应用数学和力学，第7卷第10期（1986年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

再论在一集中载荷作用下悬臂矩形板的弯曲*

朱雁滨　　付宝连

（东北重型机械学院，1985年2月28日收到）

摘　　要

在本文中，我们应用功的互等定理[1]进一步研究了在一集中载荷作用下悬臂矩形板的弯曲问题．该法更为简单和通用．

一、引　　言

对于悬臂矩形板，文献[2，3，4，5]应用广义简支边的概念和叠加原理，研究了集中载荷分别作用在自由边的中点或任意一点，作用在该板的中点和作用在固定边中垂线上任意一点的弯曲问题．

现在，我们应用功的互等定理，进一步研究在该板上任意一点作用一集中载荷悬臂矩形板的弯曲问题，而文献[2，3，4，5]的每一结果都可视为本解的特例，而且本计算过程很是简单．

二、在一集中载荷作用下悬臂矩形板的挠曲面方程

我们假设，一集中载荷P作用于悬臂矩形板上的任意一点(x_0, y_0)，如图1(b)所示．解

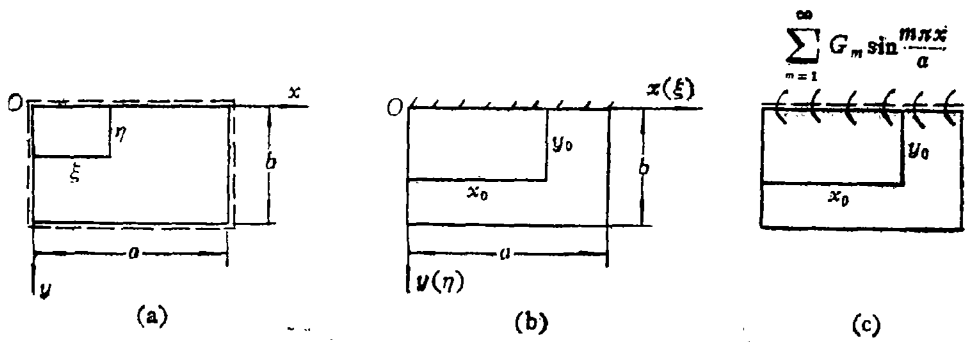

图　1

* 钱伟长推荐．

除固定边的弯曲约束，这一约束被分布弯矩

$$M(x)_{y=0}=\sum_{m=1}^{\infty}G_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

所代替，如图1(c)所示。假设三个自由边的挠度方程分别为

$$W(y)_{x=0}=k_1\frac{y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$W(y)_{x=a}=k_2\frac{y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$W(x)_{y=b}=k_1+\frac{k_2-k_1}{a}x+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

并且在图1(a)所示基本系统与图1(c)所示实际系统之间应用功的互等定理，则我们得到做为实际系统的悬臂矩形板的挠曲面方程为如下形式

$$\begin{aligned}W(\xi,\ \eta)=&PW_0(x_0,y_0;\xi,\eta)+\int_0^a\left(\frac{\partial W_0}{\partial y}\right)_{y=0}\sum_{m=1}^{\infty}G_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx\\&-\int_0^a(V_{0y})_{y=b}\left(k_1+\frac{k_2-k_1}{a}x+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{a}\right)dx\\&-\int_0^b(V_{0x})_{x=a}\left(k_2\frac{y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)dy\\&+\int_0^b(V_{0x})_{x=0}\left(k_1\frac{y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)dy\\&+(R_0)_{\substack{x=a\\y=b}}k_2-(R_0)_{\substack{x=0\\y=b}}k_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

将式(2.1)稍加整理，我们得到

$$\begin{aligned}W(\xi,\ \eta)=&PW_0(x_0,\ y_0;\ \xi,\ \eta)+\int_0^a\left(\frac{\partial W_0}{\partial y}\right)_{y=0}\sum_{m=1}^{\infty}G_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx\\&-\int_0^a(V_{0y})_{y=b}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx-\int_0^b(V_{0x})_{x=a}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\sin\frac{n\pi y}{b}dy\\&+\int_0^b(V_{0x})_{x=0}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\sin\frac{n\pi y}{b}dy+\left[-\int_0^a(V_{0y})_{y=b}\left(k_1+\frac{k_2-k_1}{a}x\right)dx\right.\end{aligned}$$

$$-\int_0^b (V_{0x})_{x=a} k_2 \frac{y}{b} dy + \int_0^b (V_{0x})_{x=0} k_1 \frac{y}{b} dy + (R_0)_{\substack{x=a\\y=b}} k_2 - (R_0)_{\substack{x=0\\y=b}} k_1 \Big] \tag{2.2}$$

方程(2.2)右端相应六项分别以$W_1, W_2, \cdots$和W_6表示，于是我们得到

$$W(\xi,\ \eta)=W_1+W_2+W_3+W_4+W_5+W_6 \tag{2.3}$$

注意到文献[1]中式(4.5)，则$W_1=PW_0(x_0,\ y_0;\ \xi,\ \eta)$成为

$$W_1=\frac{Pa^2}{\pi^3 D}\sum_{m=1}^{\infty}\Big[1+\beta_m \operatorname{cth}\beta_m-\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}\operatorname{cth}\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}-\frac{\beta_m\eta}{b}\operatorname{cth}\frac{\beta_m\eta}{b}\Big]$$

$$\cdot\frac{1}{m^3 \operatorname{sh}\beta_m}\operatorname{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}\operatorname{sh}\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{2.4a}$$

这里$\beta_m=m\pi b/a$，$\eta\leqslant y_0$。

当$\eta\geqslant y_0$时，在应用式(2.4a)时，$b-y_0$必须以y_0代替，η以$b-\eta$代替。

注意到文献[1]中式(4.6)，$W_1=PW_0(x_0,\ y_0;\ \xi,\ \eta)$还可以写成另一种形式

$$W_1=\frac{Pb^2}{\pi^3 D}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[1+\alpha_n \operatorname{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\operatorname{cth}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}-\frac{\alpha_n\xi}{a}\operatorname{cth}\frac{\alpha_n\xi}{a}\Big]$$

$$\cdot\frac{1}{n^3 \operatorname{sh}\alpha_n}\operatorname{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}\operatorname{sh}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{2.4b}$$

这里　$\alpha_n=n\pi a/b$，$\xi\leqslant x_0$。

当$\xi\geqslant x_0$时，在应用式(2.4b)时，$a-x_0$必须以x_0代替，ξ以$a-\xi$代替。

注意到文献[1]中式(4.7)，我们得到

$$W_2=\int_0^a\Big(\frac{\partial W_0}{\partial y}\Big)_{y=0}\sum_{m=1}^{\infty}G_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$=\frac{a^2}{2\pi^2 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{m^2}\Big[-\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\operatorname{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}+\operatorname{cth}\beta_m\cdot\Big(\frac{\beta_m\eta}{b}\Big)\operatorname{ch}\frac{\beta_m\eta}{b}$$

$$-\frac{\beta_m\eta}{b}\operatorname{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}\Big]\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{2.5}$$

注意到文献[1]中式(4.8a)，我们得到

$$W_3=-\int_0^a (V_{0y})_{y=b}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$=\frac{1-\nu}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{\operatorname{sh}\beta_m}\Big[\Big(\frac{2}{1-\nu}+\beta_m\operatorname{cth}\beta_m\Big)\operatorname{sh}\frac{\beta_m\eta}{b}$$

$$-\frac{\beta_m\eta}{b}\operatorname{ch}\frac{\beta_m\eta}{b}\Big]\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{2.6}$$

注意到文献[1]中式(4.9a)，我们分别得到

$$W_4=-\int_0^b (V_{0x})_{x=a}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$= \frac{1-\nu}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{2n}}{\operatorname{sh}\alpha_n}\left[\left(\frac{2}{1-\nu}+\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\right)\operatorname{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}-\frac{\alpha_n\xi}{a}\operatorname{ch}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right]\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{2.7}$$

和

$$W_5=\int_0^b (V_{0x})_{x=0}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$=\frac{1-\nu}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\left[\frac{2}{1-\nu}\operatorname{ch}\frac{\alpha_n\xi}{a}-\left(\frac{2}{1-\nu}\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\right)\operatorname{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right.$$

$$\left.+\operatorname{cth}\alpha_n\cdot\left(\frac{\alpha_n\xi}{a}\right)\operatorname{ch}\frac{\alpha_n\xi}{a}-\frac{\alpha_n\xi}{a}\operatorname{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right]\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{2.8}$$

注意到文献[1]中式(4.8b)和(4.9b)，并据式(4.1)求出$(R_0)_{\substack{x=a\\y=b}}$和$(R_0)_{\substack{x=0\\y=b}}$的值，最后我们得到

$$W_6=-\int_0^a (V_{0y})_{y=b}\left(k_1+\frac{k_2-k_1}{a}x\right)dx-\int_0^b (V_{0x})_{x=a}k_2\frac{y}{b}dy$$

$$+\int_0^b (V_{0x})_{x=0}k_1\frac{y}{b}dy+(R_0)_{\substack{x=a\\y=b}}k_2-(R_0)_{\substack{x=0\\y=b}}k_1$$

$$=\frac{k_1}{b}\eta+\frac{k_2-k_1}{ab}\xi\eta \tag{2.9}$$

将式(2.4)～(2.9)代入(2.3)，我们便得到悬臂矩形板的挠曲面的一般方程。

三、满 足 边 界 条 件

当集中载荷不作用在板的边缘上时，挠曲面方程(2.3)必须满足下述边界条件

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=0,\qquad \left[\frac{\partial^3 W}{\partial\eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial\eta\partial\xi^2}\right]_{\eta=b}=0 \tag{3.1a,b}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial\xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial\xi\partial\eta^2}\right]_{\xi=0,a}=0,\qquad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=0,a\\ \eta=b,b}}=0 \tag{3.1c,d}$$

$$W_{\eta=0}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}\right)_{\eta=b}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right)_{\xi=0,a}=0 \tag{3.2}$$

由于挠曲面方程式(2.3)已预先满足边界条件(3.2)，故它只需满足边界条件(3.1a,b,c,d)。为了满足这些边界条件，我们必须做一系列下述相应的计算，并且将一部分相应量表达式的双曲线函数展成三角级数。

1．**考察W_1式**

由式(2.4a)，我们得到

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{Pb}{\pi D}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\operatorname{cth}\beta_m-\frac{b-y_0}{b}\operatorname{cth}\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{m\,\mathrm{sh}\,\beta_m}\,\mathrm{sh}\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.3}$$

注意到$\eta>y_0$，由式(2.4a)，我们得到

$$\left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial\eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_1}{\partial\eta\partial\xi^2}\right]_{\eta=b}=\frac{P}{Da}\sum_{m=1}^{\infty}\Big[2+(1-\nu)\beta_m\,\mathrm{cth}\,\beta_m$$
$$-(1-\nu)\frac{\beta_m y_0}{b}\,\mathrm{cth}\frac{\beta_m y_0}{b}\Big]\frac{1}{\mathrm{sh}\,\beta_m}\,\mathrm{sh}\frac{\beta_m y_0}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.4}$$

由式(2.4b)，我们分别得到

$$\left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial\xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_1}{\partial\xi\partial\eta^2}\right]_{\xi=0}=-\frac{P}{Db}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[2+(1-\nu)\alpha_n\,\mathrm{cth}\alpha_n$$
$$-(1-\nu)\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\Big]\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_n}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}$$
$$\cdot\sin\frac{n\pi y_0}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.5}$$

和

$$\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=b}}=\frac{Pa}{Db}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{cth}\,\alpha_n-\frac{a-x_0}{a}\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\right]$$
$$\cdot\frac{\cos n\pi}{\mathrm{sh}\,\alpha_n}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b} \tag{3.6}$$

注意到$\xi>x_0$，由式(2.4b)，我们得到

$$\left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial\xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_1}{\partial\xi\partial\eta^2}\right]_{\xi=a}=\frac{P}{Db}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[2+(1-\nu)\alpha_n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n$$
$$-(1-\nu)\frac{\alpha_n x_0}{a}\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_n x_0}{a}\Big]\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_n}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha_n x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=-\frac{Pa}{Db}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{cth}\,\alpha_n-\frac{x_0}{a}\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_n x_0}{a}\right)$$
$$\cdot\frac{\cos n\pi}{\mathrm{sh}\,\alpha_n}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha_n x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b} \tag{3.8}$$

2. **考察W_2式**

由式(2.5)，我们得到

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{a}{2\pi D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{m}\left(\mathrm{cth}\,\beta_m-\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\right)\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.9}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta \partial \xi^2}\right]_{\eta=b}=(1+\nu)\frac{\pi}{2Da}\sum_{m=1}^{\infty} G_m \frac{m}{\operatorname{sh}\beta_m}$$

$$\cdot\left(1+\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta_m \operatorname{cth}\beta_m\right)\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.10}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi \partial \eta^2}\right]_{\xi=0}=-\frac{2}{Da}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} G_m \frac{n}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\nu)\frac{n^2}{m^2}\right]\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.11}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi \partial \eta^2}\right]_{\xi=a}=-\frac{2}{Da}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_m n\cos n\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}$$

$$\cdot\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\nu)\frac{n^2}{m^2}\right]\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi \partial \eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=b}}=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{\operatorname{sh}\beta_m}(\beta_m \operatorname{cth}\beta_m-1) \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi \partial \eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=-\frac{1}{2D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{\operatorname{sh}\beta_m}(\beta_m \operatorname{cth}\beta_m-1)\cos m\pi \tag{3.14}$$

3．考察W_3式

由式(2.6)，我们得到

$$\left(\frac{\partial W_3}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=\frac{(1-\nu)\pi}{2a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mB_m}{\operatorname{sh}\beta_m}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\beta_m \operatorname{cth}\beta_m\right)\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.15}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_3}{\partial \eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_3}{\partial \eta \partial \xi^2}\right]_{\eta=b}=-(1-\nu)^2\frac{\pi^3}{2a^3}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m m^3$$

$$\cdot\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right)\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.16}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi \partial \eta^2}\right]_{\xi=0}=(1-\nu)^2\frac{2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_m n^3\cdot\cos n\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.17}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi \partial \eta^2}\right]_{\xi=a}=(1-\nu)^2\frac{2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_m n^3\cos m\pi\cos n\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.18}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_3}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=b}}=(1-\nu)\frac{\pi^2}{2a^2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m m^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right) \tag{3.19}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_3}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=(1-\nu)\frac{\pi^2}{2a^2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m m^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right)\cos m\pi \tag{3.20}$$

4．考察 W_4 式

由式(2.7)，我们得到

$$\left(\frac{\partial W_4}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{2n}\frac{m\cos m\pi}{n\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}\cdot\left[(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right]\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.21}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_4}{\partial\eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_4}{\partial\eta\partial\xi^2}\right]_{\eta=b}=(1-\nu)^2\frac{2\pi^2}{b^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{2n}\frac{m^3\cos m\pi\cos n\pi}{n\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.22}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_4}{\partial\xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_4}{\partial\xi\partial\eta^2}\right]_{\xi=0}=-(1-\nu)^2\frac{\pi^3}{2b^3}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\frac{n^3}{\operatorname{sh}\alpha_n}\cdot\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\right)\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.23}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_4}{\partial\xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_4}{\partial\xi\partial\eta^2}\right]_{\xi=a}=-(1-\nu)^2\frac{\pi^3}{2b^3}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}n^3\cdot\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\right)\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.24}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_4}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=b}}=(1-\nu)\frac{\pi^2}{2b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\frac{n^2}{\operatorname{sh}\alpha_n}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\right)\cos n\pi \tag{3.25}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_4}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=(1-\nu)\frac{\pi^2}{2b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}n^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\right)\cos n\pi \tag{3.26}$$

5．考察 W_5 式

由式(2.8)，我们得到

$$\left(\frac{\partial W_5}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{1n}\frac{m}{n\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}\left[(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right]\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.27}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_5}{\partial \eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_5}{\partial \eta\partial \xi^2}\right]_{\eta=b}=-(1-\nu)^2\frac{2\pi^2}{b^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{1n}$$

$$\cdot\frac{m^3\cos n\pi}{n\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.28}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_5}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_5}{\partial \xi\partial \eta^2}\right]_{\xi=0}=(1-\nu)^2\frac{\pi^3}{2b^3}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}n^3$$

$$\cdot\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\right)\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.29}$$

$$\left[\frac{\partial^3 W_5}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W_5}{\partial \xi\partial \eta^2}\right]_{\xi=a}=(1-\nu)^2\frac{\pi^3}{2b^3}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\frac{n^3}{\operatorname{sh}\alpha_n}$$

$$\cdot\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\right)\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.30}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_5}{\partial \xi\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=b}}=-(1-\nu)\frac{\pi^2}{2b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}n^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\right)\cos n\pi \tag{3.31}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_5}{\partial \xi\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=-(1-\nu)\frac{\pi^2}{2b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\frac{n^2}{\operatorname{sh}\alpha_n}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\right)\cos n\pi \tag{3.32}$$

6．考察W_6式

由式(2.9)，我们得到

$$\left(\frac{\partial W_6}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=\frac{k_1}{b}+\frac{k_2-k_1}{ab}\xi=\frac{2}{\pi b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(k_1-k_2\cos m\pi)\sin\frac{m\pi\xi}{a} \tag{3.33}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_6}{\partial \xi\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=0\\ \eta=b}}=\left(\frac{\partial^2 W_6}{\partial \xi\partial \eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=\frac{k_2-k_1}{ab} \tag{3.34}$$

7．考察边界条件

为了满足边界条件(3.1a)，将式(3.3)，(3.9)，(3.15)，(3.21)，(3.27)和(3.33)相加，并使这一和值为零，则我们得到

$$\frac{G_m a^2}{4\pi^2 D m^2}\left(\operatorname{cth}\beta_m-\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right)+\frac{B_m(1-\nu)}{4\operatorname{sh}\beta_m}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\beta_m\operatorname{cth}\beta_m\right)$$

$$+\frac{a}{\pi b}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}-A_{2n}\cos m\pi)\frac{1}{n\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}\left[(2-\nu)\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right]$$

$$+\frac{a}{\pi^2 b}\frac{1}{m^2}(k_1-k_2\cos m\pi)+\frac{abP}{2\pi^2 D}\left[\operatorname{cth}\beta_m-\frac{b-y_0}{b}\operatorname{cth}\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{m^2\operatorname{sh}\beta_m}\operatorname{sh}\frac{\beta_m(b-y_0)}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}=0\qquad(m=1,2,3,\cdots)\tag{3.35}$$

为了满足边界条件(3.1b)，将式(3.4)，(3.10)，(3.16)，(3.22)和(3.28)相加，并使这一和值为零，则我们得到

$$\frac{G_m(1+\nu)a^2}{2\pi D}\frac{1}{m^2\operatorname{sh}\beta_m}\left(1+\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta_m\operatorname{cth}\beta_m\right)$$

$$-\frac{\pi}{2}(1-\nu)^2B_m\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right)$$

$$-2(1-\nu)^2\frac{a^3}{b^3}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}-A_{2n}\cos m\pi)\frac{\cos n\pi}{n\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}$$

$$+\frac{Pa^2}{\pi^2 D}\frac{1}{m^3}\left[2+(1-\nu)\beta_m\operatorname{cth}\beta_m-(1-\nu)\frac{\beta_m y_0}{b}\operatorname{cth}\frac{\beta_m y_0}{b}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_m}\operatorname{sh}\frac{\beta_m y_0}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}=0\qquad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\tag{3.36}$$

为了满足边界条件(3.1c)，将式(3.5)，(3.11)，(3.17)，(3.23)和(3.29)相加；将式(3.7)，(3.12)，(3.18)，(3.24)和(3.30)相加，并使它们的和值分别为零，则我们分别得到

$$\frac{a^2}{\pi^2 D n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\nu)\frac{n^2}{m^2}\right]$$

$$-(1-\nu)^2\cos n\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}$$

$$-\frac{\pi}{4}(1-\nu)^2\frac{a^3}{b^3}A_{1n}\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\operatorname{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\right)$$

$$+\frac{\pi}{4}(1-\nu)^2\frac{a^3}{b^3}A_{2n}\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n\right)\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}$$

$$+\frac{Pa^3}{2\pi^2 Db}\frac{1}{n^3}\left[2+(1-\nu)\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n-(1-\nu)\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{cth}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\right]\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}\operatorname{sh}\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}=0$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\tag{3.37}$$

和

$$\frac{a^2}{\pi^2 D n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m\cos m\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}\left[\frac{b^2}{a^2}+(2-\nu)\frac{n^2}{m^2}\right]$$

$$-(1-\nu)^2\cos n\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m\cos m\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}$$

$$-\frac{\pi}{4}(1-\nu)^2\frac{a^3}{b^3}A_{1n}\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n\right)\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_n}$$

$$+\frac{\pi}{4}(1-\nu)^2\frac{a^3}{b^3}A_{2n}\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\,\mathrm{cth}\,\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\right)$$

$$-\frac{Pa^3}{2\pi^2Db}\frac{1}{n^3}\left[2+(1-\nu)\alpha_n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n-(1-\nu)\frac{\alpha_n x_0}{a}\,\mathrm{cth}\,\frac{\alpha_n x_0}{a}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_n}\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha_n x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}=0\qquad(n=1,2,3,\cdots)\tag{3.38}$$

为了满足边界条件(3.1d)，将式(3.6)，(3.13)，(3.19)，(3.25)，(3.31)和(3.34)相加；将式(3.8)，(3.14)，(3.20)，(3.26)，(3.32)和(3.34)相加，并使它们的和值分别为零，则我们分别得到

$$\frac{a^2}{\pi^2D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{\mathrm{sh}\,\beta_m}(\beta_m\mathrm{cth}\beta_m-1)-(1-\nu)\sum_{m=1}^{\infty}B_m m^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\mathrm{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\right)$$

$$+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}n^2\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\mathrm{cth}\,\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\right)\cos n\pi$$

$$-(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}\frac{n^2}{\mathrm{sh}\alpha_n}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n\right)\cos n\pi$$

$$-\frac{2}{\pi^2}\frac{a}{b}(k_2-k_1)-\frac{2P}{\pi^2D}\frac{a^3}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\mathrm{cth}\,\alpha_n$$

$$-\frac{a-x_0}{a}\,\mathrm{cth}\,\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\Big]\frac{\cos n\pi}{\mathrm{sh}\,\alpha_n}\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha_n(a-x_0)}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}=0\tag{3.39}$$

和

$$\frac{a^2}{\pi^2D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_m}{\mathrm{sh}\beta_m}(\beta_m\mathrm{cth}\beta_m-1)\cos m\pi-(1-\nu)\sum_{m=1}^{\infty}B_m m^2$$

$$\cdot\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\mathrm{cth}\beta_m+\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\right)\cos m\pi+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\frac{n^2}{\mathrm{sh}\alpha_n}$$

$$\cdot\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\alpha_n\,\mathrm{cth}\,\alpha_n\right)\cos n\pi-(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n}n^2$$

$$\cdot\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\mathrm{cth}\alpha_n+\frac{\alpha_n}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\right)\cos n\pi-\frac{2}{\pi^2}\frac{a}{b}(k_2-k_1)$$

$$+\frac{2P}{\pi^2 D}\frac{a^3}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{cth}\alpha_n-\frac{x_0}{a}\operatorname{cth}\frac{\alpha_n x_0}{a}\right)\frac{\cos n\pi}{\operatorname{sh}\alpha_n}$$

$$\cdot\operatorname{sh}\frac{\alpha_n x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}=0 \tag{3.40}$$

至此，我们得到一无穷线性联立方程组(3.35)～(3.38)和二个独立的线性方程(3.39)，(3.40)．据这些方程组，我们能够计算诸系数G_m，B_m，A_{1n}，A_{2n}，k_1和k_2，进而能够分别算出挠度，内矩分量，内力分量和内应力分量。需再次强调指出，对于方程(2.3)，存在着与式(2.4a,b)相应的四种不同形式的表达式，因而我们必须充分注意到，每一种表达形式必须适合各自的定义域。

四、讨 论

对于给定的具体问题，作用于悬臂矩形板上的集中载荷P的作用点(x_0，y_0)是已知的，因而问题是可解的。现在让我们来研究几种集中载荷P的特殊作用点。从前述的研究中我们知道，只是在一般方程(2.3)中的W_1式与作用点(x_0,y_0)有关，而其它的表达式与其无关。

1．当集中载荷P作用于板的中点时，将$x_0=a/2$和$y_0=b/2$代入式(2.4a或2.4b)中，则得到相应的表达式W_1。注意到问题的对称性，有$A_{1n}=A_{2n}$，$k_1=k_2$，进而由一般方程(2.3)所获得的一系列结果与文献[4]的相同。

2．当集中载荷作用于该板固定边中垂线上任意一点时，将$x_0=a/2$代入式(2.4b)中，则得W_1式的相应表达式，进而由一般方程(2.3)所获得的一系列结果与文献[5]的相同。

3．当集中载荷作用于该板边缘$y_0=b$上任意一点时，从方程(2.4a或2.4b)可知，式W_1消失，而边界条件(3.1b)成为

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial\eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial\eta\partial\xi^2}\right]_{\eta=b}=-\frac{2P}{Da}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}$$

这里x_0是从作用于$y_0=b$边缘上的集中载荷的作用点到y轴的长度。在这种情况下，表达式(3.35)～(3.40)中左端含有P的项全部消失，只有式(3.36)中右端项不为零，而为

$$-\frac{2Pa^2}{D\pi^2}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi x_0}{a}$$

当集中载荷作用于$y_0=b$边缘中点$x_0=a/2$时，注意到问题的对称性，我们所得到的结果与文献[2]的相同；当$x_0=3a/4$时，我们所得到的结果就与文献[3]的相同。

上述讨论易于推广到集中载荷作用于$x_0=0$或$x_0=a$边缘上任意一点的情况。

4．当集中载荷作用于一自由角点时，如$x_0=a$，$y_0=b$，则式W_1消失，而相应于式(3.1d)的边界条件成为

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\substack{\xi=a\\ \eta=b}}=\frac{P}{2(1-\nu)D}$$

在这种情况下，式(3.35)～(3.40)左端含P的诸项全部消失，只有式(3.40)的右端项不为零，而为

$$-\frac{1}{1-\nu}\frac{Pa^2}{D\pi^2}$$

这样，文献[2,3,4,5]的全部结果都可视为我们前述工作的特例。

五、结 论

1．前述方法表明，矩形板的弯曲问题能够用基于功的互等定理所给定的程序来求解，因而这一方法易于掌握。

2．由于我们以已被求解的受单位集中载荷的简支矩形板为一基本系统，因而本法比较简单。

3．本法可用于求解在复杂载荷作用下具有复杂边界条件的矩形板的弯曲问题，因而是通用的。

我们认为，本法是求解矩形板的弯曲问题的有效方法。

参 考 文 献

[1] 付宝连，应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程，应用数学和力学，**3**，3 (1982).
[2] 张福范，悬臂矩形板的弯曲，清华大学学报，**19**，2 (1979).
[3] 张福范，悬臂矩形板的不对称弯曲，固体力学学报，2 (1980).
[4] 张福范，在不连续载荷作用下的悬臂矩形板的弯曲，应用数学和力学，**2**，4 (1981).
[5] 林鹏程，在集中载荷作用下悬臂矩形板的弯曲，应用数学和力学，**3**，2 (1982).
[6] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社 (1956).
[7] 张福范，《弹性薄板》，科学出版社 (1963).

Further Research on the Bending of the Cantilever Rectangular Plates under a Concentrated Load

Zhu Yan-bin Fu Bao-lian

(Northeast Heavy Machinery Institute, Heilongjiang)

Abstract

In this paper we apply the reciprocal theorem[1] to further research on the bending problem of the cantilever rectangular plates under a concentrated load acting at any of its points. This method is even simpler and more general.