应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

两个大气动力学模式整体强解的存在唯一性*

穆　穆

（上海交通大学应用数学系，1985年6月19日收到）

摘　要

文中用能量估计的方法，证明了大气动力学中的基本模式——正压无辐散模式与斜压准地转-准无辐散模式整体强解的存在唯一性，从而推广了作者在文[3]～[5]中所得到的结果并证实了曾庆存在[1]中的一个猜测。

一、引　言

在大气动力学理论中，正压无辐散模式与斜压准地转-准无辐散模式是两个基本的模式（参见[1]，[2]）。当初始场的可微性较好时，作者在[3]～[5]中，对这两个模式的初边值问题，作了比较系统的研究，得到了整体经典解的存在唯一性。随之而来的问题是：当初始流函数场的可微性较差时，这些定解问题的适定性如何？鉴于这两个模式在大气动力学理论中扮演着重要的角色，这是一个在理论与应用上都很令人感兴趣的问题。在本文中，我们将适当地引进"强解"的定义，借助于文[3]～[5]中的结论与方法，在初始流函数场的可微性不够好时，证明了定解问题整体强解的存在唯一性。在所考察的时空区域中，这种强解对应的速度场连续，因而具有明确的物理意义。

我们考察下述三个问题

（Ⅰ）正压无辐散模式 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+\dfrac{1}{a^2}J(\psi,\Delta\psi)+J(\psi,2\omega\cos\theta)=0, \text{ 在 } S^2\times(0,\ +\infty)\text{中} & (1.1)\\ \Delta\psi|_{t=0}=\Delta\psi_0 & (1.2)\end{cases}$$

这里 $S^2=\{(\lambda,\theta)\,|\,0\leqslant\lambda\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 是(R^3 中)单位球面，流函数 $\psi=\psi(\lambda,\theta,t)$ 是自变数(λ,θ,t)的函数，λ 是地球的经度($0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$)，$\theta$ 是地球的余纬度（即取地球北极对应于 $\theta=0$）($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)，$t$ 是时间变量，a 是地球半径，ω 是地球自转角速率。

$$\Delta\equiv\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right);\quad J(F,G)\equiv\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial G}{\partial\lambda}-\frac{\partial F}{\partial\lambda}\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)$$

* 许政范，江福汝推荐。

ψ_0 为初始流函数场。

（Ⅱ）正压无辐散模式半球初边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+\dfrac{1}{a^2}J(\psi,\Delta\psi)+J(\psi,2\omega\cos\theta)=0, \text{在 } S_+^2\times(0,+\infty)\text{中} & (1.3)\\
\psi|_{\theta=\pi/2}=0 & (1.4)\\
\psi|_{t=0}=\psi_0 & (1.5)
\end{cases}
$$

这里 S_+^2 表示南半球或北半球，$\theta=\pi/2$ 表示赤道，其余记号同(Ⅰ)。

（Ⅲ）斜压准地转-准无辐散模式初边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}\widetilde{\mathscr{L}}_g(\psi)+J(\psi,\widetilde{\mathscr{L}}_g(\psi))+J(\psi,2a^2\omega\cos\theta)=0, \text{在 } M\times(0,+\infty)\text{中} & (1.6)\\
\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=0,\ \left(\dfrac{\partial}{\partial\zeta}+\alpha_s\right)\psi|_{\zeta=1}=0 & (1.7)\\
\psi|_{t=0}=\psi_0 & (1.8)
\end{cases}
$$

这里流函数 $\psi=\psi(\lambda,\theta,\zeta,t)$ 是自变数 (λ,θ,ζ,t) 的函数。其中 $(\lambda,\theta)\in S^2$，$\zeta\in[\zeta_0,1]$。$\zeta=1$ 对应于地球表面，$\zeta=\zeta_0$ 对应于某一等压面（不考虑地形的影响），$0<\zeta_0<1$。

$$\widetilde{\mathscr{L}}_g\equiv\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta^2\widetilde{C}^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+\Delta$$

$\widetilde{C}$，α_s 是两个已知正函数，$M=S^2\times[\zeta_0,1]$。其余记号同(Ⅰ)。

注 1　在问题(Ⅱ)中，原应取固壁边界条件 $\partial\psi/\partial\lambda|_{\theta=\pi/2}=0$。但因流函数本身可以相差一个仅与时间 t 有关的函数，所以不妨取齐次边界条件(1.4)。

注 2　关于上述模式定解问题的提法，可参见曾庆存[1]的第一、二、七、十二章中的有关部分。除了个别改动之外，本文沿用了[1]的记号。

在本文中，所有函数为实函数，函数空间为实函数空间。依惯例引入 Sobolev 空间（参见[6]）。对非负整数 k, $1<p<+\infty$。定义 $W^{k,p}(S^2)=\{u|\ u$ 及其直至 k 阶广义导数属于 $L_p(S^2)\}$。类似定义 $W^{k,p}(S_+^2)$，$W^{k,p}(M)$。设 $T>0$，用 $C^0([0,T];W^{k,p}(S^2))$ 表示 $C^\infty(S^2\times[0,T])$ 中函数 u 在范数

$$\|u(t)\|_{C^0([0,T];\,W^{k,p}(S^2))}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{W^{k,p}(S^2)}$$

下的完备化空间。若对 $\forall T>0$，$u\in C^0([0,T];W^{k,p}(S^2))$，则记 $u\in C^0([0,+\infty);W^{k,p}(S^2))$。若 $u,\partial u/\partial t$ 皆属于 $C^0([0,T];W^{k,p}(S^2))$，则记 $u\in C^1([0,T];W^{k,p}(S^2))$。当 $p=2$ 时，简记 $W^{k,2}(S^2)$ 为 $H^k(S^2)$，$C^0([0,+\infty);W^{k,2}(S^2))$ 为 $C^0([0,+\infty);H^k(S^2))$。类似定义空间 $C^0([0,+\infty);W^{k,p}(S_+^2))$，$C^0([0,+\infty);W^{k,p}(M))$，等等。

二、主 要 结 果

我们首先给出

定义2.1　设 $\psi_0\in W^{3,p}(S^2)$，$2<p<+\infty$，$\psi\in C^0([0,+\infty);W^{2,p}(S^2))$，对 $\forall t\geqslant 0$，$\int_{S^2}\psi(t)dS=0$。$\Delta\psi|_{t=0}=\Delta\psi_0$。若存在函数序列 $\{\psi_n\}\subset C^\infty(S^2\times[0,+\infty))$，使得(i)对 $\forall n$，ψ_n 满足(1.1)；对 $\forall n$，$\forall t\geqslant 0$，$\int_{S^2}\psi_n(t)dS=0$。(ii) $\psi_0^n\equiv\psi_n|_{t=0}$ 使得在 $W^{1,p}(S^2)$ 中，$\Delta\psi_0^n\to$

$\Delta\psi_0$。(iii) 对$\forall T>0$，在$C^0([0,T];W^{2,p}(S^2))$中，$\psi_n\to\psi$。这时，称ψ是定解问题(1.1)，(1.2)的强解。

依 Sobolev 嵌入定理（参见[6]），易见强解$\psi\in C^0([0,+\infty);C^1(S^2))$，因而对应的速度场在$S^2\times[0,+\infty)$中连续。

我们指出，将文献[3]～[5]中的有关先验估计稍加修改，即可证明下述引理。

引理2.1 设$\psi\in C^\infty(S^2\times[0,+\infty))$满足(1.1)，(1.2)。对$\forall t\geqslant 0$，$\int_{S^2}\psi(t)dS=0$。又设$2<p<+\infty$，$k\geqslant 4$，这时对$\forall T>0$成立能量估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi(t)\|_{W^{3,p}(S^2)}\leqslant C_3(p,T,\|\psi_0\|_{W^{3,p}(S^2)}) \tag{2.1}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi(t)\|_{W^{k,p}(S^2)}\leqslant C_k(p,T,\|\psi_0\|_{W^{k,p}(S^2)})\qquad k\geqslant 4 \tag{2.2}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi(t)\|_{H^k(S^2)}\leqslant \widetilde{C}_k(T,\|\psi_0\|_{H^k(S^2)})\qquad k\geqslant 4 \tag{2.3}$$

这里$C_i(F_1,\cdots,F_J)$，$\widetilde{C}_i(F_1,\cdots,F_J)$表示仅仅依赖于量$F_1,\cdots,F_J$的常数。

定理2.1 定解问题(1.1)，(1.2)的强解唯一。

证明 设ψ，φ是问题(1.1)，(1.2)的两个强解，则存在两个函数序列$\{\psi_n\}$，$\{\varphi_n\}$，$\psi_n|_{t=0}\equiv\psi_0^n$，$\varphi_n|_{t=0}\equiv\varphi_0^n$满足定义2.1。因为在$W^{1,p}(S^2)$中，$\Delta\psi_0^n\to\Delta\psi_0$；又对$\forall n$，$\int_{S^2}\psi_0^n dS=0$，故依经典的椭圆先验估计与 Peetre 引理，容易证明存在与n无关的常数C，使得

$$\|\psi_0^n\|_{W^{3,p}(S^2)}\leqslant C,\quad \|\varphi_0^n\|_{W^{3,p}(S^2)}\leqslant C$$

利用引理2.1，对$\forall T>0$，存在与n无关的常数C_T，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big(\|\psi_n(t)\|_{W^{3,p}(S^2)}+\|\varphi_n(t)\|_{W^{3,p}(S^2)}+\Big\|\frac{\partial\varphi_n(t)}{\partial t}\Big\|_{W^{2,p}(S^2)}+\Big\|\frac{\partial\psi_n(t)}{\partial t}\Big\|_{W^{2,p}(S^2)}\Big)\leqslant C_T \tag{2.4}$$

因为ψ_n，φ_n满足方程(1.1)，我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta(\psi_n-\varphi_n)+\dfrac{1}{a^2}J(\psi_n,\Delta(\psi_n-\varphi_n)) \\ \quad+\dfrac{1}{a^2}J(\psi_n-\varphi_n,\Delta\varphi_n)+J(\psi_n-\varphi_n,2\omega\cos\theta)=0,\ \text{在 } S^2\times(0,+\infty)\text{中} & (2.5)\\ \Delta(\psi_n-\varphi_n)|_{t=0}=\Delta(\psi_0^n-\varphi_0^n) & (2.6)\end{cases}$$

将(2.5)式两边乘以$|\Delta(\psi_n-\varphi_n)|^{p-2}\Delta(\psi_n-\varphi_n)$，并在$S^2$上积分，得

$$\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S^2}|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)|^p dS\leqslant A(t)+B(t)+D(t) \tag{2.7}$$

其中

$$A(t)=\frac{1}{a^2}\Big|\int_{S^2}J(\psi_n(t),\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t))|\Delta(\psi_n(t)-\varphi_n(t))|^{p-2}\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)dS\Big|$$

$$B(t)=\frac{1}{a^2}\Big|\int_{S^2}J(\psi_n(t)-\varphi_n(t),\Delta\varphi_n(t))|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)|^{p-2}\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)dS\Big|$$

$$D(t)=\frac{1}{a^2}\left|\int_{S^2}J(\psi_n(t)-\varphi_n(t),2\omega\cos\theta)|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)|^{p-2}\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)dS\right|$$

分部积分，得

$$A(t)\leqslant\frac{1}{a^2}\int_{S^2}|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)|^p|\psi_n(t)|_{C^2(S^2)}dS$$

$$\leqslant\frac{1}{a^2}|\psi_n(t)_{C^2(S^2)}\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^p_{L_p(S^2)} \tag{2.8}$$

依Hörlder 不等式，得

$$B(t)\leqslant\frac{1}{a^2}|(\psi_n-\varphi_n)(t)|_{C^1(S^2)}\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^{p-1}_{L_p(S^2)}\|\varphi_n(t)\|_{W^{3,p}(S^2)} \tag{2.9}$$

由 Sobolev 嵌入定理，知$|\psi_n(t)|_{C^2(S^2)}\leqslant C\|\psi_n(t)\|_{W^{3,p}(S^2)}$。

再由(2.4)式，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi_n(t)\|_{C^2(S^2)}\leqslant C_T$$

从(2.7)式出发，利用(2.8)，(2.9)两式，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^p_{L_p(S^2)}\leqslant C_T(\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^p_{L_p(S^2)}$$

$$+|(\psi_n-\varphi_n)(t)|_{C^1(S^2)}\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^{p-1}_{L_p(S^2)}$$

$$+|(\psi_n-\varphi_n)(t)|_{C^1(S^2)}\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^{p-1}_{L_p(S^2)})$$

关于t积分，利用椭圆估计$\|(\psi_n-\varphi_n)(t)\|_{W^{2,p}(S^2)}\leqslant C\|\Delta(\psi_n-\varphi_n)(t)\|_{L_p(S^2)}$，Sobolev 嵌入定理与 Gronwall 不等式，即得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|(\psi_n-\varphi_n)(t)\|^p_{W^{2,p}(S^2)}\leqslant C_T\|\Delta(\psi^0_n-\varphi^0_n)\|^p_{L_p(S^2)}$$

由强解的定义，知在$S^2\times[0,T]$上，$\varphi=\psi$。由T的任意性，定理得证。

定理2.2 设$\psi_0\in W^{3,p}(S^2)$，$2<p<+\infty$，则问题(1.1)，(1.2)的强解存在。

证明 容易作出函数序列$\{\psi_0^n\}\subset C^\infty(S^2)$，使得在$W^{1,p}(S^2)$中，$\Delta\psi_0^n\to\Delta\psi_0$；对$\forall n$，$\int_{S^2}\psi_0^n dS=0$。由[4]中的存在性定理，对$\forall n$，问题(1.1)，(1.2)在初始条件$\Delta\psi_n|_{t=0}=\Delta\psi_0^n$之下存在唯一整体光滑解$\psi_n\in C^\infty(S^2\times[0,+\infty))$。$\psi_n$满足：$\forall t\geqslant 0$，$\int_{S^2}\psi_n(t)dS=0$。由引理2.1并利用方程(1.1)本身，对$\forall T>0$，我们有

$\{\psi_n(t)\}$属于$C^0([0,T];W^{3,p}(S^2))$中某个有界集，$\{\partial\psi_n(t)/\partial t\}$属于$C^0([0,T];W^{2,p}(S^2))$中某个有界集。因此，$\{\psi_n(t)\}$属于$C^0([0,T];W^{2,p}(S^2))$中某个紧集，故存在子列，不妨仍记为$\{\psi_n(t)\}$，使得在$C^0([0,T];W^{2,p}(S^2))$中，$\psi_n(t)\to\psi(t)$。取单调上升数列$\{T_n\}$趋于$+\infty$，用选取对角线序列的办法，再注意到唯一性定理2.1，即得强解定义中的函数序列$\{\psi_n\}$与函数ψ。

推论2.1 若$\psi_0\in W^{4,p}(S^2)$，$2<p<+\infty$，则问题(1.1)，(1.2)的强解$\psi\in C^0([0,+\infty);W^{3,p}(S^2))\cap C^1([0,+\infty);W^{2,p}(S^2))$且$\psi$满足(1.1)，(1.2)式。

证明 事实上，这时在定理2.2的证明中所作出的ψ_0^n满足：在$W^{2,p}(S^2)$中，$\Delta\psi_0^n\to$

$\Delta\psi_0$。由引理2.1，其对应的函数序列$\{\psi_n(t)\}$满足：对$\forall T>0$,

$\{\psi_n(t)\}$属于$C^0([0,T];\ W^{4,p}(S^2))$中某个有界集，

$\{\partial\psi_n(t)/\partial t\}$属于$C^0([0,T];\ W^{3,p}(S^2))$中某个有界集。将$\psi_n$满足的方程(1.1)关于$t$求导一次，容易得到：

$\{\partial^2\psi_n(t)/\partial t^2\}$属于$C^0([0,T];\ W^{2,p}(S^2))$中某个有界集。再用选取收敛子列的办法，可得序列，仍记为$\{\psi_n(t)\}$，使得对$\forall T>0$，在$C^0([0,T];\ W^{3,p}(S^2))\cap C^1([0,T];\ W^{2,p}(S^2))$中，$\psi_n\to\psi$。因$\psi_n$满足方程(1.1)，令$n\to+\infty$，即知$\psi$满足(1.1)，(1.2)式。

推论2.2　设$\psi_0\in H^k(S^2)$，$k=4$，5。这时问题(1.1)，(1.2)的强解$\psi\in C^0([0,+\infty);\ H^{k-1}(S^2))\cap C^1([0,+\infty);\ H^{k-2}(S^2))$且$\psi$满足(1.1)，(1.2)式。

证明　由引理2.1，在定理2.2的证明中作出的函数序列$\{\psi_n(t)\}$满足：对$\forall T>0$。

$\{\partial^j\psi_n(t)/\partial t^j\}$属于$C^0([0,T];\ H^{k-j}(S^2))$中某个有界集，$k=4$，5；$j=0$，1，2。类似于推论2.1的证明，可得所述结论。

曾庆存在[1]第十二章中猜测：当$\psi_0\in H^4(S^2)$时，问题(1.1)，(1.2)的某种“广义解”应该存在且唯一。推论2.2证实了这一猜测。

定义2.2　设$\psi_0\in W^{3,p}(S^2_+)$，$2<p<+\infty$，$\psi_0|_{\theta=\pi/2}=0$。$\psi\in C^0([0,+\infty);\ W^{2,p}(S^2_+))$，$\psi|_{t=0}=\psi_0$。若存在函数序列$\{\psi_n\}\subset C^\infty(S^2_+\times[0,+\infty))$使得 (i) 对$\forall n$，$\psi_n$满足(1.3)，(1.4)式。(ii) 在$W^{3,p}(S^2_+)$中，$\psi_n|_{t=0}\equiv\psi_0^n\to\psi_0$。(iii) 对$\forall T>0$，在$C^0([0,T];\ W^{2,p}(S^2_+))$中，$\psi_n\to\psi$。这时称$\psi$是定解问题(1.3)～(1.5)的强解。

定义2.3　设$\psi_0\in W^{3,p}(M)$，$3<p<+\infty$，$\partial\psi_0/\partial\zeta|_{\zeta=\zeta_0}=0$，$(\partial/\partial\zeta+\alpha_s)\psi_0|_{\zeta=1}=0$。$\psi\in C^0([0,+\infty);\ W^{2,p}(M))$，$\psi|_{t=0}=\psi_0$。若存在$\{\psi_n\}\subset C^\infty(M\times[0,+\infty))$，使得 (i) 对$\forall n$，$\psi_n$满足(1.6)，(1.7)式。(ii) 在$W^{3,p}(M)$中，$\psi_n|_{t=0}\equiv\psi_0^n\to\psi_0$。(iii) 对$\forall T>0$，在$C^0([0,T];\ W^{2,p}(M))$中，$\psi_n\to\psi$。这时，称$\psi$是定解问题(1.6)～(1.7)的强解。

利用文献[3]～[6]中的先验估计，容易证明类似于引理2.1的有关引理。与证明定理2.1，定理2.2相仿，容易得到

定理2.3　定解问题(1.3)～(1.5)与定解问题(1.6)～(1.8)的强解唯一。

定理2.4　设ψ_0满足相容性条件$\psi_0|_{\theta=\pi/2}=0$。(i) 若$\psi_0\in W^{3,p}(S^2_+)$，$2<p<+\infty$，这时问题(1.3)～(1.5)的强解存在。(ii) 若$\psi_0\in W^{4,p}(S^2_+)$，$2<p<+\infty$，这时问题(1.3)～(1.5)存在强解$\psi\in C^0([0,+\infty);\ W^{3,p}(S^2_+))\cap C^1([0,+\infty);\ W^{2,p}(S^2_+))$且$\psi$满足(1.3)～(1.5)式。(iii) 若$\psi_0\in H^k(S^2_+)$，$k=4$，5。这时问题(1.3)～(1.5)存在强解$\psi\in C^0([0,+\infty);\ H^{k-1}(S^2_+))\cap C^1([0,+\infty);\ H^{k-2}(S^2_+))$且$\psi$满足(1.3)～(1.5)式。

定理2.5　设ψ_0满足相容性条件(1.7)式。(i) 若$\psi_0\in W^{3,p}(M)$，$3<p<+\infty$，这时问题(1.6)～(1.8)存在强解。(ii)若$\psi_0\in W^{4,p}(M)$，$3<p<+\infty$，这时问题(1.6)～(1.8)存在强解$\psi\in C^0([0,+\infty);\ W^{3,p}(M))\cap C^1([0,+\infty);\ W^{2,p}(M))$且$\psi$满足(1.6)～(1.8)式。(iii) 若$\psi_0\in H^k(M)$，$k=4$，5，这时问题(1.6)～(1.8)存在强解$\psi\in C^0([0,+\infty);\ H^{k-1}(M))\cap C^1([0,+\infty);\ H^{k-2}(M))$且$\psi$满足(1.6)～(1.8)式。

本文是作者在导师谷超豪教授、李大潜教授指导下工作的部分结果。作者与中国科学院大气物理研究所曾庆存研究员就该问题作了有益的探讨，得到了他的热情鼓励与指教，于此作者向他们一并表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] 曾庆存，《数值天气预报的数学物理基础》，第一卷，科学出版社，北京 (1979).
[2] Holton, J. R., *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, Inc.(1972).
[3] 穆穆，非线性涡度方程初边值问题的整体光滑解及其应用，数学物理学报（待发表）.
[4] 穆穆，非线性涡度方程 Cauchy 问题的整体光滑解及其应用，投 数学年刊.
[5] 穆穆，非线性涡度方程的若干定解问题，复旦大学博士学位论文 (1985).
[6] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press (1975).
[7] Triebel, H., *Interpolation Theory*, *Function Space*, *Differential Operators*, North-Holland Publishing Company (1978).

Existence and Uniqueness of Global Strong Solutions of Two Models in Atmospheric Dynamics

Mu Mu

(Department of Applied Mathematics of Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Abstract

In this paper, the author proves by the methods of energy estimates the existence and uniqueness of global strong solutions of barotropic nondivergent model and baroclinic quasi-geostrophic quasi-nondivergent model. The two models are fundamental ones in atmospheric dynamics. The results here generalize the outcome given by the author in [3]—[5] and verify a conjecture posed by Zeng Qing-cun in[1].