

文章编号: 1000-0887(2004)09-0951-07

# 压应力状态下细观非均匀性岩石的 损伤局部化和应力应变关系分析\*

周小平<sup>1,2</sup>, 张永兴<sup>1</sup>, 哈秋聆<sup>1</sup>, 王建华<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045;

2. 上海交通大学 建筑工程与力学学院, 上海 200030)

(谢和平、陈山林推荐)

**摘要:** 利用摩擦弯折裂纹模型研究了受压条件下细观非均匀性岩石的损伤局部化问题和全过程应力应变关系。模型考虑了裂纹相互作用对损伤局部化和全过程应力应变关系的影响, 确定了损伤局部化发生的条件, 分析了产生损伤局部化的原因。研究表明全过程应力应变关系包括线弹性阶段、非线性强化阶段、应力降和应变软化阶段。通过和实验对比分析验证了模型的正确性和有效性。

**关键词:** 压应力; 细观非均匀性岩石; 全过程应力应变关系; 损伤局部化

**中图分类号:** TU45      **文献标识码:** A

## 引 言

在分析岩石结构的损伤以及对岩体工程进行支护设计时, 压应力作用下岩石的强度和本构关系的确定是非常重要的。为此人们进行了大量的基础理论研究, 并取得了许多有实用价值的成果, 形成了唯象学法和细观力学方法等的应力应变关系描述方法。

1) 唯象学方法<sup>[1,2]</sup>。基于连续损伤力学方法的唯象学模型是采用一个标量、矢量或张量的方法定义损伤变量, 然后通过损伤变量建立材料的宏观本构模型。但是该方法的最大缺点是究竟用多少参数来描述一点的损伤状态仍然没有解决, 且如何确定损伤参数的演化规律还存在很大问题。

2) 细观力学方法<sup>[3~8]</sup>。细观力学方法是利用损伤断裂力学方法描述微裂纹的成核、扩展和汇合, 并通过微裂纹的成核、扩展和汇合反映材料的宏观力学性能的变化。为了研究材料的力学特性, 许多细观力学模型被建立, 在这些模型中, 摩擦裂纹模型是应用最为广泛的模型<sup>[4~8]</sup>。为此本文利用摩擦弯折裂纹模型探讨单轴压缩和低围压的三轴压缩条件下岩石的应变和损伤局部化问题和全过程应力应变关系。为了验证模型的正确性, 本文将理论结果和 Okubo 等<sup>[9]</sup>获得的稻田花岗岩实验结果作对比分析。

\* 收稿日期: 2002\_11\_15; 修订日期: 2004\_03\_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59879012, 59649008)

作者简介: 周小平(1970—), 男, 江西瑞金人, 博士, 副教授(联系人, Tel: + 86\_23\_65405987; Fax: + 86\_23\_65121982; E\_mail: zhouxiaoping@ sina. com)。



非弹性余能的增量可以表示为

$$d^i \phi = \frac{\partial(\Delta \phi(\sigma, b_1))}{\partial b_1} db_1 = \frac{2c}{A_0} \tau'_{i2} db_1 \quad (11)$$

根据式(3)和(11)可得方位角为  $(\theta_y, \theta_f)$  的裂纹因发生摩擦滑动而产生的非弹性应变增量为

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_{11}^m \\ d\varepsilon_{22}^m \end{pmatrix} = \rho^2 \int_{\theta_{yf}}^{\theta_f} p(\theta) \begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} db_1 d\theta \quad (12)$$

其中  $b_1 = b_1/c$ ,  $\rho = N/A_0$ ,  $N$  为岩石中的裂纹总数,  $A_0$  为代表性单元面积,  $p(\theta)$  为裂纹方位角的分布概率密度函数,  $\theta_{yf}$  和  $\theta_f$  可以由式(5)和(6)确定。

这一阶段总的应变增量可以表示为:

$$d\varepsilon_j = d\varepsilon_{ij}^0 + d\varepsilon_{ij}^m \quad (13)$$

### 1.2 压应力作用下微裂纹发生弯折扩展

当继续加载时, 实验观测到裂纹将发生弯折扩展<sup>[4-8, 11]</sup>。这些弯折裂纹的扩展方向最终和最大主压应力的方向一致(图2)。

发生弯折扩展的应力条件为

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}K_{Icc}}{2F(\theta)\sqrt{\pi c}} + \left[ -1 + \frac{\mu}{F(\theta)} \right] \sigma_1 + \frac{\tau_c}{F(\theta)} \quad (14)$$

其中  $F(\theta) = -\sin\theta\cos\theta + \mu\cos^2\theta$ ,  $K_{Icc}$  为岩石的断裂韧性。

在裂纹扩展的初期, 裂纹间的相互作用很小, 可以忽略不计, 此时原生裂纹发生摩擦弯折扩展可以等效为如图2所示的裂纹, 其尖端的应力强度因子为<sup>[8]</sup>

$$K_I = \frac{F\cos\theta}{\sqrt{\pi l}} - \sigma_1 \sqrt{\pi l} \quad (15a)$$

$$K_{II} = \frac{F\sin\theta}{\sqrt{\pi l}} \quad (15b)$$

其中  $F = 2c\tau_{eff}$

根据  $QPP_1Q_1$  上的平衡条件和 Mohr-Coulomb 准则, 可得作用在原生裂纹  $PP_1$  上的平衡力为

$$\tau_{eff1} = \tau_{eff} - \sigma_1 l \cos\theta \quad (16)$$

发生弯折扩展后, 原生裂纹的平均张开位移为

$$b_3 = \frac{\pi c_b(1-\nu_0^2)}{E_0} \tau_{eff} - \sigma_1 l \cos\theta \quad (17)$$

### 1.3 裂纹扩展准则

裂纹扩展准则为

$$K_I = K_{Icc} \quad (18)$$

式中:  $K_I$  是 I 型应力强度因子,  $K_{Icc}$  是岩石的断裂韧度。

这一阶段的非弹性余能可以表达为

$$\Delta \phi(\sigma, H) = \frac{2c}{A_0} \int_0^3 \tau'_{i2}(\sigma, b) db + \frac{2}{A_0} \int_0^l G(\sigma, l) dl \quad (19)$$

其中  $\tau'_{i2} = \tau'_{i2} - \sigma_1 l_1 \cos\theta$ ,  $G(\sigma, l) = (K_I^2 + K_{II}^2)(1-\nu_0^2)/E_0$ ,  $K_I$  和  $K_{II}$  由式(15)确定。

非弹性余能的增量可以表达为

$$d^i \phi = \frac{\partial \Delta \phi}{\partial b_3} db_3 + \frac{\partial \Delta \phi}{\partial l_1} dl_1 = \frac{1}{A_0} (2c\tau'_{i2} db_3 + 2G dl_1) \quad (20)$$

根据式(3)和(20)可得方位角为  $(\theta_{1PP}, \theta_{2PP})$  的裂纹发生弯折扩展而产生的非弹性应变增量为

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_{11}^{n2} \\ d\epsilon_{22}^{n2} \end{pmatrix} = \rho c^2 \int_{\theta_{1PP}}^{\theta_{2PP}} P(\theta) \begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} db_3 d\theta + \rho c^2 \int_{\theta_{1PP}}^{\theta_{2PP}} P(\theta) \begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \left[ l_1 db_3 + \frac{4(1-\nu_0^2)}{E_0} \tau_{\text{eff}} dl_1 \right] d\theta + \frac{8(1-\nu_0^2)}{E_0} \rho c^2 \int_{\theta_{1PP}}^{\theta_{2PP}} P(\theta) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} l_1 dl_1 d\theta, \quad (21)$$

其中  $b_3 = b_3/c, l_1 = l_1/c, \theta_{1PP}$  和  $\theta_{2PP}$  由式(14)确定。

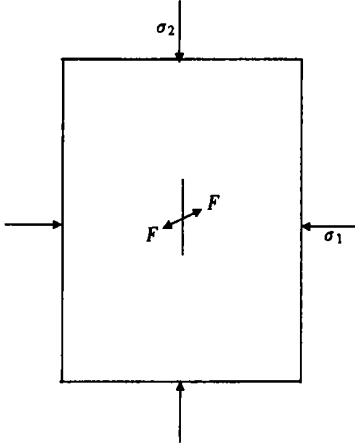


图2 单一裂纹的等效模型

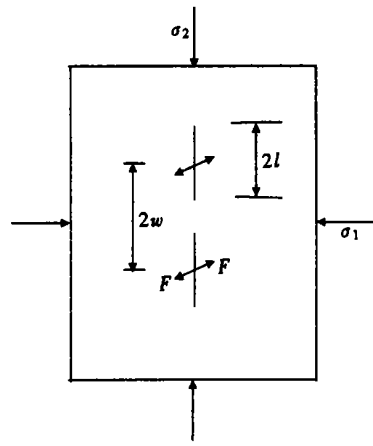


图3 岩石受压发生劈裂破坏

为了研究岩石的损伤和变形局部化问题,导致岩石发生劈裂破坏的裂纹之间的相互作用不能忽略。对如图3所示的裂纹排列,根据Tada等<sup>[12]</sup>的研究,等效裂纹尖端的应力强度因子可表示为

$$\begin{cases} K_I = \frac{F \cos \theta}{\sqrt{w \sin(\pi l/w)}} - \sigma_1 \sqrt{2w \tan \frac{\pi l}{2w}}, \\ K_{II} = - \frac{F \sin \theta}{\sqrt{w \sin(\pi l/w)}}. \end{cases} \quad (22)$$

裂纹的扩展准则为

$$K_I = \frac{F \cos \theta}{\sqrt{w \sin(\pi l/w)}} - \sigma_1 \sqrt{2w \tan \frac{\pi l}{2w}} = K_{Icc}. \quad (23)$$

根据式(17),裂纹相互作用时的II型裂纹张开位移可以表示为

$$b_4 = \frac{\pi(1-\nu_0^2)}{E_0} \left[ \frac{\sqrt{\pi l_2}}{\sqrt{w \sin(\pi l_2/w)}} \tau_{\text{eff}} - \frac{\sqrt{2w \tan(\pi l_2/(2w))}}{\sqrt{\pi l_2}} \sigma_1 l_2 \cos \theta \right], \quad (24)$$

式中  $l_2$  由式(23)确定。

#### 1.4 压应力作用下微裂纹的失稳扩展

在高应力作用下,微裂纹将发生失稳扩展,同时脆性岩石材料产生变形和损伤局部化、应力跌落现象。

由式(23)可以确定单轴加载和很低围压的三轴压缩条件下发生劈裂破坏所需的应力为

$$\sigma_{2m} = (K_{Icc} \sqrt{w} + \sqrt{2w} \sigma_{1m} + 2c \tau_c \cos \theta_0 + 2c \mu \sigma_{1m} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 +$$

$$2c\sigma_{1m}\sin\theta_0\cos^2\theta_0)/(2\mu_c\cos^3\theta_0-2c\sin\theta_0\cos^2\theta_0), \quad (25)$$

其中  $\sigma_{1m}$ ,  $\sigma_{2m}$  分别为岩石承受的轴向和横向的极限荷载。

如果  $\sigma_2 = \sigma_{2m}$ , 满足二次失稳扩展准则(23)的微裂纹将发生失稳扩展, 同时材料发生应力跌落和产生损伤和变形局部化现象。

在应力跌落阶段, 非弹性余能可以表示为

$$\Delta\psi = \frac{2c}{A_0}\int_0^{b'}\tau_{12}'(\sigma, b)db + \frac{2}{A_0}\int_0^{l'}G(\sigma, l)dl, \quad (26)$$

$$\text{式中 } \tau_{12}' = \tau_{12}'\frac{\sqrt{\pi l_2}}{\sqrt{w\sin(\pi l_2/w)}} - \sigma_1 l_2 \cos\theta \frac{\sqrt{2w\tan(\pi l_2/(2w))}}{\sqrt{\pi l_2}},$$

$G(\sigma, l) = (K_I^2 + K_{II}^2)(1 - \nu_0^2)/E_0$ ,  $K_I$  和  $K_{II}$  由式(22)确定, 根据式(3)和(26)可得这一阶段的应变增量为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{11}^{m3} \\ d\varepsilon_{22}^{m3} \end{pmatrix} &= \frac{\rho_c^2\sqrt{\pi l_2}}{\sqrt{w\sin(\pi l_2/w)}}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_{cc}}p(\theta)\begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}db_4d\theta + \\ &\frac{\rho_c^2\sqrt{2w\tan(\pi l_2/(2w))}}{\sqrt{\pi l_2}}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_{cc}}p(\theta)\begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}l_2db_4d\theta + \\ &\frac{4\rho_c^2(1-\nu_0^2)\sqrt{2w\tan(\pi l_2/(2w))}}{E_0\sqrt{w\sin(\pi l_2/w)}}\tau_{\text{eff}}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_{cc}}p(\theta)\begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}dl_2d\theta + \\ &\frac{8\rho_c^2(1-\nu_0^2)w\tan(\pi l_2/(2w))}{E_0}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_{cc}}p(\theta)\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}dl_2d\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

另一方面, 在应力跌落过程中, 随着应力的减小, 将会发生反向滑移。发生反向滑移的外部应力条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{2b} &= [(\sigma_{1m} - \sigma_{2m})\cos\theta(\mu_c\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) - \mu\sigma_{1m} + \\ &\sigma_1\sin\theta(-\mu\sin\theta + \cos\theta) - 2\tau_c]/[\sin\theta\cos\theta + \mu\cos^2\theta]. \end{aligned} \quad (28)$$

由方位角为  $(\theta_{1s}, \theta_{2s})$  的裂纹发生反向滑移引起的非弹性应变增量为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{11}^{mu} \\ d\varepsilon_{22}^{mu} \end{pmatrix} &= \rho_c^2\int_{\theta_{2s}}^{\theta_{1s}}p(\theta)\begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}db_m d\theta + \\ &\rho_c^2\int_{\theta_{2s}}^{\theta_{1s}}p(\theta)\begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}l_m db_m d\theta, \end{aligned} \quad (29)$$

式中  $db_m = [4(1 - \nu_0^2)\cos\theta(\mu_c\cos\theta - \sin\theta)d\sigma_2]/E_0$ , 下标  $m$  表示加载过程中记录的最大值,  $\theta_{1s}$  和  $\theta_{2s}$  由式(28)确定。

应力跌落过程中应变保持不变, 由此可以确定应力跌落的幅度。应力跌落过程中应变可以表示为

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{jm} \quad (30)$$

应力跌落一定幅度以后, 应力停止跌落, 材料展现应变软化现象。在应变软化阶段的应变增量可以表示为

$$d\varepsilon_j = d\varepsilon_{ij}^0 + d\varepsilon_{ij}^{m1} + d\varepsilon_{ij}^{m2} + d\varepsilon_{ij}^{m3} + d\varepsilon_{ij}^{mu} \quad (31)$$

## 2 理论和实验对比分析

为了验证理论模型的正确性, 作者利用 Okubo 等<sup>[9]</sup>对花岗岩的单轴压缩实验结果作对比分析。

在计算中,花岗岩的力学参数如下

$$E_0 = 37\,600 \text{ MPa}, c = 7.5 \times 10^{-4} \text{ m}, \tau_c = 0.5 \text{ MPa},$$

$$\nu_0 = 0.23, \sigma_{2m} = 175.8 \text{ MPa},$$

$$\rho = 4.5 \times 10^5, \theta_{ec} = 0.01(\text{rad}), K_{Icc} = 0.85 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}},$$

$$p(\theta) = 1/\pi, w = 6 \times 10^{-3} \text{ m}, \mu = 0.7$$

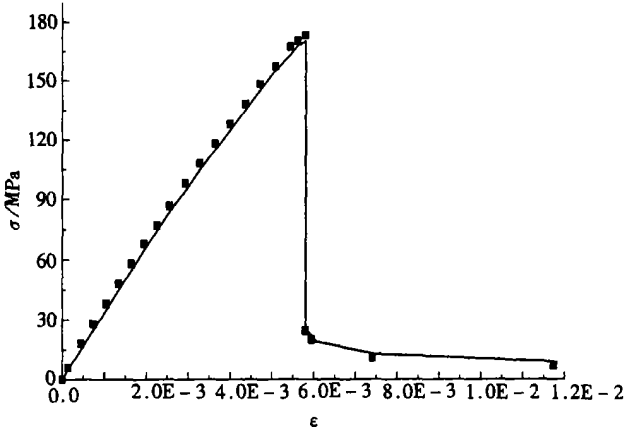


图4 理论和实验结果对比分析

在图4中,黑点表示花岗岩的试验结果,曲线为本构模型计算所得结果.从图4可知本文的本构模型和实验结果吻合,因而说明本构模型的正确性.

### 3 结 语

本文利用细观力学理论研究了压应力作用下细观非均匀性岩石损伤局部化问题及其全过程应力应变关系,主要得出如下结论:

1) 在单轴压缩和低围压的三轴压缩条件下岩石中的微裂纹的损伤机制表现为弯折扩展.其破坏特征表现为劈裂破坏.岩石在压应力作用下的变形可分解为岩石母体的变形、裂纹的摩擦、弯折扩展变形,反向滑移和失稳扩展变形;

2) 微裂纹岩石在压应力作用下的本构关系包括线弹性、非线性强化、应力降和应变软化四个阶段.该模型分析了各个阶段的细观损伤机制和本构关系,指出了应力降和应变软化是发生局部损伤和应变局部化的宏观表现,而微裂纹的失稳扩展是损伤局部化和应变局部化的根本原因,将损伤局部化引入材料的损伤本构关系是和以往损伤模型的又一重要差别;

3) 实验结果验证了本文提出的本构模型能较好地反映岩石在压应力作用下的变形特性.

### [参 考 文 献]

- [1] Simo J C, Ju J W. Strain and stress based continuum damage models[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1987, 23(7): 821—840.
- [2] Ortiz M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete[J]. *Mech Mater*, 1985, 4(1): 67—93.
- [3] Ju J W. On two dimensional self consistent micromechanical damage models for brittle solids[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1991, 27(2): 227—258.
- [4] Nemat Nasser S, Horii H. Compression induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure[J]. *Journal of Geophysics Research*, 1985, 90(B4): 3105—3125.

- [5] Ashby M F, Hallam S D. The failure of brittle solids containing small cracks under compressive states[J]. *Acta Metallica*, 1986, **34**(3): 497—510.
- [6] Kachanov M. A microcrack model of rock inelasticity—Part I : frictional sliding on microcracks [J]. *Mechanics of Materials*, 1982, **1**(1): 19—27.
- [7] Nemat\_Nasser S, Obata M. A microcrack model of dilatancy in brittle materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, **55**(1): 24—35.
- [8] Basista M, Gross D. The sliding crack model of brittle deformation: an internal variable approach [J]. *Internat J Solids and Structures*, 1998, **35**(5/6): 487—509.
- [9] Okubo S, Nishimatsu Y, He C. Loading rate dependence of class II rock behavior in uniaxial and triaxial compression tests: an application of a proposed new control method[J]. *Internat J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr*, 1990, **27**(6): 559—562.
- [10] Rice J R. Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1971, **19**(6): 433—455.
- [11] ZHOU Xiao\_ping, HA Qiu\_lin, ZHANG Yong\_xing, et al. Analysis of the deformation localization and the complete stress-strain relation for brittle rock subjected to dynamic compressive loads[J]. *Internat J Rock Mech Min Sci*, 2004, **41**(2): 311—319.
- [12] Tada H, Paris P C, Irwin G R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook* [M]. St Louis Ed. Paris: Paris Production Incorporated, 1985.

## Analysis of the Localization of Damage and the Complete Stress-Strain Relation for Mesoscopic Heterogeneous Brittle Rock Subjected to Compressive Loads

ZHOU Xiao\_ping<sup>1,2</sup>, ZHANG Yong\_xing<sup>1</sup>,  
HA Qiu\_ling<sup>1</sup>, WANG Jian\_hua<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University,  
Chongqing 400045, P. R. China;

2. School of Civil Engineering and Mechanics, Shanghai Jiaotong University,  
Shanghai 200030, P. R. China)

**Abstract:** A micromechanics-based model is established. The model takes the interaction among sliding cracks into account, and it is able to quantify the effect of various parameters on the localization condition of damage and deformation for brittle rock subjected to compressive loads. The closed-form explicit expression for the complete stress-strain relation of rock containing microcracks subjected to compressive loads was obtained. It is showed that the complete stress-strain relation includes linear elasticity, nonlinear hardening, rapid stress drop and strain softening. The behavior of rapid stress drop and strain softening is due to localization of deformation and damage. Theoretical predictions have shown to be consistent with the experimental results.

**Key words:** compressive load; mesoscopic heterogeneous rock; complete stress-strain relation; localization of damage and deformation