果列在表1. 由此可见, 当阶梯数目 $n+1=6$ 时的挠度值已具有很高的精度. 将 $n+1=10$ 的挠度值绘于图3 (单位为  $10^{-3}q_0a^4/D_0'$ ), 与H. Farve 等<sup>[3]</sup>的结果相比符合得很好.

## 五、讨 论

对于阶梯形变刚度板用本文的方法的解是精确解. 而对于连续变刚度板用本文得到的解是近似解. 由上面的例子可看出, 用本文的方法效果是好的. 若分两种情形, 即用外接和内接阶梯形代替连续非均匀变厚度分别处理, 则精确解必在这两种结果之间, 误差极易估计出来.

和文献[1]一样, 利用本文求得的解析解可建立任意载荷下两对边简支单向非均匀变厚度板弯曲问题的等强度理论, 同时利用该结果还可以进行弹塑性和高温度蠕变分析.

## 参 考 文 献

- [1] 叶开沅、许剑云, 非均匀变厚度弹性体力学若干问题的一般解 I. 在非均匀定常温度场下的非均匀变厚度高速度旋转圆盘的弹塑性应力分析. 兰州大学学报(自然科学版), 力学专号, 1 (1979), 60—74; 力学学报, 专号(1981), 78—89; 在第十六届 ICTAM 上宣读, Toronto (1980).
- [2] 叶开沅、郭建虎, 同上 II. 在任意定常温度场和任意分布载荷下的任意轴对称非均匀变厚度环形板的弯曲. 兰州大学学报(自然科学版), 力学专号, 1 (1979), 75—114.
- [3] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1959).

# Bending Problem of Rectangular Plates of Unidirectional Nonhomogeneity and Variable Thickness with Two Opposite Edges Simply Supported under Arbitrary Distributed Loads

Yeh Kai-yuan    Wang Ying-bang

(Lanzhou University, Lanzhou)

## Abstract

Using the step reduction method<sup>[1,2]</sup> suggested by the first author of this paper, we investigate the problem indicated in the title and obtain the stepped approximate solutions. As an example, the case of a square plate of linearly varying thickness with four edges simply supported under linearly distributed loads is calculated. The obtained results agree well with those given in [3] and thus the exactness of the new method is verified.