应用数学和力学，第7卷第9期（1986年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

借助于薄板的解求薄扁壳的解（微分方程降六阶）

范　家　参

（云南工学院建筑工程系，1980年6月6日收到）

摘　要

如果与薄扁壳的边界形状及荷载相同的薄板弯曲问题的解为已知，则相应的薄扁球壳弯曲方程组降阶为一个非齐次的 Helmholtz 方程而易于求解．给出了例题说明本文方法的应用．

一、原　理

复数形式的弹性薄扁球壳方程为[1]：

$$\nabla^2\nabla^2\psi+i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{hR}\nabla^2\psi=\frac{q}{D},\quad\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tag{1.1}$$

在(1.1)式中，h为壳厚，$i=\sqrt{-1}$，R为球壳中面的半径，ν为球壳的泊松比，D为壳体的抗弯刚度，q为壳面上法向外荷载强度，w为壳体的挠度，ϕ为壳体中面的应力函数，E为壳体的杨氏弹性系数，并且：

$$\psi(x,\ y)=w(x,\ y)+i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}\phi(x,\ y)\tag{1.2}$$

正如文献[1]所指出：(1.1)式不仅球扁壳问题可以适用，如果采用小参数摄动法，即以两个主方向常曲率之和为分母，之差为分子，构成小参数，则(1.1)式之解可作为正高斯曲率的薄扁壳如椭圆抛物面扁壳、椭球面扁壳、…等的首次逼近方程．

弹性薄板弯曲的方程为：

$$D\nabla^2\nabla^2w_1(x,\ y)=q(x,\ y)\tag{1.3}$$

在(1.3)式中，w_1是薄板的挠度．我们假定(1.1)及(1.3)定义的扁壳和板有相同的边界条件及荷载情况．一般而言，(1.3)式比(1.1)式易于求解，许多情况下，(1.3)式的解已知而(1.1)式的解还没有求出，故我们可以用(1.3)式的已知解来求(1.1)式的解，为此我们把(1.1)式的w分解为两部份：

$$w(x,\ y)=w_1(x,y)+w_2(x,\ y)\tag{1.4}$$

在(1.4)式里$w_1(x,\ y)$是(1.3)式的解，我们认为它已知．代(1.4)入(1.1)而得：

$$\nabla^2\{\nabla^2[w_2(x,\ y)+i\alpha\phi(x,\ y)]+\lambda^2[w_1(x,\ y)+w_2(x,y)+i\alpha\phi(x,y)]\}=0\tag{1.5}$$

* 钱伟长推荐．

在(1.5)式中： $\alpha=\sqrt{12(1-\nu^2)}/Eh^2,\ \lambda^2=iE\alpha h/R$ (1.6)

设 $\eta(x,\ y)=w_2(x,\ y)+i\alpha\phi(x,\ y)$ (1.7)

则因(1.5)式左边大括号中的函数为调和函数，令 $\chi(x,\ y)$为某一适合要求的调和函数，其系数可由有关的边界条件定出，则(1.5)式可化为：

$$\nabla^2\eta(x,\ y)+\lambda^2\eta(x,\ y)=\chi(x,\ y)-\lambda^2 w_1(x,\ y) \tag{1.8}$$

(1.8)式就是等价(1.1)式的扁球壳微分方程，它把(1.1)式这个四阶偏微分方程降为二阶，大大地便利了计算工作。更因(1.8)式是属于波动理论的 Helmholtz 方程，有现成的解答如下[2]：

$$\eta(M)=\frac{i}{4}\iint_S H_0^{(2)}(\lambda r_{MP})[\chi(P)-\lambda^2 w_1(P)]d\sigma_P \tag{1.9}$$

在(1.9)式中，S是扁壳在其边界线内定义的平面区域，M和P是S内不同的两点，$H_0^{(2)}(\lambda r_{MP})$是变量为 λr_{MP} 的零阶第三类 Bessel 函数，$d\sigma_P$是在P点邻域的微分面积。

当然，有时(1.9)式的积分十分难求，则还不如直接求解(1.8)式为方便，这要看具体问题而定。一般言之圆形底的问题以用(1.9)式为好，矩形底的问题则以直接求解(1.8)式为宜。但不论那一种办法都比直接求解(1.1)式方便得多。

二、两 个 例 题

例1、受匀布荷重 q_0 作用，边长为a（沿x轴方向）和b（沿y轴方向），周边铰支的矩形底球扁壳。此时则：

$$w_1(x,\ y)=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{16q_0}{\pi^6 D}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \tag{2.1}$$

边界条件为：当 $x=0$，$x=a$；$y=0$，$y=b$ 时[3]：

$$w=w_1=w_2=\nabla^2 w=\nabla^2 w_1=\nabla^2 w_2=\phi=\nabla^2\phi=0 \tag{2.2}$$

因此，(1.5)式大括号内的函数既为调和函数，其边值又为零，此调和函数必恒等于零。即此时(1.8)式中的 $\chi(x,\ y)\equiv 0$。

设 $$\eta(x,\ y)=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}(\alpha_{mn}+i\beta_{mn})\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.3}$$

代(2.3)入(1.8)，注意到 $\chi(x,\ y)=0$ 并使此式两端系数相等而得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{mn}&=-\frac{16E\alpha q_0}{Rh\pi^{10}Dmn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\left[\frac{Rh}{E\alpha}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{E\alpha}{Rh}\right]}\\ \beta_{mn}&=-\frac{16q_0}{\pi^8 Dmn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\left[\frac{Rh}{E\alpha}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{E\alpha}{Rh}\right]}\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned}w_2(x,y)&=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\alpha_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\ \phi(x,y)&=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\beta_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

这一段的结果与文献[4]一致。

例2、周边固定的圆底扁球壳，圆底半径为a，在壳面上距圆心O为c的一点B上作用有集中力P。在图 1 上标明了此壳在底面上的投影并标出以后要用到的一些符号及数据。此壳体的边界条件是：

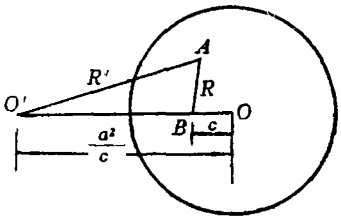

图 1

$$\left.\begin{array}{l} w(a,\ \theta)=0 \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial^3\phi}{\partial r^3}+(2+\nu)\dfrac{\partial^3\phi}{\partial r^2\partial\theta}\right]_{r=a}=0 \\ \left.\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\right|_{r=a}=0 \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

此时已知$w_1(r,\ \theta)$的解为[5]：

$$w_1(r,\ \theta)=\frac{P}{8\pi D}\left[-R^2\ln\frac{cR'}{aR}+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}R'^2-R^2\right)\right] \tag{2.8}$$

因为 $R=\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\theta}$ ，$R'=\sqrt{a^4+c^2r^2-2a^2cr\cos\theta}/c$

所以 $$w_1(r,\ \theta)=\frac{P}{8\pi D}\left[-(c^2+r^2-2cr\cos\theta)\ln\frac{\sqrt{a^4+c^2r^2-2a^2cr\cos\theta}}{a\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\theta}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(a^2-c^2)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right] \tag{2.9}$$

因为$w_1(r,\ \theta)$及$w_2(r,\ \theta)$均为θ的偶函数，故由(1.8)式可知$\chi(r,\ \theta)$亦必为θ的偶函数。因此设

$$\chi(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^n\cos n\theta \tag{2.10}$$

再设

$$r_{MP}=\sqrt{\xi^2+r^2-2\xi r\cos(\theta-\beta)} \tag{2.11}$$

在(2.11)式中，点M的极坐标为$(r,\ \theta)$，点P的极坐标为$(\xi,\ \beta)$。

按文献[6]有下列公式：

$$H_0^{(2)}(\lambda r_{\mathrm{MP}})=J_0(\lambda r)H_0^{(2)}(\lambda\xi)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(\lambda r)H_n^{(2)}(\lambda\xi)\cos n(\theta-\beta) \tag{2.12}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(c^2+r^2-2cr\cos\theta)=-\ln c+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}\left(\frac{r}{c}\right)^{n+1}\cos(n+1)\theta \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(a^2+\frac{c^2}{a^2}r^2-2cr\cos\theta\right)=\ln a-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}\left(\frac{cr}{a^2}\right)^{n+1}\cos(n+1)\theta \tag{2.14}$$

$$\int z^{\mu}H_{\nu}(z)dz=(\mu+\nu-1)zH_{\nu}(z)S_{\mu-1,\nu}(z)-zH_{\nu-1}(z)S_{\mu,\nu}(z) \tag{2.15}$$

(2.15)式中的$S_{\mu,\nu}(z)$叫做 Rommel 函数[6]。将以上四式代入(1.9)式而得：

$$\eta(r,\theta)=\frac{i\pi a}{2\lambda}A_0H_1^{(2)}(\lambda a)J_0(\lambda r)+i\pi a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\lambda^{n+1}}\left[2nH_n^{(2)}(\lambda a)S_{n,n-1}(\lambda a)\right.$$

$$-H_{n-1}^{(2)}(\lambda a)S_{n+1,n}(\lambda a)\Big]J_n(\lambda r)\cos n\theta-\frac{i\lambda^2 P}{8\pi}\Big\{\Big(c^2-a^2+c^2\ln\frac{a}{c}\Big)H_1^{(2)}(\lambda a)J_0(\lambda r)$$

$$+\frac{a}{2\lambda}\Big(1+\ln\frac{a}{c}-\frac{a^2}{c^2}\Big)\Big[2H_0^{(2)}(\lambda a)S_{2,-1}(\lambda a)+H_1^{(2)}(\lambda a)S_{3,0}(\lambda a)\Big]J_0(\lambda r)$$

$$+\frac{2ac}{\lambda^2}\ln\frac{a}{c}\Big[2H_1^{(2)}(\lambda a)\,S_{1,0}(\lambda a)-H_0^{(2)}(\lambda a)S_{2,1}(\lambda a)\Big]J_1(\lambda r)\cos\theta$$

$$-a^2c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{a^2-c^2}{\lambda a^2 c}\Big)^n\Big[2(n-1)H_{n-1}^{(2)}(\lambda a)S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$

$$-H_{n-2}^{(2)}(\lambda a)S_{n,n-1}(\lambda a)\Big]J_n(\lambda r)\cos n\theta+2c\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a^2-c^2}{\lambda a^2 c}\Big)^n\Big[2(n$$

$$+1)H_{n-1}^{(2)}(\lambda a)S_{n+1,n}(\lambda a)-H_{n-2}^{(2)}(\lambda a)S_{n+2,n+1}(\lambda a)\Big]J_{n+1}(\lambda r)$$

$$\times\Big[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}(\delta_1^n-1)\Big]\quad\Big(\delta_1^n=\begin{cases}0 & (n\neq1)\\ 1 & (n=1).\end{cases}\Big)\tag{2.16}$$

代(2.16)式入边界条件(2.6)及(2.7)，利用三角函数的正交性而定出各系数为：

$$A_0=\frac{\lambda^2Pa^2}{4\pi^2D}-\frac{\lambda^2Pa^2}{4\pi^2D}\Big(1+\ln\frac{a}{c}-\frac{c^2}{a^2}\Big)[H_1^{(2)}(\lambda a)]^{-1}$$

$$\cdot[2H_0^{(2)}(\lambda a)S_{2,-1}(\lambda a)+H_1^{(2)}S_{3,0}(\lambda a)]\tag{2.17}$$

$$A_n=\frac{Pac}{8\pi D}\lambda^{n+1}[2nH_n^{(2)}(\lambda a)S_{n,n-1}(\lambda a)-H_{n-1}^{(2)}(\lambda a)S_{n+1,n}(\lambda a)]^{-1}\Big\{\frac{1}{n}\Big(\frac{a^2-c^2}{\lambda a^2c}\Big)^n$$

$$\cdot\Big[2(n-1)H_{n-1}^{(2)}(\lambda a)\,S_{n-1,n-2}(\lambda a)-H_{n-2}^{(2)}(\lambda a)S_{n,n-1}(\lambda a)\Big]$$

$$-\frac{1}{\lambda^2a\pi}\ln\frac{a}{c}\Big[2H_1^{(2)}(\lambda a)S_{1,0}(\lambda a)-H_0^{(2)}(\lambda a)S_{2,1}(\lambda a)\Big]\delta_1^n\Big\}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)\tag{2.18}$$

现在把(2.16)、(2.17)、(2.18)三式的实部与虚部分开。为此应用以下三式：

$$\lambda=\sqrt{i}\,k=\exp\Big[i\frac{\pi}{4}\Big]k=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)k=-\exp\Big[-\frac{3}{4}\pi\Big]k,\quad k=\sqrt{\frac{Eah}{R}}\ (\text{实数})\tag{2.19}$$

所以 $J_n(\lambda r)=\mathrm{ber}_n(-kr)-i\,\mathrm{bei}_n(-kr)$ (2.20)

$$H_n^{(2)}(\lambda a)=her_n(-ka)-i\mathrm{hei}_n(-ka)\tag{2.21}$$

在上面两式中，$\mathrm{ber}_n(-kr)$、$\mathrm{bei}_n(-kr)$、$\mathrm{her}_n(-ka)$、$\mathrm{hei}_n(-ka)$叫做n阶 Thomson 函数并且都是实函数，并且还有[6]：

$$S_{\mu,\nu}(\lambda a)=\Big(\cos\frac{\mu-1}{4}\pi+i\sin\frac{\mu-1}{4}\pi\Big)(ka)^{\mu-1}\{1+i[(\mu-1)^2-\nu^2](ka)^{-2}$$

$$-[(\mu-1)^2-\nu^2][(\mu-3)^2-\nu^2](ka)^{-4}-i[(\mu-1)^2-\nu^2]$$

$$\cdot[(\mu-3)^2-\nu^2][(\mu-5)^2-\nu^2](ka)^{-6}+\cdots\}$$

所以 $\operatorname{Re}S_{\mu,\nu}(\lambda a)=\cos[(\mu-1)\pi/4]\{1-[(\mu-1)^2-\nu^2][(\mu-3)^2-\nu^2](ka)^{-4}+\cdots\}(ka)^{\mu-1}$

$$-\sin[(\mu-1)\pi/4]\{[(\mu-1)^2-\nu^2](ka)^{-2}-[(\mu-1)^2-\nu^2][(\mu-3)^2-\nu^2][(\mu-5)^2-\nu^2](ka)^{-6}+\cdots\}(ka)^{\mu-1} \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Im}S_{\mu,\nu}(\lambda a)=\cos[(\mu-1)\pi/4]\{[(\mu-1)^2-\nu^2](ka)^{-2}-[(\mu-1)^2-\nu^2]\cdot[(\mu-3)^2-\nu^2][(\mu-5)^2-\nu^2](ka)^{-6}+\cdots\}(ka)^{\mu-1}+\sin[(\mu-1)\pi/4]\cdot\{1-[(\mu-1)^2-\nu^2][(\mu-3)^2-\nu^2](ka)^{-4}+\cdots\}(ka)^{\mu-1} \quad (2.23)$$

代(2.20)、(2.21)、(2.22)、(2.23)入(2.16)、(2.17)、(2.18)，就得到本问题实数形式的解为：

$$\begin{aligned}
w_2(r,\theta)=&\frac{\sqrt{2}\,ka^3P}{16\pi D}\{(\mathrm{her}_1(-ka)-\mathrm{hei}_1(-ka)]\mathrm{ber}_0(-ka)\\
&-(\mathrm{her}_1(-ka)+\mathrm{hei}_1(-ka)]\mathrm{bei}_0(-kr)\}-\frac{ka^3P}{8\pi D}\left(1+\ln\frac{a}{c}\right)\\
&\times\{2[\mathrm{her}_0(-ka)\times\operatorname{Im}S_{2,-1}(\lambda a)-\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-\lambda r)\\
&-2[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{2,-1}(\lambda a)+\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Im}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)\}\\
&-\frac{ka^3P}{8\pi D}\left(1+\ln\frac{a}{c}\right)\{[\mathrm{her}_1(-ka)\operatorname{Im}S_{3,0}(\lambda a)-\mathrm{hei}_1(-ka)\operatorname{Re}S_{3,0}(\lambda a)]\\
&\cdot\mathrm{ber}_0(-kr)+[\mathrm{her}_1(-ka)\operatorname{Re}S_{3,0}(\lambda a)+\mathrm{hei}_1(-ka)\operatorname{Im}S_{3,0}(\lambda a)]\times\mathrm{bei}_0(-kr)\\
&-\frac{Pa^2ck}{8D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a^2-c^2)^n(n-1)}{nk^na^{2n}c^n}\Big\{\cos\frac{n\pi}{4}[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\operatorname{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\operatorname{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)+\cos n\pi/4[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\\
&\cdot\operatorname{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\operatorname{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\\
&-\sin n\pi/4\,[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\ \operatorname{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\\
&\cdot\operatorname{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)+\sin n\pi/4[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\operatorname{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\operatorname{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\Big\}\cos n\theta+\frac{P}{8\pi D}(c^2-a^2\\
&+c^2\ln c/a)[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{ber}_0(-kr)-\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{bei}_0(-kr)]\\
&+\frac{\sqrt{2}\,Pa^2ck}{32\pi D}\left(1+\ln\frac{a}{c}-\frac{c^2}{a^2}\right)\{[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{2,-1}(\lambda a)\\
&+\mathrm{hei}_0(-kr)\operatorname{Im}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-kr)+[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Im}S_{2,-1}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)+[\mathrm{her}_1(-ka)\operatorname{Re}S_{3,0}(\lambda a)\\
&+\mathrm{hei}_1(-ka)\operatorname{Im}S_{3,0}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-kr)+[\mathrm{her}_1(-ka)\operatorname{Im}S_{3,0}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_1(-ka)\operatorname{Re}S_{3,0}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)\}-\frac{Pa^2ck}{8\pi D}\ln\frac{a}{c}\{2[\mathrm{her}_1(-ka)\operatorname{Re}S_{1,0}(\lambda a)\\
&+\mathrm{hei}_1(-ka)\operatorname{Im}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{ber}_1(-kr)+2[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Im}S_{1,0}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{ber}_1(-kr)+2[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Im}S_{1,0}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{bei}_1(-kr)-[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{2,1}(\lambda a)\\
&+\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Im}S_{2,1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_1(-kr)-[\mathrm{her}_0(-ka)\operatorname{Im}S_{2,1}(\lambda a)\\
&-\mathrm{hei}_0(-ka)\operatorname{Re}S_{2,1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_1(-kr)\}\cos\theta\\
&-\frac{Pa^2ck}{8\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^{n-2}(a^2-c^2)^n}{na^{2(n-1)}c^{n-1}}\Big\{2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)
\end{aligned}$$

$$\times \mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\times \mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$-2(n-1)\cos[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)-2(n-1)\sin[(n-2)\pi/4]$$
$$\times[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$-2(n-1)\sin[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$
$$+\cos[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$+\cos[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$
$$-\sin[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$+\sin[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\}\cos n\theta$$
$$+\frac{Pa^2ck}{4\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a^2-c^2)^nk^{n-2}}{a^{2n}c^{n-1}}\left\{2(n+1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)\right.$$
$$-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)]\times \mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$-2(n+1)\cos[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)-2(n+1)\sin[(n-2)\pi/4]$$
$$\times[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$-2(n+1)\sin[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$
$$+\cos[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$+\sin[(n-2)\pi/4][\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)$$
$$\cdot \mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\}\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{1-\delta_1^n}{n-1}\cos(n-1)\theta^*\right] \quad (2.24)$$

$$\phi(r,\theta)=\frac{\sqrt{2}\,ka^3P}{16\pi Da}\{[\mathrm{her}_1(-ka)+\mathrm{hei}_1(-ka)]\mathrm{ber}_0(-kr)-[\mathrm{her}_1(-ka)$$
$$-\mathrm{hei}_1(-ka)]\mathrm{bei}_0(-kr)\}+\frac{ka^3P}{8\pi Da}\left(1+\ln\frac{a}{c}\right)\{2[\mathrm{her}_0(-ka)$$
$$\times\mathrm{Re}S_{2,-1}(\lambda a)+\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-kr)$$
$$+2[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,-1}(\lambda a)-\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr$$
$$+[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{3,0}(\lambda a)+\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{3,0}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)$$
$$+[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{3,0}(\lambda a)+\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{3,0}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-kr)$$
$$+[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{3,0}(\lambda a)-\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{3,0}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)\}$$
$$+\frac{Pa^2ck}{8Da}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a^2-c^2)^n}{nk^na^{2(n-1)}c^{n-1}}\left\{2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\right.$$
$$\times\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$+2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$
$$-2(n-1)\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$-2(n-1)\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$
$$-\cos\frac{n\pi}{4}[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n,n-1}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n,n-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$-\cos\frac{n\pi}{4}[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n,n-1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n,n-1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$
$$+\sin\frac{n\pi}{4}[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n,n-1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n,n-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$
$$+\sin\frac{n\pi}{4}[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n,n-1}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n,n-1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\}\cos n\theta$$
$$-\frac{Pa^2ck}{8\pi Da}\ln\frac{a}{c}\{2[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{1,0}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{bei}_1(-kr)+2[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{1,0}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{ber}_1(-kr)-[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,1}(\lambda a)]\times\mathrm{bei}_1(-kr)\}\cos\theta-\frac{P}{8\pi Da}\Big(c^2-a^2$$
$$+c^2\ln\frac{c}{a}\Big)[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{bei}_0(-kr)+\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{ber}_0(-kr)]$$
$$+\frac{\sqrt{2}\,Pa^2ck^2}{32\pi Da}\Big(1+\ln\frac{a}{c}-\frac{c^2}{a^2}\Big)\{[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,-1}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-kr)+[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,-1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Im}\,S_{2,-1}(\lambda a)]\times\mathrm{bei}_0(-kr)+[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,-1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_0(-kr)-[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,-1}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,-1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)+[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{3,0}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{3,0}(\lambda a)][\mathrm{ber}_0(-kr)-\mathrm{bei}_0(-kr)]$$
$$-[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{3,0}(\lambda a)-\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{3,0}(\lambda a)][\mathrm{ber}_0(-kr)$$
$$-\mathrm{bei}_0(-kr)]\}-\frac{Pa^2ck}{8\pi Da}\ln\frac{a}{c}\{2[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{1,0}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{ber}_1(-kr)+2[\mathrm{her}_1(-ka)\mathrm{Im}S_{1,0}(\lambda a)$$
$$-\mathrm{hei}_1(-ka)\mathrm{Re}S_{1,0}(\lambda a)]\mathrm{bei}_1(-kr)+[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,1}(\lambda a)$$
$$+\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_1(-kr)+[\mathrm{her}_0(-ka)\mathrm{Im}S_{2,1}(\lambda a)$$

$$-\mathrm{hei}_0(-ka)\mathrm{Re}S_{2,1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_0(-kr)\}$$

$$+\frac{Pa^2ck}{8\pi Da}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^{n-2}(a^2-c^2)^2}{na^{2(n-1)}c^{n-1}}\Big\{2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)$$

$$\cdot\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$-2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$

$$-2(n-1)\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$

$$-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\times\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$+2(n-1)\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n-1,n-2}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n-1,n-2}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$

$$-\cos\frac{n-2}{4}\pi\times[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$+\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$

$$-\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)\times\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$+\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\}\cos n\theta-\frac{Pa^2ck}{4\pi Da}$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a^2-c^2)^n k^{n-2}}{a^{2n}c^n}\Big\{2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)-2(n-1)\cos\frac{n-2}{4}\pi$$

$$\cdot[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$

$$+2(n+1)\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)]$$

$$-\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$-2(n+1)\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-1}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+1,n}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-1}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+1,n}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$

$$-\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$+\cos\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)$$

$$-\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$-\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\times\mathrm{ber}_n(-kr)$$

$$+\sin\frac{n-2}{4}\pi[\mathrm{her}_{n-2}(-ka)\mathrm{Re}S_{n+2,n+1}(\lambda a)$$

$$+\mathrm{hei}_{n-2}(-ka)\mathrm{Im}S_{n+2,n+1}(\lambda a)]\mathrm{bei}_n(-kr)\}$$

$$\cdot\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{1-\delta_1^n}{n-1}\times\cos(n-1)\theta^*\right] \tag{2.25}$$

在(2.24)和(2.25)式最后一项带 * 号者，当 $n=1$ 时用 L'Hospital 法则易于证明其值为零。

三、结 束 语

大家知道，实函数形式的弹性薄扁球壳方程组可以写成：

$$D\nabla^2\nabla^2 w-\frac{1}{R}\nabla^2\phi=q \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\phi+\frac{1}{R}\nabla^2 w=0 \tag{3.2}$$

在文献[3]里下面两个方程适于铰支边矩形底扁球壳：

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\phi+\frac{Eh}{R^2}\nabla^2\phi=-\frac{Eh}{R}q \tag{3.3}$$

在边界上：

$$\phi=\nabla^2\phi=\nabla^4\phi=0 \tag{3.4}$$

以及：

$$D\nabla^2\nabla^2 w+\frac{Eh}{R^2}w=q \tag{3.5}$$

在边界上：

$$w=\nabla^2 w=0 \tag{3.6}$$

文献[3]把(3.3)式左端进行算符因式分解，写成：

$$\nabla^2(\nabla^2+2i\mu^2)(\nabla^2-2i\mu^2)\phi=-\frac{Eh}{DR^2}q,\quad\left(\mu=\sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}}\right) \tag{3.3$'$}$$

这样，ϕ就可以为(3.3)′左端三个单项算符式的解之和，而(3.5)式可按Winkler型弹性地基板求解。但这样做要解一个六阶及一个四阶的偏微分方程，比本文提供的方法要复杂得多。

在文献[4]及一般的工作中，则引入一个辅助函数 $F(x, y)$，令：

$$w=\nabla^2\nabla^2 F,\quad \phi=\frac{Eh}{R}\nabla^2 F \tag{3.7}$$

则(3.1)和(3.2)两式构成的方程组化为下面这个八阶偏微分方程式：

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 F+\frac{12(1-\nu^2)}{h^2R^2}\nabla^2\nabla^2 F=\frac{q}{D} \tag{3.8}$$

本文提供的方法只要求解(1.8)式这个二阶偏微分方程式，较之(3.8)式把求解的方程降了六阶，大大简化了计算工作。而本文提供的两个例子说明本文方法的应用，并把其结果与已有的成果进行比较。例2最后的15式虽长，但那是一个精确解的表达式，其演算步骤是很简单的。总之本文属于对已有的方法进行了简化，提出新的方法而不是重复别人的工作。

参 考 文 献

[1] 龙驭球等，椭圆抛物面扁壳某些应力集中问题，力学学报，8，2 (1965).

[2] 吉洪诺夫A. H.等，《数学物理方程》（下册），黄克欧等译，高等教育出版社 (1957)，558.

[3] 胡海昌，四边简支矩形底球面扁壳楼盖的简化计算方法，力学学报，5,1 (1962).

[4] 符拉索夫 B. З.，《壳体的一般理论》，薛振东等译，高等教育出版社 (1960)，467—469，458.

[5] Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition, (1944), 491, 558.

[6] 爱尔台里 A.，《高级超越函数》（第二册），张致中译，科学技术出版社 (1958).

To Solve the Shallow Shell Equations with the Help of the Plate's Equation Solution (Lowering the Order of Partial Differential Equation from 8 to 2)

Fan Ja-shen

(*Architecture Engineering Department, Yunnan Institute of Technology, Kunming*)

Abstract

If a plate solution is known which has the same boundary and loading conditions with a shallow shell, the solution of that shell can be reduced to a non-homogeneous Helmholtz's equation in complex domain. Two examples are given to illustrate our method.