应用数学和力学，第7卷第9期（1986年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Четаев型非完整力学系统的微分几何原理*

赵世鹰

（同济大学数学力学系，1985年7月3日收到）

提　要

本文应用现代微分几何的方法研究 Четаев 型非完整力学系统。通过恰当地定义 Четаев 型约束Pfaff系统，给出了非完整力学系统的微分几何结构，从而将带有非完整约束的Lagrange方程表达为一种与坐标无关的不变形式，并且采用这个新观点讨论了约束的嵌入和非完整力学系统的守恒定律等问题，得到了约束子流形上的Noether型定理。

一、引　言

现代微分几何学是自然科学研究中的一个强有力的、但又是高度抽象的数学工具。近年来，从微分几何的观点，全局性地重新理解和认识力学，物理学等自然科学的基本理论已经得到人们的充分重视[1-3]。

我们知道，现代微分几何学的起源和发展都与分析力学有着不解之缘。而在另一方面，描述Hamilton系统的辛几何学[1]所获得的极大成功又激发了数学物理中微分几何方法的广泛应用。但迄今为止，对于一般的力学系统，特别是对于非完整力学系统的“几何化”研究在文献中尚不多见[4-7]，许多问题还有待于进一步探讨和解决。

本文以Lagrange观点，在时间位形空间的1-射流形上讨论 Четаев 型非完整力学系统，试图应用现代微分几何方法重新处理非完整力学系统的一些基本理论，从而将带有非完整约束的Lagrange方程表述为一种与坐标无关的不变形式，并由此引伸出若干新结果。

首先（第二节），我们通过以一种内禀的方式定义 Четаев 型约束系统，建立了非完整力学系统的微分几何结构，并且由此导出了Lagrange向量场的显式；第三节利用 Четаев 型约束系统的相伴模讨论了约束嵌入的问题，重新得到了约束嵌入形式的Poincaré方程[8]；在第四节，我们把通过一类向量场生成完整力学系统的Noether守恒量的方法[9]推广到非完整力学系统，从而获得了约束子流形上的Noether型定理；最后，第五节计算了几个实例以说明Noether型定理的应用。

为了叙述上的方便，本文假定我们所考虑的所有流形和映射都是 C^∞ 的，并且采用Einstein求和约定，即一对上下哑标表示关于该指标求和。此外，下述常用的记号我们在文中不再予以说明：

* 郭仲衡推荐。

$M, N, E, \cdots$	有限维 C^∞ 流形;	$\theta \in \mathscr{X}^*(M)$	流形 M 上的 C^∞ 1-形式;
f^*	映射 $f: M \to N$ 的回退映射;	$\wedge$	外积;
$f\|A$	映射 f 在子集 $A \subset M$ 上的限制;	$\cdot$	内积;
$\{f_i\}$	映射组, 比如, 指标 i 取 $1, \cdots, m$;	$\mathbf{d}$	外微分;
$\gamma \in \Gamma(E)$	向量丛 $\tau: E \to M$ 的 C^∞ 截面;	$\mathbf{L}_X$	关于向量场 X 的 Lie 导数;
$F \in \mathscr{F}(M)$	流形 M 上的 C^∞ 实值函数;	$[X, Y]$	向量场 X, Y 的 Lie 括号.
$X \in \mathscr{X}(M)$	流形 M 上的 C^∞ 向量场;		

二、非完整力学系统的微分几何结构

考虑一个 m 自由度的力学系统 $\mathscr{M}$, 其位形空间 M 是一个 m 维流形. 设 $\mathbf{R}$ 为实数(时间)域, 则时间位形空间 $E = \mathbf{R} \times M$ (作为平凡丛 $\tau: E \to \mathbf{R}$) 的 1-射流形 $J^1(E)$[6,10]就是系统 $\mathscr{M}$ 的增广状态空间(或时间状态空间).

1-射流形 $J^1(E)$ 上的接触形式和 Cartan 形式在后面的理论叙述中起着十分重要的作用, 我们先简略地回顾一下它们的定义及其基本性质[6,10].

将 $t \in \mathbf{R}$ 考虑为 E 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数. 设 m 个 1-形式 $\omega^i \in \mathscr{X}^*(E)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 满足条件:

$$\mathbf{d}t \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m \neq 0 \tag{2.1}$$

那末, $\{dt; \omega^i\}$ 构成了 $\mathscr{X}^*(E)$ 的一组基, 因此我们有

$$\mathbf{d}\omega^k = -C^k_{0j}\, \mathbf{d}t \wedge \omega^j - (C^k_{ij}\, \omega^i/2) \wedge \omega^j, \tag{2.2}$$

其中 C^k_{0j}, $C^k_{ij} \in \mathscr{F}(E)$ $(i, j, k = 1, \cdots, m)$, 且具有以下性质:

$$C^k_{ij} = -C^k_{ji} \tag{2.3}$$

用自然投影映射 $\tau_{1,0}$: $J^1(E) \to J^0(E) = E$ 把 ω^i 以及 t 提升到 $J^1(E)$ 上, 且以相同的符号记之, 则在 $J^1(E)$ 上(2.2)式仍然成立. (同样地, 此时我们将函数 $C^k_{0j}, C^k_{ij} \in \mathscr{F}(J^1(E))$ 视为 E 上函数的提升.)

设 $j^1(\gamma)$: $\mathbf{R} \to J^1(E)$ 是截面 γ: $\mathbf{R} \to E$ 的一阶延伸(或 1-射), $X_{j^1(\gamma)} = j^1(\gamma)_*(d/dt) \in \mathscr{X}(J^1(E))$ 是一阶延伸曲线 $j^1(\gamma)$ 的切向量场, 则定义 $J^1(E)$ 上的实值函数 η^i $(i = 1, \cdots, m)$ 为

$$j^1(\gamma)^*\eta^i = j^1(\gamma)^*(X_{j^1(\gamma)} \cdot \omega^i) \qquad (\gamma \in \Gamma(E)) \tag{2.4}$$

容易证明, $J^1(E)$ 上 $2m+1$ 个 1-形式 $\{\mathbf{d}t; \omega^i; \mathbf{d}\eta^i\}$ 构成了 $\mathscr{X}^*(J^1(E))$ 的一组基. 出于力学上的考虑[11,12], 我们把这组基以及它的对偶基 $\{\partial_t, X_i, \partial_i \equiv \partial_{\eta^i}\}$ 分别称为 $\mathscr{X}^*(J^1(E))$ 和 $\mathscr{X}(J^1(E))$ 的 Poincaré 基, 这与数学上的 Cartan 活动标架[6]是一致的. 根据对偶基的定义, 可以将(2.2)式改写为

$$[\partial_t, X_j] = C^k_{0j}\, X_k; \quad [X_i, X_j] = C^k_{ij}\, X_k \tag{2.5}$$

引入 $J^1(E)$ 上的接触形式

$$\theta^i = \omega^i - \eta^i \mathbf{d}t \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{2.6}$$

它们满足接触条件:

$$j^1(\gamma)^*\theta^i = 0 \qquad (\gamma \in \Gamma(E)) \tag{2.7}$$

且称由 $\{\theta^i\}$ 张成的 Pfaff 系统 $\mathscr{C} = \mathrm{Span}\{\theta^i \mid i = 1, \cdots, m\}$ 为 $J^1(E)$ 上的接触系统.

所谓关于函数 $F \in \mathscr{F}(J^1(E))$ 的 Cartan 形式是指 $J^1(E)$ 上唯一的一个满足下述条件的 1-形式 $\Theta(F)$:

i) $\Theta(F)-F\mathrm{d}t\in\mathscr{E}$ (2.8a)

ii) $\mathrm{d}\Theta(F)\in\mathscr{X}^*(J^1(E))\wedge\mathscr{E}$ (2.8b)

这个定义是良义的，并且，由直接验算可得

$$\Theta(F)=F\mathrm{d}t+(\partial_i F)\theta^i \tag{2.9a}$$

$$\mathrm{d}\Theta(F)=(\mathrm{d}(\partial_i F)-(C^k_{0i}+C^k_{ji}\eta^j)(\partial_k F)\mathrm{d}t-(X_i F)\mathrm{d}t)\wedge\theta^i$$

$$-(C^k_{ji}(\partial_k F)\theta^j\wedge\theta^i)/2 \tag{2.9b}$$

从 Lagrange 观点来看，在位形空间 M 上的一个非完整力学系统 $\mathscr{M}$ 由一组力学量$(L,\mathscr{M},\mathscr{P})$唯一地描写[6]。这里，$L\in\mathscr{F}(J^1(E))$为系统 $\mathscr{M}$ 的 Lagrange 函数；$\mathscr{M}\in\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{M}$ 的力形式，即存在广义力函数 $Q_i\in\mathscr{F}(J^1(E))$使得 $\mathscr{M}=Q_i\theta^i$；$\mathscr{P}\subset\mathscr{X}^*(J^1(E))$是 $\mathscr{M}$ 的一个（非完整）约束系统，它是 $J^1(E)$上的一个 r 维$(r<m)$Pfaff 系统。我们记$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P},)$。

R. Hermann 对于一类特殊形式的约束 Pfaff 系统 $\mathscr{P}=\mathrm{Span}\{\tau^*_{1,0}\mathscr{P}_E\}(\mathscr{P}_E\subset\mathscr{X}^*(E))$研究了力学系统 $\mathscr{M}$ 的微分几何结构的问题[4,6]，这对应于经典理论的一阶线性约束组。本节我们把他的思想推广到一般的一阶约束组，关键是找出一个适当形式的约束 Pfaff 系统。D.G.B(Edlen 曾经由数学的观点给出过一个推广形式[5]，他认为 $J^1(E)$上任意一个 Pfaff 系统都可以作为力学系统 $\mathscr{M}$ 的约束 Pfaff 系统。这样，非完整力学系统的运动轨线就是一个带乘子的作用量泛函的极值曲线[5]，从传统力学观点看来这是不尽恰当的[13]。

如前所述，本文将致力于研究 Четаев 型非完整力学系统[14]。这一类力学系统可以用微分几何的语言"内禀地"定义。为此，我们先引入 Cartan 系统的概念：

定义1 设$\{f^a\in\mathscr{F}(J^1(E))|a=1,\cdots,r<m\}$是 $J^1(E)$ 上的一组函数，并且矩阵$[\partial_i f^a]$具有最大秩 r。则称由 r 个关于函数 f^a 的 Cartan 形式所张成的 Pfaff 系统

$$\mathscr{P}=\mathrm{Span}\{\Theta(f^a)|a=1,\cdots,r\} \tag{2.10}$$

为由函数组$\{f^a\}$生成的 Cartan 系统。我们把 $\mathscr{P}$ 的生成函数组$\{f^a\}$记为$\mathscr{Y}(\mathscr{P})$。

显然，根据这个定义，Cartan 系统 $\mathscr{P}$ 是 $J^1(E)$上的一个 r 维 Pfaff 系统。这样，我们就可以方便地叙述为

定义2 非完整力学系统$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$称为是 Четаев 型的，如果其中的约束Pfaff系统 $\mathscr{P}$ 是一个 r 维$(r<m)$Cartan 系统。其中 $\mathscr{P}$ 称为$\mathscr{M}$ 的 Четаев 型约束系统，$\mathscr{P}$ 的生成函数 $f^a\in\mathscr{Y}(\mathscr{P})$称为 $\mathscr{M}$ 的约束函数。

注记 1°如果 $\mathscr{Y}(\mathscr{P})$是一组 η^i 的线性函数，则容易验证定义 2 与 R. Hermann 研究过的情形[4]是一致的。

2°我们可以根据 Frobenius 定理[1]定义：Четаев 型约束系统 $\mathscr{P}$ 是完整的，如果 Pfaff 系统 $\mathscr{P}$ 在 Frobenius 意义下是完全可积的。不难证明，对于完整的 Четаев 型约束系统，其生成函数组$\mathscr{Y}(\mathscr{P})=\{f^a|a=1,\cdots,r\}$必定是一组 η^i 的线性函数。这是因为，$\mathscr{P}$ 在 Frobenius 意义下完全可积的充要条件为

$$\mathrm{d}\Theta(f^a)\wedge\Theta(f^1)\wedge\cdots\wedge\Theta(f^r)\equiv0\quad(a=1,\cdots,r) \tag{2.11}$$

于是，我们恒有 $\partial_i\partial_j f^a\equiv0$。

3°如果给定 E 上的一组函数$\{g^a\in\mathscr{F}(E)\}$，那末我们可以根据2°定义由$\{g^a\}$所生成的 Четаев 型约束系统为 $\mathscr{P}_H=\mathrm{Span}\{\mathrm{d}(\tau^*_{1,0}g^a)\}$。自然，这是一个完整的约束系统。

4°按通常的定义，如果 Hess 矩阵$[\partial_i\partial_j L]$处处非异，则我们就说系统 $\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$是正则的。在本文中，我们只考虑正则的 Четаев 型非完整力学系统。

下面，我们讨论如何刻化非完整力学系统的动力学特征。仿照完整力学系统的考虑[8,9]，我们给出以下的定义：

定义3 设$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$是一个Четаев型非完整力学系统。且设$\Omega(L,\mathscr{M})$为完整力学系统$\mathscr{M}_H=(M,L,\mathscr{M})$的动力学2-形式，即

$$\Omega(L,\mathscr{M})=\mathrm{d}\Theta(L)+\mathscr{M}\wedge\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

其中$\Theta(L)$是关于Lagrange函数L的Cartan形式。则称$J^1(E)$上的一个2-形式$\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})$是$\mathscr{M}$的一个动力学2-形式，如果

$$\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})-\Omega(L,\mathscr{M})\in\mathscr{P}\wedge\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

定义4 设$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$，$X_L\in\mathscr{X}(J^1(E))$。则$X_L$称为$\mathscr{M}$的Lagrange向量场，如果存在$\mathscr{M}$的一个动力学2-形式$\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})$使得

$$X_L\cdot\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})=0,\quad X_L\cdot\mathrm{d}t=1,\quad X_L\cdot\mathscr{P}=0 \tag{2.14a、b、c}$$

对于正规的力学系统$\mathscr{M}$，2-形式$\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})$是最大秩的[1]，故$\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})$的特征丛

$$\mathrm{Ker}\,\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})=\{X\in\mathscr{X}(J^1(E))\,|\,X\cdot\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})=0\} \tag{2.15}$$

是$J^1(E)$上一线性平凡丛。因而Lagrange向量场X_L就是系统$\mathscr{M}$的“单位”特征向量场。

此外，利用(2.9b)式将(2.14a)式展开并取$\mathrm{d}\eta^i(i=1,\cdots,m)$的系数相等，我们得到

$$(\partial_i\partial_jL)(X_L\cdot\theta^j)=0$$

而$[\partial_i\partial_jL]$处处非异，故有 $X_L\cdot\theta^j=0\qquad(j=1,\cdots,m)$

于是，我们就得到了Lagrange向量场X_L的一个重要性质：

$$X_L\cdot\mathscr{C}=0 \tag{2.16}$$

这表明Lagrange向量场X_L是一个二阶微分方程[1]。

根据这条性质和流形上分析的基本运算公式容易求出Lagrange向量场的显式：

命题1 向量场$X_L\in\mathscr{X}(J^1(E))$是系统$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$的Lagrange向量场当且仅当

$$X_L=\partial_t+\eta^iX_i+\Lambda^i\partial_i \tag{2.17}$$

并且满足下列Poincaré恒等式

$$\mathbf{L}_{X_L}(\partial_iL)-(C^k_{0i}+C^k_{ji}\eta^j)(\partial_kL)-X_iL=Q_i+\lambda_\alpha(\partial_if^\alpha),$$
$$(i,j,k=1,\cdots,m;\ \alpha=1,\cdots,r) \tag{2.18}$$

以及约束方程 $f^\alpha=0\qquad(\alpha=1,\cdots,r)$ (2.19)

这里，$\{\partial_t,X_i,\partial_i\}$是$\mathscr{X}(J^1(E))$的Poincaré基；$f^\alpha\in\mathscr{Y}(\mathscr{P})$为$\mathscr{M}$的约束函数；$Q_i\in\mathscr{F}(J^1(E))$为$\mathscr{M}$的广义力函数；$\lambda_\alpha\in\mathscr{F}(J^1(E))$为Lagrangian乘子；$\Lambda^i\in\mathscr{F}(J^1(E))$给出了系统$\mathscr{M}$的在经典意义下的动力学方程：

$$\dot{\eta}^i=\Lambda^i\qquad(i=1,\cdots,m) \tag{2.20}$$

我们看到，(2.17)式就是经典理论中以Poincaré-Четаев变量[11,12]表示的Lagrange乘子方程。

三、约束的嵌入

本节讨论Четаев型非完整力学系统的Lagrange向量场在约束子流形上的表示。

设$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$。定义系统$\mathscr{M}$的约束子流形为

$$N=\{j^1(\gamma)(t)\in J^1(E)\,|\,t\in\mathbf{R};\ \gamma\in\Gamma(E);\ j^1(\gamma)^*\mathscr{P}=0\} \tag{3.1}$$

这是$J^1(E)$的一个余维$r(r=\dim\mathscr{P})$子流形。记$\mathbf{i}$：$N\to J^1(E)$为包含映射。

再引入 Pfaff 系统$\mathbf{i}^*\mathscr{P}$的相伴模：

$$\bar{V}(\mathscr{P})=\{\bar{X}\in\mathscr{X}(N)\mid X\cdot\mathscr{P}=0\} \tag{3.2}$$

它是 $\mathscr{X}(N)$的一个$\mathscr{F}(N)$子模。设$\bar{V}^*(\mathscr{P})$是$\bar{V}(\mathscr{P})$的对偶模，则简单的代数考虑表明：

$$\mathscr{X}^*(N)=\bar{V}^*(\mathscr{P})\oplus\mathbf{i}^*(\mathscr{P}) \tag{3.3}$$

这里"$\oplus$"表示$\mathscr{X}^*(N)$中两个的子模的直积。若pr：$\mathscr{X}(N)\to\bar{V}(\mathscr{P})$（或$\mathscr{X}^*(N)\to\bar{V}^*(\mathscr{P})$）为投影映射，则对于任意给定的 $X\in\mathscr{X}(N)$和$\theta\in\mathscr{X}^*(N)$，我们记 $\bar{X}=pr(X)$，$\bar{\theta}=pr(\theta)$。

由于在非完整情形$\mathscr{P}$不是完全可积的，所以$\bar{V}(\mathscr{P})$对于 Lie 括号的运算是不封闭的。换言之，$\bar{V}(\mathscr{P})$中的向量场并不构成$\mathscr{X}(N)$的 Lie 子代数。

根据定义，系统$\mathscr{M}$的 Lagrange 向量场 X_L 与约束子流形 N 相切，因而 X_L 的积分曲线与$\bar{X}_L=X_L|N$ 的积分曲线是一致的。我们称 $\bar{X}_L$ 为$\mathscr{M}$的约束嵌入 Lagrange 向量场。显然，$\bar{X}_L\in\bar{V}(\mathscr{P})$。我们希望进一步给出 $\bar{X}_L$ 的显式表达。为此我们还需要以下的

定义5 设$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$，则称 N 上的一个2-形式$\bar{\Omega}$为$\mathscr{M}$的约束嵌入动力学2-形式，如果对于任意的$X\in\mathscr{X}(N)$，

$$\bar{X}\cdot\bar{\Omega}=X\cdot\mathbf{i}^*\Omega(L,\mathscr{M}) \tag{3.4}$$

其中 $\Omega(L,\mathscr{M})$由(2.11)式给出。

引理1 上述的2-形式$\bar{\Omega}$在 N 上唯一地存在，并且作为$\bar{V}(\mathscr{P})$上的双线性映射，它具有最大秩 $2(m-r)+1$。

只要注意到$[\partial_i f^a]$是最大秩的，这个引理容易通过 $\Omega(L,\mathscr{M})$和 $\mathscr{P}$ 的表达式（第三节）加以证明。我们略去这个证明的细节。

据此，我们有以下的结论：

命题2 系统$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$的约束嵌入 Lagrange 向量场$\bar{X}_L$由

$$\bar{X}_L\cdot\bar{\Omega}=0;\quad \bar{X}_L\cdot\mathbf{d}t=1 \tag{3.5}$$

完全确定，其中$\bar{\Omega}$是$\mathscr{M}$的约束嵌入动力学2-形式。

证明 根据(2.14)式易知$\bar{X}_L=X_L|N$由

$$\bar{X}_L\cdot\mathbf{i}^*\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})\in\mathbf{i}^*\mathscr{P};\quad \bar{X}_L\cdot\mathbf{d}t=1$$

完全确定。而上式与(3.5)式等价，因为$\bar{X}_L\in\bar{V}(\mathscr{P})$。故命题得证。

利用(3.5)式我们可以一般地写出约束嵌入 Lagrange 向量场的显式。但在这里，我们不失一般性地考虑一种重要的特殊情形：

命题3 设$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$。且设

$$\mathscr{Y}(\mathscr{P})=\{\eta^a-F^a\mid F^a\in\mathscr{F}(J^1(E));\ \partial_\beta F^a=0;\ \alpha,\beta=n+1,\cdots,m;\ n=m-r\} \tag{3.6}$$

如果

$$X_L=\partial_t+\eta^s X_s+\Lambda^s\partial_s \qquad (s=1,\cdots,m)$$

是系统$\mathscr{M}$的 Lagrange 向量场（见命题1），那末约束嵌入 Lagrange 向量场为

$$\bar{X}_L=Y_0+\eta^i Y_i+\Lambda^i\partial_i \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{3.7}$$

并且满足约束嵌入形式的 Poincaré恒等式[8]

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\bar{X}_L}(\partial_j\bar{L})-(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\partial_k\bar{L})-Y_i\bar{L}-(G^a_{0i}+G^a_{ji}\eta^j\\+(\partial_j C^a_i)\Lambda^j)\overline{(\partial_a L)}=P_i\quad (i,j,k=1,\cdots,n;\ \alpha=n+1,\cdots,m,)\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中

$$\bar{L}=\mathbf{i}^*L;\qquad \overline{\partial_a L}=\mathbf{i}^*(\partial_a L) \tag{3.9}$$

$$C^a_i=\partial_i F^a;\qquad P_j=Q_i+C^a_i Q_a \tag{3.10}$$

$$Y_0=\partial_t+(F^a-C^a_i\eta^j)X_a;\qquad Y_j=X_i+C^a_i X_a \tag{3.11}$$

函数$K^k_{0i}, K^k_{ji}, G^a_{0i}, G^a_{ji} \in \mathscr{F}(N)$由下式确定：

$$[Y_0, Y_i]=K^k_{0i}Y_k+G^a_{0i}X_a;\ [Y_j, Y_i]=K^k_{ji}Y_k+G^a_{ji}X_a \tag{3.12a、b}$$

证明 由(3.6)式，包含映射$\mathbf{i}$：$N\to J^1(E)$定义为

$$\mathbf{i}:\ (t,q,(\eta^i)_{i=1,\dots,n})\to(t,q,\eta^i)_{i=1,\dots,m}),$$

其中$t\in\mathbf{R}$，$q\in M$，$\eta^a=F^a(a=n+1,\cdots,m)$。于是，$Y_0\cdot\mathbf{i}^*\mathscr{P}=0$；$Y_i\cdot\mathbf{i}^*\mathscr{P}=0$。
因为Y_0，Y_i，∂_i是线性无关的，则经维数分析可知：$\{Y_0;\ Y_i;\ \partial_i\}$构成$\overline{V}(\mathscr{P})$的一组基。将$\overline{X}_L$在这组基下表出即得(3.7)式。

以下我们记$\theta^a=\mathbf{i}^*(\omega^a-F^a\mathbf{d}t)$，$\theta^i=\mathbf{i}^*\theta^i$，则我们有

$$\mathbf{i}^*\Theta(\eta^a-F^a)=\mathbf{i}^*(\omega^a-F^a\mathbf{d}t)-C^a_i(\mathbf{i}^*\theta^i)=\theta^a-C^a_i\theta^i \tag{3.13}$$

利用上式，经简单的计算得

$$\overline{\mathbf{d}\theta^k}=-(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)\mathbf{d}t\wedge\theta^i-\frac{1}{2}K^k_{ji}\theta^j\wedge\theta^i-\mathbf{d}\eta^k\wedge\mathbf{d}t \tag{3.14}$$

且对于任意的$f\in\mathscr{F}(N)$，有

$$\overline{\mathbf{d}f}=(Y_0f)\mathbf{d}t+(Y_if)\omega^i+(\partial_if)\mathbf{d}\eta^i \tag{3.15}$$

因为$(\mathbf{i}^*\partial_i)\overline{L}$可以写成下述形式：

$$(\mathbf{i}^*\partial_i)\overline{L}=\mathbf{i}^*(\partial_iL)+C^a_i\mathbf{i}^*(\partial_aL)$$

是即

$$\mathbf{i}^*(\partial_iL)=\partial_i\overline{L}-C^a_i(\overline{\partial_aL}) \tag{3.16}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbf{i}^*\Theta(L)&=\overline{L}\mathbf{d}t+(\partial_i\overline{L})\theta^i+(\overline{\partial_aL})\theta^a-\overline{C^a_i(\partial_aL)}\theta^a\\&=\Theta(\overline{L})+(\overline{\partial_aL})(\theta^a-C^a_i\theta)\end{aligned} \tag{3.17}$$

根据定义5，

$$\overline{\Omega}=\mathbf{d}\overline{\Theta(L)}+(\overline{\partial_aL})(\overline{\mathbf{d}\theta^a}-C^a_i\overline{\mathbf{d}\theta^i}-\overline{\mathbf{d}C^a_i}\wedge\theta^i)+\overline{\mathbf{i}^*\mathscr{M}}\wedge\mathbf{d}t,$$

利用(3.14)和(3.15)式展开上式，我们最后得到

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}=&\mathbf{d}(\partial_i\overline{L})\wedge\theta^i-(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\partial_k\overline{L})\mathbf{d}t\wedge\theta^i-(Y_i\overline{L})\mathbf{d}t\wedge\theta^i\\&-(G^a_{0i}+G^a_{ji}\eta^j)(\overline{\partial_aL})\mathbf{d}t\wedge\theta^i-(\partial_jC^a_i)(\overline{\partial_aL})\mathbf{d}\eta^j\wedge\theta^i\\&-\frac{1}{2}(K^k_{ji}(\partial_k\overline{L})+G^a_{ji}(\overline{\partial_aL}))\theta^j\wedge\theta^i-P_i\mathbf{d}t\wedge\theta^i\end{aligned} \tag{3.18}$$

这样，将(3.7)和(3.18)两式代入(3.5)式即可证明(3.8)式成立。

注记 显然地，利用(3.7)式可得 $\mathbf{L}_{\overline{X}_L}\partial_i\equiv[\overline{X}_L,\partial_i]=-Y_i$
因此，根据流形上分析中熟知的关系式：$\mathbf{L}_{[\overline{X}_L,\partial_i]}=[\mathbf{L}_{\overline{X}_L},\mathbf{L}_{\partial_i}]$，
得

$$\mathbf{L}_{\overline{X}_L}(\partial_i\overline{L})=\partial_i(\mathbf{L}_{\overline{X}_L}\overline{L})+(\mathbf{L}_{\overline{X}_L}\partial_i)\overline{L}=\partial_i(\mathbf{L}_{\overline{X}_L}\overline{L})-Y_i\overline{L} \tag{3.19}$$

将上式代入(3.8)式，我们就得到 Nilson 形式的 Poincaré 恒等式（参见[15]）：

$$\partial_i(\mathbf{L}_{\overline{X}_L}\overline{L})-(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\partial_k\overline{L})-2Y_i\overline{L}-(G^a_{0i}+G^a_{ji}\eta^j+(\partial_jC^a_i)(\overline{\partial_aL})=P_i \tag{3.20}$$

推论1 设$\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$。且设

$$\mathscr{P}=\mathrm{Span}\{\Theta(\eta^a)|_{a=n+1,\dots,m}\}$$

那末，约束嵌入 Lagrange 向量场$\overline{X}_L$为：

$$\overline{X}_L=\partial_t+\eta^iX_i+\Lambda^i\partial_i, \tag{3.21}$$

且满足恒等式：

$$\mathbf{L}_{\bar{X}_i}(\partial_i L)-(C_{0i}^k+C_{ji}^k)(\partial_k L)-(C_{0i}^\alpha+C_{ji}^\alpha\eta^j)(\partial_\alpha L)-X_i\bar{L}=Q_i \quad (3.22)$$

特别地，若 $\mathscr{P}=\mathrm{Span}\{\Theta(\eta^a)\}$是完整的，则

$$C_{0i}^\alpha=C_{ji}^\alpha=0 \quad (3.23)$$

因此，Lagrange 向量场(3.21)满足以下的 Poincaré 恒等式[11,12]：

$$\mathbf{L}_{\bar{X}_i}(\partial_i\bar{L})-(C_{0i}^k+C_{ji}^k\eta^j)(\partial_k\bar{L})-X_i\bar{L}=Q_i \quad (3.24)$$

证明 推论的前半部分是显然的。现证后半部分：

由(2.9a)式得$\Theta(\eta^a)=\omega^a$。因为 $\mathscr{P}$ 是完整的，亦即 $\mathscr{P}$ 在 Frobenius 意义下完全可积，那末由 Frobenius 定理可知：$\mathscr{P}$ 在 F 上的相伴模

$$\bar{V}_E(\mathscr{P})=\mathrm{Span}\{\partial_t,X_1,\cdots,X_n\}$$

是对合的，即 $[\partial_t,X_i]\in\bar{V}_E(\mathscr{P})$；$[X_j,X_i]\in\bar{V}_E(\mathscr{P})$

将上式与(2.5)式比较，我们看出有(3.23)式成立。

以上推论的后半部分是由 Четаев[12]证明的，但他当时只考虑了$[\partial_t,X_s]=0$ 的情况。

四、非完整力学系统的 Noether 型定理

著名的 Noether 定理[16]是分析力学中具有高度概括性的基本定理之一。近年来许多学者在这一方面做了大量有益的工作，旨在建立各种类型的推广定理，并阐明不同方法之间的内在联系（参见文献[17,9]）。然而，对于非完整力学系统还未曾获得相应的一般性结果。这里，我们应用前两节所讨论的 Lagrange 几何理论，将文献[9]中以一类向量场生成完整力学系统的首次积分的方法推广到非完整力学系统，

有两个推广方案。一是从(2.17)中解出 r 个 Lagrange 乘子 λ_a，然后再代回(2.17a)中，从而把非完整力学系统 $\mathscr{U}=(M,L,\mathscr{U},\mathscr{P})$约化为一个以各个约束函数 $f^a\in\mathscr{Y}(\mathscr{P})$作为特殊首次积分的完整力学系统$\tilde{\mathscr{U}}=(M,L,\tilde{\mathscr{U}})$，其中的力形式为$\tilde{\mathscr{U}}=\mathscr{U}+\lambda_a(\partial_i f^a)\theta^i$。这样便可以直接对系统$\tilde{\mathscr{U}}$应用已知的结论[9]。以下是一个有兴趣的推论（参见文献[9]中的命题3.4)：

命题 4 设$\tilde{\mathscr{U}}=(M,L,\tilde{\mathscr{U}})$是一个非化非完整力学系统。如果$Z\in\mathscr{X}(J'(E))$是关于$\tilde{\mathscr{U}}$的动力学2-形式$\Omega(L,\tilde{\mathscr{U}})$对称的，即

$$\mathbf{L}_Z\Omega(L,\tilde{\mathscr{U}})=0, \quad (4.1)$$

那末，对于每一个 $f^a\in\mathscr{Y}(\mathscr{P})$，$\mathbf{L}_Z f^a$ 是$\mathscr{U}$的一个首次积分。

我们着重讨论另一种推广，这将导致约束子流形上的 Noether 型定理。延用第三节的记号，但为了简单起见，我们记：

$$\Omega=\mathrm{i}^*\Omega(L,\mathscr{U}),\ \Theta(L)=\mathrm{i}^*\Theta(L),\ \Phi=\mathrm{i}^*\mathscr{U}\wedge\mathrm{d}t$$

在非完整力学系统 $\mathscr{U}=(M,L,\mathscr{U},\mathscr{P})$的约束子流形 N 上考虑问题，从方程(3.5)出发，我们可以应用文献[9]的论证方法得出与之相平行的一系列结果。首先，我们有

命题 5 设$\bar{\Omega}$, $\bar{X}_L$ 分别是系统 $\mathscr{U}=(M,L,\mathscr{U},\mathscr{P})$的约束嵌入动力学2-形式和 Lagrange 向量场。定义

$$\bar{V}=\{\bar{Y}\in\bar{V}(\mathscr{P})\,|\,\mathrm{d}(\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}+\rho)=0,\ \text{对于某个}\ \rho\in\mathrm{i}^*\mathscr{P}\ \text{成立}\} \quad (4.2)$$

则 $G\in\mathscr{F}(N)$是$\mathscr{U}$的一个（局部）首次积分，即

$$\mathbf{L}_{\bar{X}_L}G=0 \quad (4.3)$$

当且仅当存在一个向量场$\bar{Y}\in\bar{V}$使得

$$\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}=\overline{\mathbf{d}G} \tag{4.4}$$

证明 首先应用性质$\bar{X}_L\in\bar{V}(\mathscr{P})$，不难证明(4.3)式与

$$\bar{X}_L\cdot\overline{\mathbf{d}G}=0 \tag{4.5}$$

等价。

这样，由$\bar{V}$的定义我们知道，对于任意给定的$\bar{Y}\in\bar{V}$，存在某个1-形式$\rho\in\mathbf{i}^*\mathscr{P}$使得

$$\mathbf{d}(\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}+\rho)=0$$

根据Poincare引理[1]，$\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}+\rho$是局部恰当的，亦即存在一个函数$G\in\mathscr{F}(N)$使得

$$\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}=-\mathbf{d}G-\rho$$

在每一点的某个邻域上成立。考虑到$\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}\in\bar{V}(\mathscr{P})$，$\rho\in\mathbf{i}^*(\mathscr{P})$，就有$\mathbf{d}G-\rho=\overline{\mathbf{d}G}$

因此 $$\bar{X}_L\cdot\overline{\mathbf{d}G}=\bar{X}_L\cdot\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}=0$$

"仅当"部分是下述引理的一个直接推论。

引理 2 定义一个$\mathscr{F}(N)$模映射σ: $\bar{V}(\mathscr{P})\to\bar{V}^*(\mathscr{P})$为

$$\sigma(\bar{X})=\bar{X}\cdot\bar{\Omega} \tag{4.6}$$

那末

$$\mathrm{Ker}\sigma=\mathrm{Span}\{\bar{X}_L\} \tag{4.7}$$

$$\mathrm{Im}\sigma=\{\bar{\theta}\in\bar{V}^*(\mathscr{P})\,|\,\bar{X}_L\cdot\bar{\theta}=0\} \tag{4.8}$$

证明 利用$\bar{\Omega}$是$V(\mathscr{P})$上最大秩的双线性映射，由简单的代数上的讨论即可证明（又见[9]）。

注记 与完整力学系统不同，在非完整情形，$\bar{V}$并不构成$\mathscr{X}(N)$的一个Lie子代数，同时一般也不会在关于$\bar{\Omega}$的对称向量场（参见命题4）的Lie导数下保持不变.

命题 5 建立了一类向量场$\bar{V}$和$\mathscr{M}$的所有首次积分之间的关系。如果$\bar{Y}\in\bar{V}$，$G\in\mathscr{F}(N)$满足关系(4.4)，则我们就说G是由$\bar{Y}$所生成的首次积分(或守恒量)。注意，向量场$h\bar{X}_L(h\in\mathscr{F}(N))$生成平凡的守恒量——常数。

下面，我们讨论如何利用$\bar{V}$中的向量场来构造$\mathscr{M}$的首次积分G及其逆问题。为此，我们证明

命题 6 向量场$\bar{Y}\in\bar{V}$当且仅当存在一个函数$g\in\mathscr{F}(N)$使得

$$\overline{\mathbf{L}_{\bar{Y}}\Theta(L)}+\bar{Y}\cdot\bar{\Phi}=\overline{\mathbf{d}g} \tag{4.9}$$

并且由$\bar{Y}$生成的守恒量为

$$G=g-\bar{Y}\cdot\Theta(L) \tag{4.10}$$

有时也称其为Noether守恒量。

证明 若$\bar{Y}\in\bar{V}$给定，则由(3.4)和(4.2)式知，存在唯一的一个1-形式$\rho\in\mathbf{i}^*\mathscr{P}$使得

$$\mathbf{d}(\bar{Y}\cdot\Omega+\rho)=0$$

于是，从(2.12)式推出

$$\mathbf{L}_{\bar{Y}}\mathbf{d}\Theta(L)+\mathbf{d}(\bar{Y}\cdot\Phi)+\mathbf{d}\rho=0$$

再一次应用Poincaré引理我们就有：对于N上的某个函数g，

$$\mathbf{L}_{\bar{Y}}\Theta(L)+\bar{Y}\cdot\Phi+\rho=\mathbf{d}g \tag{4.11}$$

至少在局部成立。将这个关系式投影到$\bar{V}^*(\mathscr{P})$上，即得(4.9)式。反之亦然。

将(4.11)式改写为 $$\bar{Y}\cdot\mathbf{d}\Theta(L)+\bar{Y}\cdot\Phi+\rho=\mathbf{d}(g-\bar{Y}\cdot\Theta(L))$$

利用(3.4)式，上式成为 $\bar{Y}\cdot\Omega+\rho=\mathbf{d}(g-\bar{Y}\cdot\Theta(L))$，

这就意味着：$\bar{Y}\cdot\bar{\Omega}=\mathbf{d}(g-\bar{Y}\cdot\bar{\Theta}(L))$

把上式与(4.4)式比较，并注意到 $\bar{Y}\cdot\Theta(L)=\bar{Y}\cdot\Theta(\bar{L})$，我们看出，在相差一个常数的意义下，(4.10)式就是由$\bar{Y}$生成的守恒量。证毕。

现在假定系统$\mathscr{M}$的约束函数取(3.6)式的形式，并延用命题3的记号。这时$\bar{V}$中的向量场$\bar{Y}$可以用$\bar{V}(\mathscr{P})$的Poincaré基$\{Y_0,Y_i,\partial_i\}$表出：

$$\bar{Y}=\delta Y_0+\xi^i Y_i+\zeta^i\partial_i, \tag{4.12}$$

其中δ，ξ^i，$\zeta^i\in\mathscr{F}(N)$利用(3.17)和(4.12)式将(4.9)式展开，我们便得到$\bar{V}$的结构方程：

$$\bar{L}(\partial_i\delta)+(\partial_j\bar{L})(\partial_i\xi^j-\eta^j\partial_i\delta)+(\overline{\partial_a L})(\partial_j C^a_i)(\xi^j-\eta^j\delta)=\partial_i g \tag{4.13a}$$

$$\begin{aligned}&\bar{L}(Y_i\delta)+(\partial_j\bar{L})(Y_i\xi^j-\eta^j(Y_i\delta))+(\partial_j\partial_i\bar{L})\xi^j+(Y_j\partial_i\bar{L})\xi^j\\&\quad+(Y_0\partial_i\bar{L})\delta-((K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\partial_k\bar{L})+(G^a_{0i}+G^a_{ji}\eta^j)(\overline{\partial_a L}))\delta\\&\quad-(\overline{\partial_2 L})(\partial_j C^a_i)\zeta^j-P_i\delta=Y_i g\end{aligned} \tag{4.13b}$$

$$\begin{aligned}&\bar{L}(Y_0\delta)+(\partial_i L)(Y_0\xi^i-\eta^i(Y_0\delta))+(Y_0 L)\delta+(\overline{\partial_a L})(\partial_i C^a_j)\eta^j\zeta^i\\&\quad+((K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\partial_k\bar{L})+(G^a_{0i}+G^a_{ji}\eta^j)(\partial_a L)+Y_i\bar{L}+P_i)\xi^i-\eta^j((\partial_i\partial_j\bar{L})\zeta^i\\&\quad+(Y_i\partial_j\bar{L})\xi^i+(Y_0\partial_j\bar{L})\delta)=Y_0 g\quad(i,j,k=1,\cdots,n;\ \alpha=n+1,\cdots,m)\end{aligned} \tag{4.13c}$$

而，由向量场(4.12)生成的Noether守恒量为

$$G=g-\bar{L}\delta+(\partial_i\bar{L})(\xi^i-\eta^i\delta) \tag{4.14}$$

因此，若对于某一个函数$g\in\mathscr{F}(N)$结构方程(4.13)有解$\{\delta,\xi^i,\zeta^i\}$，那末我们便找出了系统$\mathscr{M}$的一个首次积分(4.14)。

我们注意到在(4.14)式中ζ^i并不出现，这决非是偶然的。事实上，ζ^i将由δ和ξ^i完全确定。因为由$\bar{\Omega}$，$\bar{X}_L$和$\bar{Y}$的定义易知，向量场$\bar{Y}$满足下列关系式：

$$[\bar{Y},\bar{X}_L]\cdot\bar{\Omega}=\bar{Y}\cdot\mathbf{d}(\overline{\bar{X}_L\cdot\Omega})-\bar{X}_L\cdot\mathbf{d}(\bar{Y}\cdot\bar{\Omega})-\bar{X}_L\cdot\bar{Y}\cdot\overline{\mathbf{d}\Phi} \tag{4.15}$$

注意到

$$\begin{aligned}[\bar{Y},\bar{X}_L]=&(\bar{Y}A^i-\bar{X}_L\xi^i)\partial_i-(\bar{X}_L\delta)Y_0+(\zeta^k-\bar{X}_L\xi^k)\\&-(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\xi^i-\eta^i\delta)Y_k\end{aligned} \tag{4.16}$$

并利用(3.20)式展开(4.15)式，取$\mathbf{d}\eta^j$的系数相等，我们得到ζ^i所满足的关系式：

$$\begin{aligned}&(\partial_j\partial_i\bar{L})-(\partial_j C^a_i)(\overline{\partial_a L})\zeta^k=(\partial_j P-(\partial_j C^a_i)Q_a)(\xi^i-\eta^i\delta)\\&\quad+(\partial_j\partial_i\bar{L}-(\partial_j C^a_i)(\overline{\partial_a L})(\bar{X}_L\delta-\eta^k(\bar{X}_L\delta)+(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^i)(\xi^i-\eta^i\delta)\end{aligned} \tag{4.17}$$

我们指出，在(4.15)式的右端前两项中并不含$\mathbf{d}\eta^i$，这是因为$\bar{X}_L\cdot\bar{\Omega}$，$\bar{Y}\cdot\Omega-\mathbf{d}G\in\mathbf{i}^*\mathscr{P}$，其中$G$是由$\bar{Y}$生成的守恒量。

反之，根据命题5，对于任意给定的$\mathscr{M}$的首次积分$G\in\mathscr{F}(N)$，存在一个向量场(4.12)使得(4.4)式成立。应用(3.18)式展开(4.4)式，取$d\eta^j$的系数相等，得

$$(\partial_j\partial_i\bar{L}-(\partial_j C^a_i)(\overline{\partial_a L}))(\xi^i-\eta^i\delta)=-\partial_j G \tag{4.18}$$

如果逆矩阵$[g^{ij}]=[\partial_j\partial_i\bar{L}-(\partial_j C^a_i)(\overline{\partial_a L})]^{-1}$存在，则由(4.14)，(4.17)和(4.18)式，向量场$\bar{Y}\in\bar{V}$由下列关系式给定：

$$\delta=\bar{L}^{-1}(g-G-(\partial_i\bar{L})g^{ij}(\partial_j G));\quad \xi^k=\eta^k\delta-g^{kj}(\partial_j G) \tag{4.19a、b}$$

$$\zeta^k=\bar{X}_L\xi^k-\eta^k(\bar{X}_L\delta)+(K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j+g^{kj}(\partial_j P_i-(\partial_j C^a_i)Q_a))(\xi^i-\eta^i\delta) \tag{4.19c}$$

注意，在这里$g\in\mathscr{F}(N)$是一个任意函数，所以δ是可以任意选取的。事实上，若$\bar{Y}\in\bar{V}$，则

对于任意的函数 $h\in\mathscr{F}(N)$ 有 $\bar{Y}+h\bar{X}_L\in\bar{\mathscr{V}}$，并且向量场 $\bar{Y}$ 和 $\bar{Y}+h\bar{X}_L$ 生成同一个首次积分G（仅相差一个常数）[9]。

进一步地，我们还有一个等价性命题，它的表述和证明都与文献[9]中对于完整力学系统给出的等价命题类似。

命题 7 设 $\bar{Y}\in\bar{\mathscr{V}}(\mathscr{P})$ 由(4.12)给出，则 $\bar{Y}$ 满足(4.9)式当且仅当 $\bar{Y}$ 满足下列条件：

i） $\partial_i\cdot(\bar{L}\bar{Y}\Theta(L)-\bar{d}g)=0$； $i=1,\cdots,n$, (4.20a)

ii） $\bar{X}_L\cdot d(g-\bar{Y}\cdot\Theta(\bar{L}))=0$； (4.20b)

iii） 由(4.12)式定义的函数 ξ^i 满足(4.17)式。

把(4.20)式展开便得到所谓的 Killing 型方程：

$$\bar{L}(\partial_i\delta)+(\partial_j\bar{L})(\partial_i\xi^j-\eta^j(\partial_i\delta))+(\overline{\partial_a L})(\partial_i C^a_j)(\xi^j-\eta^j\delta)=\partial_i g; \tag{4.21a}$$

$$\begin{aligned}&\bar{L}(Y_0\delta+\eta^i(Y_i\delta))+(Y_0\bar{L})\delta+(Y_i\bar{L})\xi^i\\&+(\partial_i\bar{L})(Y_0\xi^i+\eta^j(Y_j\xi^i)-\eta^i(Y_0\delta)-\eta^i\eta^j(Y_j\delta)+((K^k_{0i}+K^k_{ji}\eta^j)(\partial_k\bar{L})\\&+(G^a_{0i}+G^a_{ji}\eta^j)(\partial_a\bar{L}))(\xi^i-\eta^i\delta)+P_i(\xi^i-\eta^i\delta)=Y_0g+\eta^i(Y_ig)\end{aligned} \tag{4.21b}$$

这组方程连同(4.17)式与结构方程(4.13)等价。

Killing型方程(4.21)也可以由不变变分原理导出。这个原理来源于 E. Noether 对这一课题的早期研究。因此我们有理由将上述结果称之为 Noether 型定理。

三个特款：1°对于完整有势的力学系统 $\mathscr{M}_H=(M,L)$，我们有

$$K^k_{0i}=C^k_{0i};\ K^i_{ji}=C^k_{ji};\ G^a_{0i}=G^a_{ji}=C^a_i=0;\ P_i=0.$$

此时(4.21)式就退化为文献[8]中以 Poincaré-Четаев 群变量表示的 Killing 方程。

2°设$\mathscr{M}_H=(M,L,\mathscr{M})$是一个完整力学系统，它的力形式$\mathscr{M}$不是闭的，即 $d\mathscr{M}\neq0$，并且取$\mathscr{X}(J'(E))$的一组（局部）自然基$\{\partial_t,\ \partial_{q^i},\ \partial_{\dot{q}^i}\}$ ($t\in\mathbf{R}$, $q\in M$)，它们满足下述关系：

$$[\partial_t,\ \partial_{q^i}]=0,\ [\partial_{q^i},\ \partial_{q^j}]=0,$$

这样，我们的结果就与文献[9]中的结论一致。

3°若系统 $\mathscr{M}=(M,\ L,\ \mathscr{M}.\mathscr{P})$的 Четаев 型约束系统为 $\mathscr{P}=\mathrm{Span}\{\Theta(\eta^a)\mid a=n+1,\cdots,m\}$（参见推论 1），并且$[\partial_t,\ X_s]=0$，$Q_s=0$，则可以将(4.21)式化为文献[19]中以准速度表示的Killing 方程。

五、Noether型定理的若干应用实例

例 1、非完整力学系统的能量积分。考虑一个非完整力学系统 $\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$，它满足下述条件：

（i） 系统 $\mathscr{M}$ 的 Lagrange 函数 L 不显含时间 t；

（ii） 如果有非有势力 $Q_s(s=1,\cdots m)$存在，则都是陀螺力；

（iii） 所有的约束函数 $f^a=\eta^a-F^a\in\mathscr{Y}(\mathscr{P})$都是 η^s 的一次齐次函数；

（iv） 所有的系数 C^s_{0b} 均为零。

是即，我们有

$$\partial_t L=0,\ Q_s\eta^s=0;\ (\partial_s f^a)\eta^s=f^s;\ [\partial_t,\ X_s]=0\ (s=1,\cdots,m;\ a=n+1,\cdots,m) \tag{5.1}$$

由此可得 $\partial_t\bar{L}=(\overline{\partial_a L})(\partial_t F^a)$； $K^k_0 i=0$； $G^a_0 i=\partial_t C^a_i$；

$$F^a=C^a_i\eta^i;\ (\partial_t C^a_j)\eta^j=0;\ P_i\eta^i=0(i,j,k=1,\cdots,n=m-r;\ a=n+1,\cdots,m)$$

于是，对于函数 $g=0$，Killing 方程(4.21)有解

$$\delta=1;\ \xi^i=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

将此解代入(4.14)式，得到系统$\mathscr{M}$的能量积分：

$$G=\bar{L}-(\partial_i\bar{L})\eta^i=\text{const}. \tag{5.2}$$

例 2、广义的动量守恒定律. 设非完整力学系统 $\mathscr{M}=(M,L,\mathscr{M},\mathscr{P})$的 Четаев 型 Pfaff 约束系统 $\mathscr{P}=\text{Span}\{\Theta(\eta^a)\mid a=n+1,\ \cdots,\ m\}$，系统 $\mathscr{M}$ 的 Lagrange 函数为 $L=g_{ab}\eta^a\eta^b/2$ ($g_{ab}\in\mathscr{F}(E)$, a, $b=1$, $\cdots$, m)。如果系统 $\mathscr{M}$ 具有广义的动量积分：

$$G=\psi^i(\partial_i\bar{L})=\psi^i g_{ij}\eta^j \qquad (i,j=1,\cdots,n) \tag{5.3}$$

其中 $\psi^i\in\mathscr{F}(\mathsf{E})$，则由(4.19)式得

$$\delta=\bar{L}^{-1}g;\ \xi^i=\bar{L}g\eta^i-\psi^i, \tag{5.4}$$

且 ζ^i 由(4.19c)代确定. 将(5.4)式代入 Killing 方程(4.21)，则(4.20a)式成为恒等式，注意到在本例中：

$$K^h_{0i}=C^h_{0i};\ K^h_{ji}=C^h_{ji};\ G^a_{0i}=C^a_{0i};\ G^a_{ji}=C^a_{ji};$$

$$Y_0=\partial_t;\quad Y_i=X_i;\quad P_i=Q_i;\quad C^a_i=0,$$

于是，(4.20b)式成为

$$\begin{aligned}&g_{ij}\eta^j(\partial_t\psi^i+\eta^k(X_k\psi^i))+(C^k_{0i}+C^k_{ji}\eta^j)g_{kl}\eta^l\psi^i\\&\quad+(C^a_{0i}+C^a_{ji}\eta^j)g_{al}\eta^l\psi^i+Q_i\psi^i=0\end{aligned} \tag{5.5}$$

由命题5～7知，(5.5)式是系统$\mathscr{M}$具有广义的动量积分(5.3)的充要条件.

例 3、质点系关于动轴的动量矩守恒定理[20]. 考虑一个约化非完整力学系统 $\mathscr{M}=(\mathbf{R}^{3n}$, L, $\mathscr{M})$，其 Lagrange 函数为$L=(\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}^i\cdot\dot{\mathbf{r}}^i)/2$，并作用有外力$\mathbf{F}_i$(其中包括约束力).这里，$\mathbf{r}^i=(x^i,y^i,z^i)$是 $\mathbf{R}^3$ 中的矢量，m_i 均为常数，$(\dot{\ })\equiv d(\quad)/dt$

假定 $\mathbf{e}(t)$是 $\mathbf{R}^3$ 中基于某动点 $A(t)$的一个活动单位矢量. 则根据命题 6 和 Killing 型方程(4.21)：由

$$\delta=0;\ \boldsymbol{\xi}^i=(\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times\mathbf{e},$$

所确定的向量场

$$Y=\delta\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\xi}^i\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}^i}+\boldsymbol{\zeta}^i\frac{\partial}{\partial\dot{\mathbf{r}}^i}$$

生成首次积分

$$G=\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}^i}\cdot((\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times\mathbf{e}) \tag{5.6}$$

当且仅当矢量 $\mathbf{e}(t)$满足下列条件

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}^i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}((\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times\mathbf{e})+\mathbf{F}_i\cdot((\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times\mathbf{e})=0 \tag{5.7}$$

记$\mathbf{K}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}^i}=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}^i$ 为$\mathscr{M}$的动量；$\mathbf{H}_A=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}^i}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times m_i\dot{\mathbf{r}}^i$ 为$\mathscr{M}$对动点 $A(t)$的动量矩；$\mathbf{M}_A=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathbf{r}^i-\mathbf{r}_A)\times\mathbf{F}_i$ 为各外力对点 $A(t)$合力矩，那末就可将 (5.6) 和

(5.7) 式改写为：

$$G=\mathbf{H}_A\cdot\mathbf{e} \tag{5.8}$$

$$\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r}_A\times\mathbf{e})+\mathbf{H}_A\cdot\dot{\mathbf{e}}+M_A\cdot\mathbf{e}=0 \tag{5.9}$$

这在物理上意味着：系统$\mathscr{M}$对于动轴$\mathbf{e}(t)$的动量矩是$\mathscr{M}$的运动积分当且仅当 (5.9) 式成立。

类似地，不难导出关于动轴的动量守恒定理（见[20]）

例 4、冰撬的简单问题。设一力学系统的 Lagrange 函数为

$$L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+k^2\dot{\varphi}^2)/2 \tag{5.10}$$

非完整约束函数为

$$f=\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi, \tag{5.11}$$

其中$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，$\varphi\in S^1$，且 m，k 为两个常数。则该系统的动力学2-形式 $\Omega=\Omega(L,\mathscr{M},\mathscr{P})$成为

$$\Omega=m\mathrm{d}\dot{x}\wedge(\mathrm{d}x-\dot{x}\mathrm{d}t)+m\mathrm{d}\dot{y}\wedge(\mathrm{d}y-\dot{y}\mathrm{d}t)+mk^2\mathrm{d}\dot{\varphi}\wedge(\mathrm{d}\varphi-\dot{\varphi}\mathrm{d}t)$$
$$+\lambda\sin\varphi(\mathrm{d}x-\dot{x}\mathrm{d}t)\wedge\mathrm{d}t-\lambda\cos\varphi(\mathrm{d}y-\dot{y}\mathrm{d}t)\wedge\mathrm{d}t$$

容易求出 Lagrange 乘子 λ 为

$$\lambda=-m\dot{\varphi}(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi).$$

因此，我们有

$$\mathbf{L}_{\partial\varphi}\Omega=-\mathrm{d}(mk^2\mathrm{d}\dot{\varphi})=0$$

即 ∂_φ 是Ω的对称向量场。于是，根据命题 4，∂_φ 生成一个新的首次积分：

$$\mathbf{L}_{\partial\varphi}f=\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=\text{const} \tag{5.12}$$

例 5、Appell 的例子[8]。设一力学系统的 Lagrange 函数为

$$L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/2-mgz \tag{5.13}$$

非完整约束为

$$f=\dot{z}-a(\dot{x}^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

其中$(x,\ y,\ z)\in R^3$，m，a，g 为常数。令取

$$\eta_1=\dot{x};\ \ \eta_2=\dot{y};\ \ \eta_3=\dot{z};$$

（为方便起见我们把上指标写成下指标）。那末，相应的 Poincaré 基成为

$$\partial_t;\ \ X_1=\partial_x;\ \ X_2=\partial_y;\ \ X_3=\partial_z;$$
$$\partial_1=\partial_{\dot{x}};\ \ \partial_2=\partial_{\dot{y}};\ \ \partial_3=\partial_{\dot{z}}.$$

根据(3.9)～(3.12)式我们有

$$\eta_3=F=a(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{1}{2}},\ \ C_1^3=\partial_1F=a\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$C_2^3=\partial_2F=a\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}};\ \ Y_0=\partial_t,$$

$$Y_1=X_1+a\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{1}{2}}X_3=\partial_x+a\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}\partial_z,$$

$$Y_2=X_2+a\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}X_3=\partial_y+a\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}\partial_z;$$

$$\bar{L}=m(a^2+1)(\eta_1^2+\eta_2^2)/2-mgz,\ \ \overline{\partial_3L}=mF=ma(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\partial_1\bar{L}=m(a^2+1)\eta_1;\qquad\qquad \partial_2L=m(a^2+1)\eta_2,$$

$$\partial_1C_1^3=a\eta_2^2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{3}{2}},\qquad \partial_2C_2^3=a\eta_1^2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\partial_2C_1^3=\partial_1C_2^3=-a\eta_1\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$Y_1\bar{L}=-mga\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$Y_2\bar{L}=-mga\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$K^k_{0i}=K^k_{ji}=K^a_{0i}=G^a_{ji}=0 \qquad (i,j,k=1,2;\ a=3)$$

将上述各式代入 Killing 型方程(4.21)，且令 $\delta=0$，得到

$$ma^2\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-1}(\eta_2\xi_1-\eta_1\xi_2)+m(a^2+1)(\eta_1(\partial_1\xi_1)+\eta_2(\partial_1\xi_2))=\partial_1 g \tag{5.15a}$$

$$ma^2\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-1}(\eta_1\xi_2-\eta_2\xi_1)+m(a^2+1)(\eta_1(\partial_2\xi_1)+\eta_2(\partial_2\xi_2))=\partial_2 g \tag{5.15b}$$

$$mga(\eta_1^2+\eta_2^2)^{-\frac{1}{2}}(\eta_1\xi_1+\eta_2\xi_2)=-\partial_t g-\eta_1(Y_1 g)-\eta_2(Y_2 g) \tag{5.15c}$$

容易验证，对于函数 $g=\eta_1\eta_2^{-1}$ 方程(5.15)有解：

$$\xi_1=-\eta_2^{-1}; \qquad \xi_2=\eta_1\eta_2^{-2}$$

于是，由(4.14)式得首次积分：

$$G=g-m(a+1)(\eta_1\xi_1+\eta_2\xi_2)=\eta_1\eta_2^{-1}$$

即

$$\eta_2=c\eta_1 \tag{5.16}$$

其中 c 是一个常数。

另外，根据例一，此系统还有能量积分：

$$m(a^2+1)(\eta_1^2+\eta_2^2)/2+mgz=\text{const} \tag{5.17}$$

这样，从上述两个首次积分(5.16)和(5.17)即可得到此系统的运动轨线[8]：

$$(c^2+1)^{\frac{1}{2}}(x-x_0)=c^{-1}(c^2+1)^{\frac{1}{2}}(y-y_0)=c^{-1}(z-z_0) \tag{5.18}$$

其中 x_0，y_0，z_0 是系统在 $t=0$ 时的位置坐标。

参 考 文 献

[1] Abraham, R. and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (2nd), Benjamin/Curmming, Reading, MA (1978).

[2] Marsden, J. E. and T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1983).

[3] Bleecker, D., *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Pub. Com., Inc., Massachusetts (1981).

[4] Hermann, R., *Geometry, Physics and Systems*, Dekker, New York (1973).

[5] Edelen, D. G. B., *Lagrangian Mechanics of Nonconservative Nonholonomic Systems*, Noordhoff, Leyden (1977).

[6] Hermann, R., The differential geometric structure of general mechanical systems from the Lagrangian point of view, *J. Math. Phys.*, **23**, (1982), 2077—2089.

[7] Langlois, M., Sur la mecanique analytique du corps solie et des systemes mon holonomes a liaisons du type Chetaev, *These de Doctorat d'Etat*, Besancon, France (1982).

[8] Ghori, Q. K. and M. Hussain, Poincaré Equations for Nonholonomic Dynamical Systems, *ZAMM*, **53** (1973), 391-396.

[9] Cantrijn, F., Vector fields generating invariants for classical dissipative systems, *J. Math. Phys.*, **23** (1982), 1589—1595.

[10] Garia. P. L., The Poincare-Cardan invariant in the calculus Variations, *Symp. Math.*, **14** (1974), 219—246.

[11] Poincare, H., Sur une forme nouvelle des equations de la mecanique, *Comp. Rend. Acad. Sci.*, **132** (1901), 369—371.

[12] Четаеь Н. Г., Об уравнениях пуанкаре, *ПММ*, **5** (1941), 253—262.

[13] Румянцев В. В., Об интегральных принципах для неголономных систем, *ПММ*, **46** (1982), 3—12.

[14] Четаев Н. Г., О Принципе Гоусса, Изв. Казанского Физико-Матем., Общества, **16** (1933), 68—71.

[15] Mei Feng-Xang, Nouvelles equations du mouement des systemes mecaniques non holonomic, *These de Doctorat d'Etat*, Nantes, France (1982).

[16] Noether, E., Invariante variations probleme, *Ges. Wiss.* Goettingen, **2** (1918), 235—257.

[17] Sarlet, W. and F. Cantrijn, Generalization of Noether's theorem in Classical mechanics, *SIAM Rew.*, **23** (1981), 467—494.

[18] Ghori, Q. K., Conservation laws for dynamical systems in Poincare-Chetaev variables, *Arch. Rat. Mech. Ana.* **64** (1977), 327—337.

[19] Djukic, Dj. S., Conservation laws in classical mechanics for quasi-coordinates, *Arch. Rat. Mech. Ana.* **56** (1974), 79—98.

[20] Козлов В.В. и Н. Н. Колеоников, О теоремах динамики, *ПММ*, **42** (1978), 28—33

The Differential Geometric Principle of the Nonholonomic Mechanical Systems of Chetaev's Type

Zhao Shi-ying

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper deals with the nonholonomic mechanical systems of Chetaev's type by use of modern diffefential geometric methods. Based on a precise definition of Chetaev-type constraint Pfaffian systems, the differential geometric structure is given for the description of nonholonomic mechanical systems. In this framework, the classical theory of Lagrange's equations with nonholonomic constraints is put into an invariant and coordinate free form. Furthermore, the problems of constraint imbedding and conservation laws are discussed within this framework, and the Noether-type thereom on constraint-imbedding submanifolds is obtained.