应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

控制系统第二标准型的绝对稳定性准则*

裘晓钢　舒仲周

（西南交通大学，1985年4月20日收到）

摘　要

本文给出控制系统实的第二标准型[1]

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i&=-\rho_i x_i+\sigma\quad(i=1,\cdots,n)\\ \dot{\sigma}&=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i-p\sigma-rf(\sigma)\end{aligned}\right\}$$

绝对稳定的显式准则，包含并改进了文[2]的相应结论．将所得结果应用于著名的飞机纵向运动方程[3,4,2]，所得结果包含并改进了文[3,4,2]的结论．

一、引　言

控制系统实的第二标准型[1]具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i&=-\rho_i x_i+\sigma\qquad(i=1,\ \cdots,\ n)\\ \dot{\sigma}&=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i-p\sigma-rf(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$\rho_i>0$，β_i为实数($i=1,\cdots,n$)，p，$r>0$，f连续，满足$f(0)=0$；$\sigma f(\sigma)>0\ (\sigma\neq0)$．

下列著名的飞机纵向运动方程[3,4,2]是(1.1)的特例

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i&=-\rho_i x_i+\sigma\qquad(i=1,2,3,4)\\ \dot{\sigma}&=\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i-rp_2\sigma-f(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

其中$\rho_i>0$，β_i为实数 ($i=1,2,3,4$)，$rp_2>0$，f连续，满足$f(0)=0$；$\sigma f(\sigma)>0(\sigma\neq0)$．

文[2]得到的关于第二标准型(1.1)绝对稳定的充分性准则为

$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2\rho_i}\beta_i>0\tag{1.3}$$

将这一结论应用于飞机纵向运动方程(1.2)，得到关于(1.2)绝对稳定的充分性准则为

* 钱伟长推荐．

$$r p_2-\sum_{i=1}^{4}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2\rho_i}\beta_i>0 \tag{1.4}$$

这一结论同时包含并改进了文[3,4]关于方程(1.2)的绝对稳定性准则。本文将进一步改进准则(1,3)与(1.4)。

二、引　理

引理1　设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

为分块正方矩阵，如果A_{11}非奇异，则

$$|A|=|A_{11}||A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|.$$

证明　这是因为当A_{11}非奇异时，下面的等式恒成立

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A_{11}^{-1}A_{12}\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

其中E为单位阵。

如果A是对称的，且A_{11}正定，那么由(2.1)式立即得

引理2　设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

为分块对称矩阵，A_{11}正定，那么A正定（半正定）的充要条件是$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$正定（半正定），这里$A_{21}=A_{12}^T$。

引理3　对于系统(1.1)，如果存在对称矩阵G，

$$G=\begin{pmatrix}g_{11}\cdots g_{1n}\\ \vdots \quad\quad \vdots\\ g_{n1}\cdots g_{nn}\end{pmatrix}$$

使得

(i)　矩阵B正定，这里

$$B=\begin{pmatrix}2\rho_1 g_{11} & \cdots & (\rho_1+\rho_n)g_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ (\rho_n+\rho_1)g_{n1} & \cdots & 2\rho_n g_{nn}\end{pmatrix};$$

(ii)　$2p-\mathbf{k}^TB^{-1}\mathbf{k}\geqslant 0$,

这里

$$\mathbf{k}^T=\left(-\left(\beta_1+\sum_{j=1}^{n}g_{1j}\right),\cdots,-\left(\beta_n+\sum_{j=1}^{n}g_{nj}\right)\right),$$

那么(1.1)为绝对稳定。

证明　记

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-\rho_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\rho_n\end{pmatrix},$$

则方程(1.1)可以写成如下的矩阵形式：

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -r\end{pmatrix}f(\sigma) \tag{2.2}$$

取

$$V=(\mathbf{x}^T\ \ \sigma)\begin{pmatrix}G & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}$$

不难验证 $JG+GJ=-B$. 由于B正定、J稳定，因此G正定，从而V正定无穷大. 又

$$\dot{V}_{(1.1)}=\left[\begin{pmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -r\end{pmatrix}f(\sigma)\right]^T\begin{pmatrix}G & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}$$

$$+(\mathbf{x}^T\ \ \sigma)\begin{pmatrix}G & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -r\end{pmatrix}f(\sigma)\right]$$

$$=-(\mathbf{x}^T\ \ \sigma)\begin{pmatrix}B & \mathbf{k}\\ \mathbf{k}^T & 2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}-2r\sigma f(\sigma)$$

由引理1及条件(i)、(ii)知,

$$\begin{pmatrix}B & \mathbf{k}\\ \mathbf{k}^T & 2p\end{pmatrix}$$

半正定，再注意当$\sigma\neq 0$时$\sigma f(\sigma)>0$，因此$\dot{V}_{(1.1)}\leqslant 0$，且当$\dot{V}_{(1.1)}=0$时必有$\sigma=0$，进而 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 即$\dot{V}_{(1.1)}$负定，由LBK全局稳定定理知，(1.1)的零解为绝对稳定.

引理4 系统(1.1)零解绝对稳定的一个必要条件是

$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\geqslant 0 \tag{2.3}$$

证明 在(1.1)中令$f(\sigma)=\varepsilon\sigma$，$\varepsilon>0$. 如果(1.1)为绝对稳定，那么

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -(p+r\varepsilon)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \sigma\end{pmatrix}$$

对一切 ε 应全局稳定，即矩阵

$$\begin{pmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -(p+r\varepsilon)\end{pmatrix}$$

的特征根，不妨设为ω_i $(i=1,\cdots,n+1)$，对一切 $\varepsilon>0$ 其实部均为负，由于

$$\left|\lambda E-\begin{pmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -(p+r\varepsilon)\end{pmatrix}\right|=\prod_{i=1}^{n+1}(\lambda-\omega_i)$$

所以

$$\prod_{i=1}^{n+1}(-\omega_i)=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}J & \mathbf{e}\\ \boldsymbol{\beta}^T & -(p+r\varepsilon)\end{vmatrix}$$

因为ω_i实部均为负，且复根成对，因此

$$\prod_{i=1}^{n+1}(-\omega_i)>0$$

由引理 1 又知

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} J & \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\beta}^T & -(p+r\varepsilon) \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(-\rho_i)\left[-(p+r\varepsilon)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{-\rho_j}\right]$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{n}\rho_j\right)\left[p+r\varepsilon-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\right]$$

因此

$$p+r\varepsilon-\sum_{i=1}^{n}\beta_i/\rho_i>0$$

对一切$\varepsilon>0$成立，让 $\varepsilon\to 0$ 即得(2.3)式。

引理5 如果在系统(1.1)中，$\beta_i\neq 0\ (i=1,\cdots,m)$，$\beta_j=0\ (j=m+1,\cdots,n,\ 0\leqslant m\leqslant n)$。那么(1.1)零解的绝对稳定性与下列系统零解的绝对稳定性等价：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_i=-\rho_i x_i+\sigma \quad (\rho_i>0,\ i=1,\cdots,m) \\ &\dot{\sigma}=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x_i-p\sigma-rf(\sigma) \quad (p,r>0) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

证明 当$\beta_i\neq 0\ (i=1,\cdots,m)$及$\beta_j=0\ (j=m+1,\cdots,n)$时，系统(1.1)可以写成如下形式

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_i=-\rho_i x_i+\sigma \quad (\rho_i>0,\ i=1,\cdots,m) \\ &\dot{x}_j=-\rho_j x_j+\sigma \quad (\rho_j>0,\ j=m+1,\cdots,n) \\ &\dot{\sigma}=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x_i-p\sigma-rf(\sigma) \quad (p、r>0) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

显然，当(2.4)不绝对稳定时，(2.5)亦不能绝对稳定。现设(2.4)是绝对稳定的。令(2.4)之满足初始条件$x_i(0)=x_{i0}\ (i=1,\cdots,m)$、$\sigma(0)=\sigma_0$的解为 $x_i(t)=x_i(t;\ x_{10},\cdots,x_{m0},\ \sigma_0)$、$\sigma(t)=\sigma(t;\ x_{10},\cdots,x_{m0},\sigma_0)$，则(2.5)之满足初始条件$x_i(0)=x_{i0}\ (i=1,\cdots,m)$、$x_j(0)=x_{j0}\ (j=m+1,\cdots,n)$、$\sigma(0)=\sigma_0$的解为

$$\left.\begin{aligned} &x_i(t)=x_i(t;x_{10},\cdots,x_{m0},\sigma_0) \quad (i=1,\cdots,m); \quad \sigma(t)=\sigma(t;x_{10},\cdots,x_{m0},\sigma_0) \\ &x_j(t)=x_{j0}\exp(-\rho_j t)+\exp(-\rho_j t)\int_0^t \exp(\rho_j t)\sigma(t)dt \quad (j=m+1,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

由于(2.4)之零解为绝对稳定，因此对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使得当$|x_{i0}|<\delta_1(i=1,\cdots,m)$、$|\sigma_0|<\delta_1$时，有

$$|x_i(t)|<\varepsilon \quad (i=1,\cdots,m)$$
$$|\sigma(t)|<\min_{j=m+1,\cdots,n}\{\varepsilon,\rho_j\varepsilon/2\}$$

对一切$t\geqslant 0$成立，令$\delta=\min\{\varepsilon/2,\delta_1\}$，则当$|x_{i0}|<\delta\ (i=1\cdots,m)$、$|x_{j0}|<\delta(j=m+1,\cdots,n)$、$|\sigma_0|<\delta$时，当然还有

$$|x_i(t)|<\varepsilon、\ |\sigma(t)|<\min_{j=m+1,\cdots,n}\{\varepsilon,\rho_j\varepsilon/2\}$$

对一切$t\geqslant 0$成立；再由(2.6)式得，当$t\geqslant 0$时有

$$|x_j(t)|\leqslant|x_{j0}|\exp(-\rho_j t)+\exp(-\rho_j t)\int_0^t\exp(\rho_j t)|\sigma(t)|dt$$

$$\leqslant|x_{j0}|+(\varepsilon\rho_j/2)\exp(-\rho_j t)\int_0^t \exp(\rho_j t)\,dt$$
$$<\delta+\varepsilon/2\leqslant\varepsilon$$

这说明(2.5)的零解为稳定，下面我们进一步来说明，对于任何 x_{i0}、x_{j0}、σ_0，当 $t\to\infty$ 时，总有$x_i(t)\to 0$、$x_j(t)\to 0$、$\sigma(t)\to 0$。

$x_i(t)\to 0$、$\sigma(t)\to 0$可由(2.6)的绝对稳定性直接得到，下面来考查$x_j(t)$。对$\forall\varepsilon>0$，由于$\sigma(t)\to 0(t\to\infty)$，因此$\exists t_1>0$，使得当$t\geqslant t_1$时有

$$|\sigma(t)|<\min_{j=m+1,\cdots,n}\{\varepsilon\rho_j/2\}$$

令

$$a(t_1)=\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}|\sigma(t)|$$

再选取 $t_2\geqslant t_1$ 以保证

$$[|x_{j0}|+(a/\rho_j)\exp(t_1\rho_j)]/\exp(t_2\rho_j)<\varepsilon/2 \qquad (j=m+1,\cdots,n)$$

那么当$t\geqslant t_2$时，再由(2.6)式得

$$|x_j(t)|\leqslant|x_{j0}|\exp(-\rho_j t)+\exp(-\rho_j t)\int_0^t \exp(\rho_j t)|\sigma(t)|\,dt$$
$$\leqslant|x_{j0}|\exp(-\rho_j t)+\exp(-\rho_j t)\int_0^{t_1} \exp(\rho_j t)|\sigma(t)|\,dt$$
$$+\exp(-\rho_j t)\int_{t_1}^t \exp(\rho_j t)|\sigma(t)|\,dt$$
$$\leqslant|x_{j0}|\exp(-\rho_j t)+a\cdot\exp(-\rho_j t)\int_0^{t_1} \exp(\rho_j t)\,dt$$
$$+(\varepsilon\rho_j/2)\exp(-\rho_j t)\int_{t_1}^t \exp(\rho_j t)\,dt$$
$$\leqslant|x_{j0}|\exp(-\rho_j t_2)+(a/\rho_j)\exp(-\rho_j t)[\exp(\rho_j t_1)-1]$$
$$+(\varepsilon/2)\exp(-\rho_j t)[\exp(\rho_j t)-\exp(\rho_j t_1)]$$
$$\leqslant[|x_{j0}|+(a/\rho_j)\exp(\rho_j t_1)]/\exp(\rho_j t_2)+\varepsilon/2$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

即$x_j(t)\to 0$ ($t\to\infty$，$j=m+1,\cdots,n$)。这就证明了(2.5)的零解还是全局稳定的。由于(2.4)的零解是绝对稳定的，因此 f 可以是满足 $f(0)=0$、$\sigma f(\sigma)>0$ ($\sigma\neq 0$) 的任意连续函数，因而(2.5)的零解也是绝对稳定的。

三、第二标准型的绝对稳定性准则

准则1 如果在系统(1.1)中，当 $1\leqslant i\leqslant m$时$\beta_i\neq 0$且全部同号；当 $m+1\leqslant i\leqslant n$ 时 $\beta_i=0$ ($0\leqslant m\leqslant n$)，那么(1.1)绝对稳定的充要条件为

$$p-\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i}{\rho_i}\geqslant 0 \tag{3.1}$$

证明 必要性已由引理 4 给出，下面来证充分性，先设 $m=n$。利用引理 3，在那里取 $g_{ii}=|\beta_i|$ $(i=1,\cdots,n)$，$g_{ij}=0$ $(i,j=1,\cdots,n,i\neq j)$，那么矩阵B显然正定，而

$$2p-\mathbf{k}^T B^{-1}\mathbf{k}=2p-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\beta_i+|\beta_i|)^2}{2\rho_i|\beta_i|}=\begin{cases}2\left(p-\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i/\rho_i\right) & (当\beta_i>0)\\ 2p & (当\beta_i<0)\end{cases}$$

因此只要(3.1)式成立，引理3的两个条件都成立。对于$m<n$的情形可由引理5及上面的证明得到。

如果在系统(1.1)中β_i变号，不失一般性，我们可以适当选择足码，使得 β_i 有如下的顺序：

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1>0,\cdots,\beta_s>0,\beta_{s+1}<0,\cdots,\beta_m<0\\ \beta_{m+1}=0,\cdots,\beta_n=0 \qquad (1\leqslant s<m\leqslant n)\end{array}\right\}\tag{3.2}$$

准则2 如果在系统(1.1)中，β_i 具有(3.2)所示的符号，那么下列两条件之一成立时，(1.1)的零解为绝对稳定。

$$(\mathrm{i})\quad p-\min_{s+1\leqslant j\leqslant m}\ \min_{\lambda\in\Lambda_j}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\lambda_i\rho_j)^2}>0\tag{3.3}$$

这里

$$\Lambda_j=\left\{\lambda\,|\,\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s),\lambda_i\ 取0或1，且使\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\beta_i/\rho_i+\beta_j/\rho_j\leqslant 0\right\}\quad (j=s+1,\cdots,m).$$

$$(\mathrm{ii})\quad p-\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i}{\rho_i}-\min_{1\leqslant i\leqslant s}\ \min_{\mu\in M_i}\sum_{j=s+1}^{m}\frac{\mu_j\beta_j(2\rho_i+\rho_j)}{(\rho_i+\rho_j)^2}>0\tag{3.4}$$

这里

$$M_i=\left\{\mu\,|\,\mu=(\mu_{s+1},\cdots,\mu_m),\mu_j\ 取\ 0\ 或\ 1，且使\sum_{j=s+1}^{m}\mu_j\beta_j/\rho_j+\beta_i/\rho_i\geqslant 0\right\}\quad (i=1,\cdots,s).$$

证明 根据引理5，我们只需证当$m=n$时准则成立即可，现设$m=n$。

我们先来证当(3.3)成立时，系统(1.1)为绝对稳定，首先可以不妨设

$$\min_{s+1\leqslant j\leqslant n}\ \min_{\lambda\in\Lambda_j}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\lambda_i\rho_j)^2}=\min_{\lambda\in\Lambda_n}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\lambda_i\rho_n)^2}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\bar\lambda_i\rho_n)^2},$$

这里$\bar{\lambda}=(\bar\lambda_1,\cdots,\bar\lambda_s)\in\Lambda_n$。应用引理3，并在那里取

$$g_{ii}=|\beta_i|,\qquad (i=1,\cdots,n)$$
$$g_{in}=-2\theta_1\sqrt{\beta_i\rho_i}\,|\beta_n|\rho_n/(p_i+pn)\qquad (i=1,\cdots,s)$$

而取其它的g_{ij}为零，这里$\theta_i(i=1,\cdots,s)$待定，但满足条件

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2<1.\tag{3.5}$$

这时

$$B=\begin{bmatrix} 2\rho_1\beta_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & (\rho_1+\rho_n)g_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \cdots \\ 0 & & 2\rho_s\beta_s & 0 & \cdots & 0 & (\rho_s+\rho_n)\rho_{sn} \\ 0 & \cdots & 0 & 2\rho_{s+1}|\beta_{s+1}| & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & \\ (\rho_1+\rho_n)g_{1n} & \cdots & (\beta_s+\rho_n)g_{sn} & & 0 & & 2\rho_n|\beta_n| \end{bmatrix}$$

对B用引理2，并取$A_{22}=(2\rho_n|\beta_n|)$，则因为

$$2\rho_n|\beta_n|-\sum_{i=1}^{s}(\rho_i+\rho_n)^2g_{in}^2/(2\rho_i\beta_i)$$

$$=2\rho_n|\beta_n|-\sum_{i=1}^{s}2\theta_i^2\rho_n|\beta_n|=2\rho_n|\beta_n|\left(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\right)>0,$$

所以B正定，再来考查，$2p-k^TB^{-1}k$，应用引理1，有

$$|B|(2p-\mathbf{k}^TB^{-1}\mathbf{k})=\begin{vmatrix} B & \mathbf{k} \\ \mathbf{k}^T & 2p \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{array}{ccccccc|cc} 2\rho_1\beta_1 & & & & & & & (\rho_1+\rho_n)g_{1n} & -(2\beta_1+g_{1n}) \\ & \ddots & & & 0 & & & \vdots & \vdots \\ & & 2\rho_s\beta_s & & & & & (\rho_s+\rho_n)g_{sn} & -(2\beta_s+g_{sn}) \\ & & & 2\rho_{s+1}|\beta_{s+1}| & & & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & & & & 2\rho_{n-1}|\beta_{n-1}| & 0 & 0 \\ \hline (\rho_1+\rho_n)g_{1n} & \cdots & (\rho_s+\rho_n)g_{sn} & 0 & \cdots & & 0 & 2\rho_n|\beta_n| & -\sum_{i=1}^{s}g_{in} \\ -(2\beta_1+g_{1n}) & \cdots & -(2\beta_s+g_{sn}) & 0 & \cdots & & 0 & -\sum_{i=1}^{s}g_{in} & 2p \end{array}\right|$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(2\rho_i|\beta_i|)\left|\begin{pmatrix} 2\rho_n|\beta_n| & -\sum_{i=1}^{s}g_{in} \\ -\sum_{i=1}^{s}g_{in} & 2p \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix} (\rho_1+\rho_n)g_{1n} & \cdots & (\rho_s+\rho_n)g_{sn} \\ -(2\beta_1+g_{1n}) & \cdots & -(2\beta_s+g_{sn}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/(2\beta_1\rho_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/(2\beta_s\rho_s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\rho_1+\rho_n)g_{1n} & -(2\beta_1+g_{1n}) \\ \vdots & \vdots \\ (\rho_s+\rho_n)g_{sn} & -(2\beta_s+g_{sn}) \end{pmatrix}\right|$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(2\rho_i|\beta_i|)\left|\begin{pmatrix}2\rho_n|\beta_n| & -\sum\limits_{i=1}^{s}g_{in}\\ -\sum\limits_{i=1}^{s}g_{in} & 2p\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{s}(\rho_i+\rho_n)^2g_{in}^2/(2\beta_i\rho_i) & -\sum\limits_{i=1}^{s}(\rho_i+\rho_n)g_{in}(2\beta_i+g_{in})/(2\beta_i\rho_i)\\ -\sum\limits_{i=1}^{s}(\rho_i+\rho_n)g_{in}(2\beta_i+g_{in})/(2\beta_i\rho_i) & \sum\limits_{i=1}^{s}(2\beta_i+g_{in})^2/(2\beta_i\rho_i)\end{pmatrix}\right|$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(2\rho_i|\beta_i|)\Big\{\Big[2\rho_n|\beta_n|-\sum_{i=1}^{s}(\rho_i+\rho_n)^2g_{in}^2/(2\beta_i\rho_i)\Big]\Big[2p-\sum_{i=1}^{s}(2\beta_i+g_{in})^2/(2\beta_i\rho_i)\Big]$$

$$-\Big[\sum_{i=1}^{s}g_{in}(2\beta_i\rho_n+(\rho_i+\rho_n)g_{in})/(2\beta_i\rho_i)\Big]^2\Big\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(2\rho_i|\beta_i|)\Big\{\Big[2\rho_n|\beta_n|-\sum_{i=1}^{s}2\rho_n|\beta_n|\theta_i^2\Big]\Big[2p-\sum_{i=1}^{s}(2\beta_i+g_{in})^2/(2\rho_i\beta_i)\Big]$$

$$-\Big[\sum_{i=1}^{s}g_{in}(2\beta_i\rho_n-2\theta_i\sqrt{\beta_i\rho_i|\beta_n|\rho_n})/(2\beta_i\rho_i)\Big]^2\Big\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(2\rho_i|\beta_i|)\Big\{\Big(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\Big)\Big(2p-\sum_{i=1}^{s}\frac{(2\beta_i+g_{in})^2}{2\beta_i\rho_i}\Big)$$

$$-\Big[\sqrt{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\theta_i\sqrt{|\beta_n|\rho_n}}{(\rho_i+\rho_n)}\Big(\sqrt{\frac{\beta_i\rho_n}{|\beta_n|\rho_i}}-\theta_i\Big)\Big]^2\Big\}$$

因此，$2p-\mathbf{k}^TB^{-1}\mathbf{k}$与$\delta$同号，这里

$$\delta=\Big(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\Big)\Big(2p-\sum_{i=1}^{s}\frac{(2\beta_i+g_{in})^2}{2\beta_i\rho_i}\Big)$$

$$-\Big[\sqrt{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\theta_i\sqrt{|\beta_n|\rho_n}}{(\rho_i+\rho_n)}\Big(\sqrt{\frac{\beta_i\rho_n}{|\beta_n|\rho_i}}-\theta_i\Big)\Big]^2 \qquad (3.6)$$

现在我们分两种情况来选取$\theta_i\ (i=1,\cdots,s)$。

1° 如果$\sum\limits_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i/\rho_i+\beta_n/\rho_n<0$，则$\sum\limits_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)<1$，取

$$\theta_i=\bar{\lambda}_i\sqrt{\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)}$$

则 $$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2=\sum_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i^2\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)=\sum_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)<1$$

即(3.5)式被满足，另外，当$\bar{\lambda}_i=0$时$\theta_i=0$，当$\bar{\lambda}_i=1$时$\theta_i=\sqrt{\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)}$，因此这样选取的$\theta_i$总使(3.6)式中的$\delta$的表达式的后一项为零，于是

$$\delta=\left(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\right)\left[2p-\sum_{i=1}^{s}\left(2\beta_i-2\bar{\lambda}_i\sqrt{\frac{\beta_i\rho_n}{|\beta_n|\rho_i}}\frac{\sqrt{\beta_i\rho_i|\beta_n|\rho_n}}{(\rho_i+\rho_n)}\right)^2\Big/(2\beta_i\rho_i)\right]$$

$$=\left(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\right)\left[2p-\sum_{i=1}^{s}\left(2\beta_i-\frac{2\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n}{\rho_i+\rho_n}\right)^2\Big/(2\beta_i\rho_i)\right]$$

$$=2\left(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\right)\left[p-\sum_{i=1}^{s}\frac{(\rho_i+\rho_n-\bar{\lambda}_i\rho_n)^2\beta_i}{(\rho_i+\rho_n)^2\rho_i}\right]$$

$$=2\left(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\right)\left[p-\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\bar{\lambda}_i\rho_n)^2}\right]\qquad(\text{因为}\bar{\lambda}_i\text{只取}0,1)$$

2° 如果 $\sum_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i/\rho_i+\beta_n/\rho_n=0$，则 $\sum_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)=1$，因而$\bar{\lambda}_i$不能全为零，不妨设$\bar{\lambda}_1=1$。取$\theta_1=\sqrt{\beta_1\rho_n/(|\beta_n|\rho_1)}-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$且充分小)；$\theta_i=\bar{\lambda}_i\sqrt{\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)}$ $(i=2,\cdots,s)$。这时

$$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2=(\sqrt{\beta_1\rho_n/(|\beta_n|\rho_1}-\varepsilon)^2+\sum_{i=2}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)$$

$$<\beta_1\rho_n/(|\beta_n|\rho_1)+\sum_{i=2}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)=1.$$

即(3.5)式能被满足，同时由(3.6)式得

$$\delta=\varepsilon\left(2\sqrt{\frac{\beta_1\rho_n}{|\beta_n|\rho_1}}-\varepsilon\right)\left(2p-\sum_{i=1}^{s}\frac{(2\beta_i+g_{in})^2}{2\beta_i\rho_i}\right)$$

$$-\left[\sqrt{2}\,\varepsilon\frac{\sqrt{|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1+\rho_n}\left(\sqrt{\frac{\beta_1\rho_n}{|\beta_n|\rho_1}}-\varepsilon\right)\right]^2$$

因为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\theta_i=\lambda_i\sqrt{\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)}\qquad(i=1,\cdots,s)$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to0}g_{in}=-2\bar{\lambda}_i\sqrt{\beta_i\rho_n/(|\beta_n|\rho_i)}\cdot\sqrt{\beta_i\rho_i|\beta_n|\rho_n}/(\rho_i+\rho_n)$$

$$=-2\bar{\lambda}_i\beta_i\rho_n/(\rho_i+\rho_n) \qquad (i=,\cdots,s)$$

进而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta/[\varepsilon(2\sqrt{\beta_1\rho_n}/(|\beta_n|\rho_1-\varepsilon)]$$

$$=2p-\sum_{i=1}^{s}\left[\left(2\beta_i-2\bar{\lambda}_i\frac{\beta_i\rho_n}{\rho_i+\rho_n}\right)^2\Big/(2\beta_i\rho_i)\right]$$

$$=2\left(p-\sum_{i=1}^{s}\frac{\rho_i\beta_i}{(\rho_i+\bar{\lambda}_i\rho_n)^2}\right) \qquad (\text{因为}\bar{\lambda}_i\text{只取 }0,1)$$

因此，只要(3.3)式成立，在情形1°总有$\delta>0$；在情形2°，只要ε取得足够小也有$\delta>0$。这样我们就证明了当(3.3)式成立时，引理3的条件是可以被满足的。

当(3.4)式成立时，可不妨设

$$\min_{1\leqslant i\leqslant s}\ \min_{\mu\in M_i}\sum_{j=s+1}^{n}\frac{\mu_j\beta_j(2\rho_i+\rho_j)}{(\rho_i+\rho_j)^2}=\min_{\mu\in M_1}\sum_{j=s+1}^{n}\frac{\mu_j\beta_j(2\rho_1+\rho_j)}{(\rho_1+\rho_j)}$$

$$=\sum_{j=s+1}^{n}\frac{\bar{\mu}_j\beta_j(2\rho_1+\rho_j)}{(\rho_1+\rho_j)}$$

这里$\bar{\mu}=(\bar{\mu}_{s+1},\ \cdots,\ \bar{\mu}_n)\in M_1$。应用引理3，并在那里取 $g_{ii}=|\beta_i|$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$，$g_{1j}=-2\theta_j\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_j|\rho_j}/(\rho_1+\rho_j)$ $(j=s+1,\cdots,n)$，而其它的g_{ij}全为零。然后分两种情况来选取θ_j：

1° 当 $\sum_{j=s+1}^{n}\bar{\lambda}_j\beta_j/\rho_j+\beta_1/\rho_1>0$ 时，取 $\theta_j=\bar{\mu}_j\sqrt{|\beta_j|\rho_1/(\beta_1\rho_j)}$ $(j=s+1,\cdots,n)$；

2° 当 $\sum_{j=s+1}^{n}\bar{\mu}_j\beta_j/\rho_j+\beta_1/\rho_1=0$时，不妨设$\bar{\mu}_n=1$，并取$\theta_j=\bar{\mu}_j\sqrt{|\beta_j|\rho_1/(\beta_1\rho_j)}$ $(j=s+1,\cdots,n-1)$，$\theta_n=\sqrt{|\beta_n|\rho_1/(\beta_1\rho_n)}-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$且充分小)。完全仿照前段的证明不难验证，这样选取的G当(3.4)式成立时，能保证引理3的两个条件成立，从而保证(1.1)的零解为绝对稳定。

由于Λ_j、M_i都是布尔数组集，且都只有有限个点，因此当ρ_i、β_i、p给定时，用计算机来判断条件(3.3)和(3.4)是很方便的。附录给出了一个判别准则2的条件的计算机通用程序，并对一个$m=n=14$，$s=7$的系统进行了判别。

文[2]给出的系统(1.1)零解绝对稳定的充分条件为

$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2\rho_i}\beta_i>0 \tag{3.7}$$

当β_i不变号时，准则1的条件较(3.7)为弱（增加了一条边界）；当β_i变号并排成(3.2)所示的顺序时，(3.7)等价于

$$p-\sum_{i=1}^{s}\beta_i/\rho_i>0 \tag{3.8}$$

由于　$\sum_{i=1}^{s}\beta_i\rho_i/(\rho_i+\lambda_i\rho_j)^2\leqslant\sum_{i=1}^{s}\beta_i/\rho_i$、$\sum_{j=s+1}^{m}\mu_j\beta_j(2\rho_i+\rho_j)/(\rho_i+\rho_j)^2\leqslant 0$

因此这时准则 2 的条件(3.3)、(3.4)都比(3.7)为宽，这样我们就包含并改进了文[2]关于(1.1)的结论。

特别，如果在系统(1.1)中让$n=2$、$pp_1=pp_2=q$，则由准则 1、2 可得(1.1)绝对稳定的充分条件为

当 $\beta_1\beta_2\geqslant 0$ 时，$q-\beta_1-\beta_2\geqslant 0$；

当 $\beta_1>0$，$\beta_2<0$ 时，$\begin{cases} q-\beta_1/4>0, & \beta_1+\beta_2\leqslant 0 \\ q-\beta_1-3\beta_2/4>0, & \beta_1+\beta_2\geqslant 0; \end{cases}$

当 $\beta_1<0$，$\beta_2>0$ 时，$\begin{cases} q-\beta_2/4>0, & \beta_1+\beta_2\leqslant 0 \\ q-3\beta_1/4-\beta_2>0, & \beta_1+\beta_2\geqslant 0. \end{cases}$

在(β_1,β_2)平面上，这一充分条件所给出的绝对稳定性区域为折线l_2所界（图 1）；条件(3.7)给出的绝对稳定性区域由折线l_3所界；图1中直线l_1以上的区域为不绝对稳定区域，这由引理 4 中的(2.3)式给出。

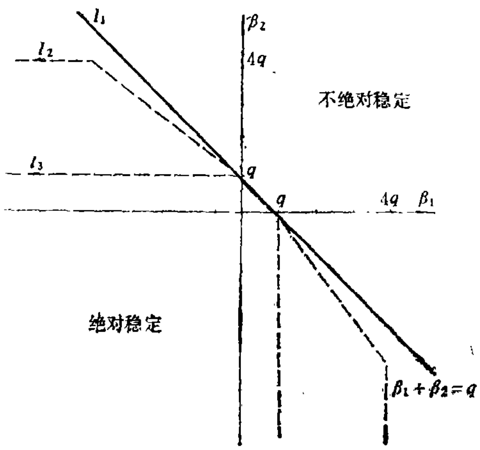

图　1

四、飞机纵向运动方程的绝对稳定性准则

将三节中的准则 1、2 直接应用于飞机纵向运动方程(1.2)，就得到飞机纵向运动方程的绝对稳定性准则。

准则3　对于飞机纵向运动方程(1.2)

1°　如果β_i $(i=1,\cdots,4)$不变号，不妨设当$1\leqslant i\leqslant m$时$\beta_i\neq 0$；当$m+1\leqslant i\leqslant 4$时$\beta_i=0$ $(0\leqslant m\leqslant 4)$，则(1.2)绝对稳定的充要条件为

$$rp_2-\sum_{i=1}^{m}\beta_i/\rho_i=rp_2-\sum_{i=1}^{4}\beta_i/\rho_i\geqslant 0 \tag{4.1}$$

2°　如果 β_i $(i=1,\cdots,4)$变号，不妨设当 $1\leqslant i\leqslant s$ 时 $\beta_i>0$；当 $s+1\leqslant i\leqslant m$时 $\beta_i<0$；当$m+1\leqslant i\leqslant 4$ 时$\beta_i=0$ $(1\leqslant s<m\leqslant 4)$。那么下列两条件之一成立时(1.2)为绝对稳定。

$$(\text{i})\quad rp_2-\min_{s+1\leqslant j\leqslant m}\min_{\lambda\in\Lambda_j}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\lambda_i\rho_j)^2}>0. \tag{4.2}$$

这里

$$\Lambda_j=\{\lambda\,|\,\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s),\ \lambda_i\text{取0或1且使}\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\beta_i/\rho_i+\beta_j/\rho_j\leqslant 0\}\quad (j=s+1,\cdots,m)$$

$$(\text{ii})\quad rp_2-\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i}{\rho_i}-\min_{1\leqslant i\leqslant s}\min_{\mu\in M_i}\sum_{j=s+1}^{m}\frac{\mu_j\beta_j(2\rho_i+\rho_j)}{(\rho_i+\rho_j)^2}>0 \tag{4.3}$$

这里

$$M_i=\left\{\mu\,|\,\mu=(\mu_{s+1},\cdots,\mu_m),\ \mu_j\text{取0或1且使}\sum_{j=s+1}^{m}\mu_j\beta_j/\rho_j+\beta_i/\rho_i\geqslant 0\right\},\quad (i=1,\cdots,s)$$

文[3]、[4]、[2]所给出的(1.2)绝对稳定的充分条件分别为

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2r^2p_2^2-16\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2>0 \tag{4.4}$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2r^2p_2^2-4\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2>0 \tag{4.5}$$

$$rp_2-\sum_{i=1}^{4}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2\rho_i}\beta_i>0 \tag{4.6}$$

(4.4)显然是(4.5)的特例，(4.5)又是(4.6)的特例[2]，而(4.6)在β_i同号时是(4.1)的特例；在β_i变号时是(4.2)及(4.3)的特例。

在准则 3 中，情形1°的条件显然是很易判断的。对于情形2°，如果采用附录给出的通用程序借助于计算机，那也是容易判断的，这只须在那里读入 $p=rp_2$、$n=4$即可。但由于$n=4$并不大，因此既便是用笔算来判断准则 3 的条件也不是十分困难的，下面我们给出一个 $s=2$、$m=n=4$的例子来说明准则3、进而准则2的用法。

在系统 (1.2) 中设 $rp_2=1$，$\beta_1=5$，$\beta_2=4$，$\beta_3=-2$，$\beta_4=-3$，$\rho_1=9$，$\rho_2=8$，$\rho_3=6$，$\rho_4=15$。由于

$$rp_2-\sum_{i=1}^{4}(1+\operatorname{sgn}\beta_i)\beta_i/(2\rho_i)=rp_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_i/\rho_i$$

$$=1-(5/9+4/8)=-1/18<0$$

因此条件(4.6)不能用。但由于

$$\beta_1/\rho_1+\beta_3/\rho_3+\beta_4/\rho_4=5/9-1/3-1/5=1/45>0$$

$$rp_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_i/\rho_i-\sum_{j=3}^{4}\beta_j(2\rho_1+\rho_j)/(\rho_i+\rho_j)^2$$

$$=1-(5/9+4/8)-[-2(18+6)/(9+6)^2-3(18+15)/(9+15)^2]$$

$$=1-76/72+16/75+11/64=-4/72+8/75+11/64>0$$

因此

$$rp_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_i/\rho_i-\min_{1\leqslant i\leqslant 2}\min_{\mu\in M_i}\sum_{j=3}^{4}\mu_j\beta_j(2\rho_i+\rho_j)/(\rho_i+\rho_j)^2$$

$$\geqslant rp_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_i/\rho_i-\min_{\mu\in M_1}\sum_{j=3}^{4}\mu_j\beta_j(2\rho_1+\rho_j)/(\rho_1+\rho_j)^2$$

$$\geqslant rp_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_i/\rho_i-\left[\sum_{j=3}^{4}\mu_j\beta_j(2\rho_1+\rho_j)/(\rho_1+\rho_j)^2\right]\Big|_{\mu_3=1,\mu_4=1}$$

$$=rp_2-\sum_{i=1}^{2}\beta_i/\rho_i-\sum_{j=3}^{4}\beta_j(2\rho_1+\rho_j)/(\rho_1+\rho_j)^2>0$$

即(4.3)式成立，因而所给系统为绝对稳定。

附录　一个计算机程序

这里我们给出判断准则2的条件的计算机程序，所用语言为FORTRAN，调试机器为I-100。当$m=n$时可直接用此程序，当$m<n$时应先用引理5将系统化为低维系统，使得β_i全不为零，然后再用此程序。

在程序中，变量P、IS、N、IV、IU、BT、RO 分别对应于准则 2 中的量 p、s、$n(m)$、$\boldsymbol{\lambda}$、$\boldsymbol{\mu}$、$\boldsymbol{\beta}^T$、$\boldsymbol{\rho}^T=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$。在打印结果中，标志 “NO” 表示准则 2 的条件不成立；当打印出L且$L\leqslant s$ 时，表示条件(3.4)成立，相应的 G 表立 $p-\sum_{i=1}^{s}\beta_i/\rho_i-\sum_{j=s+1}^{n}\mu_j\beta_j(2\rho_L+\rho_j)/(\rho_L+\rho_j)^2$ 在 $\boldsymbol{\mu}$ 取 IU 的输出值时的值；当打印出L且$L\geqslant s+1$时，表示条件(3.3)成立，相应的G表示 $p-\sum_{i=1}^{s}\beta_i\rho_i/(\rho_i+\partial_i\rho_L)^2$ 在 $\boldsymbol{\lambda}$ 取 IV的输出值的值。

我们对 $n=14$、$s=7$ 的一个第二标准型进行了计算，其中 $\beta_1=7$，$\beta_2=12$，$\beta_3=1$，$\beta_4=13$，$\beta_5=13$，$\beta_6=8$，$\beta_7=11$，$\beta_8=-3$，$\beta_9=-5$，$\beta_{10}=-7$，$\beta_{11}=-10$，$\beta_{12}=-1$，$\beta_{13}=-18$，$\beta_{14}=-2$；$\rho_1=21$，$\rho_2=43$，$\rho_3=32$，$\rho_4=17$，$\rho_5=10$，$\rho_6=10$，$\rho_7=16$，$\rho_8=16$，$\rho_9=15$，$\rho_{10}=30$，$\rho_{11}=17$，$\rho_{12}=15$，$\rho_{13}=20$，$\rho_{14}=3$。计算结果表明，当$p\geqslant3.11856$时，准则2的条件成立(即系统为绝对稳定)，当$p\leqslant3.11585$时，准则2的条件不成立。而由(3.7)式给出的充分条件为$p\geqslant4.195859$；由 (2.3) 式所给出的不绝对稳定的条件为$p\leqslant1.2201237$（上述四个不等式允许等号成立的原因，是我们在计算时已经考虑了舍入）。

程序全文如下。

```
C     A PROGRAM USED TO TEST THE CONDITION OF CRITERION 2
      DIMENSION BT(14), RO(14), IV(8,128), IU(8,128).
     & KV(128), KU(128)
      COMMON P, IS, N
      WRITE(5,1)
 1    FORMAT(IX, 'INPUT  P, IS, N')
      READ(5,2) P, IS, N
 2    FORMAT(E13.6, 2I4)
      M=N
      IS1=IS+1
      IS2=2**IS
      ISN1=N-IS+1
```

```
      ISN2=2**(N-IS)
      CALL  Q(BT, RO, M, IV, IU, KV, KU, IS1, IS2, ISN1, ISN1, ISN2)
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE  Q(BT, RO, M, IV, IU, KV, KU, IS1, IS2, ISN1, INS2)
      DIMENSION  BT(M), RO(M), IV(IS1, IS2), IU(ISN1, ISN2),
   &  KV(IS2), KU(ISN2)
      COMMON  P, IS, N
      READ(1,10)BT, RO
10    FORMAT(5E13.6/5E13.6/4E13.6/5E13.6/5E13.6/4E13.6)
C     FIRST1
      DO  15  J=1, IS2
      IV(1, J)=0
15    KV(J)=J
      DO  25  I=2, IS1
      IC=2**(IS1-I)
      IG=2*IC
      DO  25  J=1, IS2
      KV(J)=KV(J)-IV(I-1, J)*IG
      IF(KV(J). GT. IC)  GOTO  20
      IV(I, J)=0
      GOTO  25
20    IV(I, J)=1
25    CONTINUE
C     FIRST2
      DO  60  L=IS1, N
      DO  60  J=1, IS2
      B=BT(L)/RO(L)
      DO  30  I=2, IS1
30    B=B+FLOAT(IV(I, J))*BT(I-1)/RO(I-1)
      IF(B)  35, 60, 60
35    G=P
      DO  40  I=2, IS1
40    G=G-RO(I-1)*BT(I-1)/((RO(I-1)+RO(L)*
   &  FLOAT(IV(I, J)))**2)
      IF(G)  60, 60, 45
45    WRITE(8, 50)(IV(I, J), I=2, IS1)
50    FORMAT(1Y, 'IV=', 10(1Y, I1))
      WRITE(8, 55)P, IS, N, G, L
55    FORMAT(1X, 'P=', E13.6, 3X, 'IS=', I4, 3X,
   &  'N='I4, 3X, 'G=', E13.6, 3X, 'L=', I4)
      GOTO  125
60    CONTINUE
```

```
C     SECOND1
      DO 65 J=1, ISN2
      IU (1, J)=0
65    KU(J)=J
      DO 75 I=2, ISN1
      IC=2**(ISN1-I)
      IG=2*IC
      DO 75 J=1, ISN2
      KU(J)=KU(J)-IU(I-1, J)*IG
      IF(KU(J). GT. IC)GOTO 70
      IU(I, J)=0
      GOTO 75
70    IU(I, J)=1
75    CONTINUE
C     SECOND2
      DO 115 L=1, IS
      DO 115 J=1, ISN2
      B=BT(L)/RO(L)
      DO 80 I=2, ISN1
80    B=B+FLOAT(IU(I, J))*BT(IS+I-1)/RO(IS+I-1)
      IF(B)115, 115, 85
85    G=P
      DO 90 I=2, IS1
90    G=G-BT(I-1)/RO(I-1)
      DO 95 I=2, ISN1
95    G=G-FLOAT(IU(I, J))*BT(IS+I-1)*(2.0*RO(L)+
   &  RO(IS+I-1))/((RO(L)+RO(IS+I-1))**2)
      IF(G)115, 115, 100
100   WRITE(8,105)(IU(I, J), I=2, ISN1)
105   FORMAT(1X, 'IU=', 10(1X, I1))
      WRITE(8, 55)P, IS, N, G, L
      GOTO 125
115   CONTJNUE
      WRITE(8, 120)P, IS, N
120   FORMAT(1X, 'P=', E13.6, 3X, 'IS=', I4, 3X, 'N=', I4,
   &  3X, 'NO')
125   WRITE(8,130)
130   FORMAT(1X, 'BT=')
      WRITE(8, 135)BT
135   FORMAT(1X, 5E13.6/1X, 5E13.6/1X, 4E13.6)
      WRITE(8, 140)
140   FORMAT(1X, 'RO=')
      WRITE(8, 135)RO
      RETURN
      END
```

参考文献

[1] 列托夫 A. M.,《非线性调节系统的稳定性》, 李惠译, 科学出版社 (1959).

[2] 廖晓昕, 关于控制系统的绝对稳定性准则, 应用数学和力学, 3, 2 (1982), 235--248.

[3] Лионтковский А. А. и П. Д. Рутковская, Исследование некоторых задач теории устойчивости с помощью метода векторной функции Ляпунова, *Автоматика и Телемеханика*, 10 (1967).

[4] Michel, A. N., Stability analysis of interconnected systems, *J. SIAM, Control*, 12 (1974).

Several Criterions of Absolute Stability for the Second Canonical Form of Control System

Qiu Xiao-gang Shu Zhong-zhou

(Southwestern Jiaotong University, Emei, Sichuan)

Abstract

In this paper, some explicit criterions of absolute stability for the real second canonical form of control system

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\rho_i x_i + \sigma \qquad (i=1,\cdots,n) \\ \dot{\sigma} &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - p\sigma - rf(\sigma) \end{aligned}\right\}$$

are given, which generalize and include the known result in paper [2]. By applying these critirions to the well known equation of the longitudinal motion of aircraft, a result that generalizes and includes the known results in papers [3,4,2] is obtained.