应用数学和力学，第7卷第8期（1986年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有限元解的梯度佳点*

黄 晓 凡

（湘潭大学数学系，1984年12月25日收到）

摘 要

我们考虑二阶椭圆方程的第一边值问题及奇妙族矩形元。文[2, 3, 9]证明了有限元解的梯度在高斯点具有超收敛性。

本文假定椭圆方程的系数在有界区域Ω中曲线S上有第一类间断，在此意义下推广了文[2,3,9]。

一、问题叙述和记号

我们考虑Dirichlet问题：

$$-(au_x+bu_y)_x-(bu_x+cu_y)_y+qu=f \qquad \text{在}\Omega\text{中} \tag{1.1}$$

$$u=0 \qquad \text{在}\partial\Omega\text{上} \tag{1.2}$$

其中Ω是边界平行于坐标轴的矩形区域，$\partial\Omega$是它的边界。设S是Ω中的分段光滑曲线，它把Ω分成两部分Ω_1和Ω_2。

与（1.1）和（1.2）相关联的双线性泛函是

$$B(u,v)=\iint_\Omega(au_xv_x+b(u_xv_y+u_yv_x)+cu_yv_y+quv)dxdy \tag{1.3}$$

我们假定：

i) a，b和$c\in W^1_\infty(\Omega_i)$ $(i=1,\ 2)$而且它们在S上有第一类间断。

ii) $q\in L_\infty(\Omega)$，$q\geqslant 0$，$f\in L_2(\Omega)$。

iii) $c_1\|u\|_1\leqslant|u|\leqslant c_2\|u\|_1$　对任意$u\in \mathring{H}^1(\Omega)$ (1.4)

其中$|u|=[B(u,\ u)]^{\frac{1}{2}}$

iv) u在Ω_1和Ω_2内满足方程（1.1）和(1.2)，且在间断线上有：

$$(au_x+bu_y)\cos(n,x)+(bu_x+cu_y)\cos(n,y)\Big|_{S^-}^{S^+}=0$$

其中S^-和S^+分别表示间断线S的两侧。

对任意$\Omega'\subset\Omega, W^k_p(\Omega')(1\leqslant p\leqslant\infty)$表示索伯列夫空间，其模和半模记为：

$$\|u\|_{k,p,\Omega'}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega')} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$|u|_{k,p,\Omega'}=\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega')}$$

我们简记$W^k_2(\Omega')=H^k(\Omega')$；$\|u\|_{k,2,\Omega'}=\|u\|_{k,\Omega'}$，当$\Omega'=\Omega$时下标$\Omega'$可以省去；记号$D^\alpha u$表

* 李灏推荐。

示对u求所有的$|\alpha|$阶偏导数。$\mathring{H}^1(\Omega)$表示$H^1(\Omega)$中边界为0的函数全体。

问题（1.1）和（1.2）的弱解是空间$\mathring{H}^1(\Omega)$中的函数，它满足

$$B(u, v)=(f, v) \qquad \text{对任意} v\in \mathring{H}^1(\Omega) \tag{1.5}$$

其中 $$(f, v)=\iint_\Omega fv\,dxdy$$

用平行于坐标轴的直线族$x=x_i$和$y=y_j$（$i=0, 1, \cdots, N_1$；$j=0, 1, \cdots, N_2$）把区域Ω划为有限数$M=N_1\times N_2$个小矩形。我们将只考虑S与这些剖分线的一部分重合的情形。任意一个矩形记为e_j（$j=1,2,\cdots, M$）；$h_j=(x_{j+1}-x_j)/2$；$k_j=(y_{j+1}-y_j)/2$；$h=\max(h_j k_i$；$0\leqslant j\leqslant N_1-1$；$0\leqslant i\leqslant N_2-1)$ 显然 $M=O(h^{-2})$。e_j的形心记为$T_j=(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$，$\rho_j=h_j k_i^{-1}$；假定$\rho\geqslant\rho_j\geqslant\rho^{-1}$其中$\rho$为一个正常数。节点集记为：

$$T=\{(x_i\, y_j);\ i=0, 1, \cdots, N_1;\ j=0, 1, \cdots, N_2\}$$

在以上假定下矩形元在Ciarlet-Raviart[4]的意义下正规。

我们考虑$\mathring{H}^1(\Omega)$中两种连续有限元。设P_2是由矩形四个角点上所给值确定的不完全二阶多项式或称双一次多项式；P_3是由矩形的四个角点及四边中点所给八个值确定的不完全三次多项式。设S_m为$C^0(\bar{\Omega})$的子空间：它的任意元素$v_h\in S_m$在每个单元上是P_m（$m=2, 3$）多项式。

有限元解$u_h\in S_m$由下式定义：

$$B(u_h, v_h)=(f, v_h) \qquad \text{对任意} v_h\in S_m \tag{1.6}$$

由[4]，离散误差$u-u_h$有下面的估记：

$$\|u-u_h\|_1\leqslant ch^{m-1}\|u\|_{m+1} \tag{1.7}$$

一般说来，(1.7)是最好的收敛阶。我们记G_m为P_m的高斯点的集合，以后将看到G_m即题目中说到的应力佳点集合。近似解u_h的超收敛性质或应力佳点性质将在这些点得到[9]。

我们引进映射：

$$x=x(\xi, \eta)=\bar{x}_j+h_j\xi;\quad y=y(\xi, \eta)=\bar{y}_j+k_j\eta \tag{1.8}$$

映射将e_j一一映到正方形$K=[-1, 1]\times[-1, 1]$上。逆映射为：

$$\xi=\frac{x-\bar{x}_j}{h_j}, \qquad \eta=\frac{y-\bar{y}_j}{k_j} \tag{1.9}$$

函数$v_h\in S_m$在e_j上具有下列表示：

$$v_h(x, y)=v_h(\xi, \eta)=\sum_i v_{h,i}N_i(\xi, \eta)$$

其中$v_{h,i}$是v_h在单元的四或八个节点上的值。函数$N_i(\xi, \eta)$将在下节详细论叙。

下列记号将在文章中用到：

$$a_j=a\rho_j^{-1};\quad c_j=\rho_j c;\quad q_j=k_j h_j q$$

$$\langle u, v\rangle_{e_j}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[a_j u_\xi v_\xi+b(u_\xi v_\eta+u_\eta v_\xi)+c_j u_\eta v_\eta+q_j uv]d\xi d\eta$$

$$|u|_{e_j}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{e_j}}.$$

容易看出

$$|v|_{1,e_j}\leqslant c|v|_e \tag{1.10}$$

二、形心坐标的性质[6],[7]

不失一般性，我们在$K=[-1, 1]\times[-1, 1]$上考虑两种逼近多项式($P_m(m=2, 3)$)。对

P_2来说，在节点$(\alpha,\ \beta)$处对应的形函数如下[6]：

$$N_{\alpha\beta}^{(2)}=(1+\alpha\xi)(1+\beta\eta)/4 \qquad \alpha,\ \beta=\pm1 \tag{2.1}$$

对P_3来说：

$$N_{\alpha\beta}^{(3)}=\begin{cases}(1+\alpha\xi)(1+\beta\eta)(\alpha\xi+\beta\eta-1)/4 & \alpha,\beta=\pm1\\(1+\alpha\xi)(1-\eta^2)/2 & \alpha=\pm1;\ \beta=0\\(1+\beta\eta)(1-\xi^2)/2 & \alpha=0;\ \beta=\pm1\end{cases} \tag{2.2}$$

记：$I_m=\{(i,\ j);\ 0\leqslant i,\ j\leqslant m;\ i+j\leqslant m\}$则有：

$$\sum_{(\alpha,\ \beta)} N_{\alpha\beta}^{(m)}\alpha^i\beta^j=\xi^i\eta^j \qquad (i,\ j)\in I_m \tag{2.3}$$

对任意$v_h\in S_m$我们有：

$$v_h=\sum_{(\alpha,\ \beta)} v_h(\alpha,\ \beta)N_{\alpha\beta}^{(m)}=\sum_{(i,j)\in I_m} a_{ij}\xi_i\eta_j \qquad 对任意(x,y)\in e_j \tag{2.4}$$

为简单起见，我们在K的八个节点顺次编号如图所示：

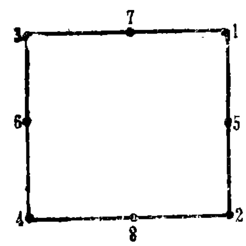

图 1

对$m=2$，我们有下列关系式：

$a_{00}=(v_1+v_2+v_3+v_4)/4$；$a_{01}=(v_1-v_2+v_3-v_4)/4$

$a_{10}=(v_1+v_2-v_3-v_4)/4$；$a_{11}=(v_1-v_2-v_3+v_4)/4$

任何两节点值之差v_p-v_q是a_{10}；a_{01}和a_{11}的线性组合：

$v_1-v_2=2(a_{01}+a_{11})$；$v_3-v_4=2(a_{01}-a_{11})$

$v_2-v_3=2(a_{10}-a_{01})$；$v_1-v_4=2(a_{10}+a_{01})$

对$m=3$我们有：

a_{20}；$a_{21}=(\delta^2v_7\pm\delta^2v_8)/4$，$a_{01}$；$a_{12}=(\delta^2v_5\pm\delta^2v_6)/4$

其中$\delta^2v_7=(v_1-2v_7+v_3)/2$；$\delta^2v_8$，$\delta^2v_5$和$\delta^2v_6$类似定义。

对于$m=2$，3显然有：

$$|v|_{1e_j}^2=\iint_{e_j}(v_x^2+v_y^2)\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(v_\xi^2+v_\eta^2)d\xi d\eta\geqslant c\sum_{i+j\neq0}a_{ij}^2 \tag{2.5}$$

其中$v=v_h\in S_m$。由此我们有下面的：

引理 若$v\in S_m$，则在任何单元e_j上有：

$$\sum_{i+j\neq0}a_{ij}\leqslant c|v|_{e_j} \tag{2.6}$$

$$\max_{(x,y)\in e_j}(|v_\xi|+|v_\eta|)\leqslant c|v|_{1,e_j} \tag{2.7}$$

$$|v_p-v_q|\leqslant c|v|_{1,e_j};\qquad p,\ q=1,\ 2,\ 3,\ 4\ 及\ m=2 \tag{2.8}$$

$$|\delta^2v_p|\leqslant c|v|_{1,e_j};\qquad p=5,\ 6,\ 7,\ 8\ 及\ m=3 \tag{2.9}$$

假定（1.1）和（1.2）的解$u\in H^{m+1}(\Omega)$，由索伯列夫嵌入定理[8]$u\in C^{m-1}(\bar\Omega)$[8]。如果解$u\bar\in H^{m+1}(\Omega)$但$u\in H^{m+1}(\Omega_1\cup\Omega_2)\cap\mathring{H}^1(\Omega)$；则对$m=2$和3总有$u\in C^0(\bar\Omega)$。因此可以对$u$进行插值。

由（2.3）和（2.4）我们有：

$$u-u_I=u^m+R_m \tag{2.10}$$

其中u_I表示u的P_m插值函数；

$$u^m=L_m(\xi)u_{\xi^m}^{(m)}+L_m(\eta)u_{\eta^m}^{(m)}\quad;\quad u_{\eta^m}^{(m)}=\frac{\partial^m u}{\partial\eta^m}$$

而一阶偏导数简记为 u_ξ和u_η； $u_{\eta^m}^{(m)}$ 简记为u_{η^m}；

$$L_m(\xi)=\frac{1}{m!}(\xi^m-\xi^{m-2})$$

$$R_m=-\int_0^1\frac{(1-t)^m}{m!}\sum_{(\alpha,\ \beta)}N_{\alpha\beta}[(\alpha-\xi)\partial_\xi+(\beta-\eta)\partial_\eta]^{m+1}u_{\alpha\beta}dt$$

其中 $u_{\alpha,\beta}=u(\xi+(\alpha-\xi)t,\ \eta+(\beta-\eta)t)$； ∂_ξ和∂_η表示偏导数算子。
容易看出：

$$\|u^m\|_j\leqslant ch^{m-j}\|u\|_{m+1};\quad \|R_m\|_j\leqslant ch^{m+1-j}\|u\|_{m+1}\qquad (j=0,\ 1)\tag{2.11}$$

三、主 要 结 果

引理3.1 设u是以下方程的弱解：

$$-(au_x)_x-(bu_y)_y+qu=f\qquad 在\Omega中\tag{3.1}$$

$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup S$； $u=0$，在S上；S在剖分线上，$u\in H^{m+1}(\Omega_i)(i=1,\ 2)$，则我们有：

$$|B(u-u_I,\ v)|\leqslant ch^m|v|\cdot\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\qquad 对任意v\in S_m\tag{3.2}$$

证 由（2.10）有：

$$B(u-u_I,\ v)=\langle u^m,\ v\rangle_{\Omega_1\cup\Omega_2}+\langle R^m,\ v\rangle_{\Omega_1\cup\Omega_2}$$

对任意$v\in S_m$成立。由（2.11）有：

$$|\langle R_m,\ v\rangle_{\Omega_1\cup\Omega_2}|\leqslant ch^m|v|\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\tag{3.3}$$

对$i=1,\ 2$：

$$\langle u^m,\ v\rangle_{\Omega_i}=\sum_{\Omega_i\cap e_j}\int_{-1}^1\int_{-1}^1[a_ju_\xi^mv_\xi+c_ju_\eta^mv_\eta+q_ju^mv]d\xi d\eta$$

$$=\sum_{1\leqslant j\leqslant M}\left(I_{e_j}^1+I_{e_j}^2+I_{e_j}^3\right)$$

$I_{e_j}^3$ 的估计是显然的：

$$\left|\sum_j I_{e_j}^3\right|=\left|\sum_{\Omega_i\cup e_j}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 q_ju^m\cdot vd\xi d\eta\right|\leqslant ch^m|v|_\Omega\cdot\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\tag{3.4}$$

记：$[u]_{e_j}=\left[\iint_{e_j}(|D^mu|^2+|D^{m+1}u|^2)\,dxdy\right]^{\frac12}$

并注意$|a_{j\xi}|\leqslant ch$的事实，则由分部积分可得：

$$\left|I_{e_j}^1\right|=\left|\int_{-1}^1a_jv_\xi[L_m(\xi)u_{\xi^m}+L_m(\eta)u_{\eta^m}]\Big|_{-1}^1d\eta-\int_{-1}^1\int_{-1}^1a_{j\xi}v_\xi u_{\xi^m}d\xi d\eta-\int_{-1}^1\int_{-1}^1v_{\xi^2}a_ju_{\xi^m}d\xi d\eta\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{-1}^1\int_{-1}^1L_m(\xi)u_{\xi^m}a_jv_{\xi^2}d\xi\,d\eta\right|+c\int_{-1}^1\int_{-1}^1(|D^{m+1}u|+|D^mu|)\,d\xi d\eta$$

当$m=2$时最后式子中第一项化为0；当$m=3$时，注意$|v_{\xi^2}|\leqslant c|v|_{1,e_j}$ 其中$L_m(\xi)$是关于ξ的奇函数，v_{ξ^2}与ξ无关因此有：

$$\left|\int_{-1}^1L_m(\xi)\,u_{\xi^m}a_jd\xi\right|$$

$$=\left|\int_0^1L_m(\xi)u_{\xi^m}a_jd\xi+\int_0^1L_m(-\xi)u_{\xi^m}(-\xi,\ \eta)\cdot a_j(-\xi,\ \eta)d\xi\right|$$

$$\leqslant c\int_{-1}^{1}\left|(a_j u_{\xi^m})_\xi\right| d\xi$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\xi)u_{\xi^m}v_{\xi^2}\,d\xi d\eta\right|\leqslant c|v|_{e_j}[u]_{e_j}h^m$$

总之，对$m=2$和$m=3$都有：

$$\left|\sum_j I_{e_j}^1\right|\leqslant ch^m\sum_j[u]_{e_j}|v|_{e_j}\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\ \Omega_1\cup\Omega_2}|v|_\Omega \tag{3.5}$$

$I_{e_j}^2$的处理与$I_{e_j}^1$的处理类似进行。引理证毕。

推论 在引理的假设下我们有：

$$\|u_h-u_I\|_1\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2} \tag{3.6}$$

证 因$u_h-u_I\in S_m$ 我们有：

$$|u_h-u_I|^2=B(u_h-u_I,\ u_h-u_I)=\langle u-u_I,\ u_h-u_I\rangle$$
$$\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\|u_h-u_I\|_1$$

由于$|\cdot|$与$\|\cdot\|_1$等价得(3.6)，证毕。

定理3.1 在引理3.1的假设下，我们有：

$$\mathrm{Er}|u-u_h|_{G_m}\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\qquad(m=2,3) \tag{3.7}$$

其中 $$\mathrm{Er}|u-u_h|_{G_m}=\frac{1}{N}\sum_{z\in G_m}[|(u-u_h)_x(z)|^2+|(u-u_h)_y(z)|^2]^{\frac{1}{2}}$$

G_m中点的总数是$N=O(h^{-2})$。

证 由(2.10)我们有：

$$(u-u_I)_\xi=\xi u_{\xi^2}+O(h^3)\qquad \text{当 } m=2$$
$$(u-u_I)_\eta=\eta u_{\eta^2}+O(h^3)\qquad \text{当 } m=2$$
$$(u-u_I)_\xi=(3\xi^2-1)u_{\xi^3}+O(h^4)\qquad \text{当 } m=3$$
$$(u-u_I)_\eta=(3\eta^2-1)u_{\eta^3}+O(h^4)\qquad \text{当 } m=3$$

所有式子都在高斯点为h^{m+1}阶量，因为其中第一项化为0。因此：

$$\mathrm{Er}|u-u_I|_{G_m}\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2} \tag{3.8}$$

由(2.7)得：

$$|Dv(x,y)|\leqslant ch^{-1}|v|_{1,e_j}\qquad v\in S_m \tag{3.9}$$

再由 Friedrichs 不等式得：

$$|Dv|\leqslant ch^{-2}|v|_{0,e_j}\qquad \text{对任意 } v\in S_m \tag{3.10}$$

令 $v=u_h-u_I$，则有：

$$\mathrm{Er}|u_h-u_I|_{G_m}\leqslant c|u_h-u_I|_{0,\Omega_1\cup\Omega_2}$$

由(3.6)得：

$$\mathrm{Er}|u_h-u_I|\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2} \tag{3.11}$$

综合(3.8)和(3.11)得：

$$\mathrm{Er}|u-u_h|_{G_m}\leqslant ch^m\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}$$；证毕。

引理3.2 设u是下式的解：

$$-(au_x+bu_y)_x-(bu_x+cu_y)_y+qu=f\qquad \text{在}\Omega\text{中} \tag{3.12}$$

$u=0$，在$\partial\Omega$上。假定S是一条平行于x轴并与剖分线重合的直线，则我们有：

$$|B(u-u_I,\ v)|\leqslant ch^m|v|\,\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\qquad \text{对任意 } v\in S_m \tag{3.13}$$

证　　$|B(u-u_I,v)|=|\langle u^m,v\rangle_{\Omega_1\cup\Omega_2}+\langle R^m,v\rangle_{\Omega_1\cup\Omega_2}|$

由(2.11)最后一项容易估计：

$$|\langle R_m,v\rangle|\leqslant ch^m|v|\,\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}$$

对 $k=1$，2 有：

$$\langle u^m,v\rangle_{\Omega_k}=\sum_{\Omega_k\cap e_j;1\leqslant j\leqslant M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[a_ju_\xi^mv_\xi+c_ju_\eta^mv_\eta$$

$$+q_ju^mv+b(u_\xi^mv_\eta+u_\eta^mv_\xi)]d\xi d\eta$$

$$=\sum_j(I_{e_j}^1+I_{e_j}^2+I_{e_j}^3+I_{e_j}^4+I_{e_j}^5)$$

其中 $I_{e_j}^1$，$I_{e_j}^2$ 和$I_{e_j}^3$ 已在引理3.1中作过估计。我们先估$I_{e_j}^5$，由单元合併技巧[1]：

$$I_{e_j}^5=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}b_ju_\eta^mv_\xi d\xi d\eta$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}b_jv_\xi(L_m(\eta)u_{\eta^m}+L_m(\xi)u_{\xi^m})_\eta d\xi d\eta$$

$$=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}L_m(\eta)u_{\eta^m}(b_{j\eta}v_\xi+b_jv_{\xi\eta})d\xi d\eta$$

$$+\int_{-1}^{1}(b_jv_\xi L_m(\eta)u_{\eta^m})\Big]_{-1}^{1}d\xi$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}b_jv_\xi L_m(\xi)u_{\xi^m\eta}\,d\xi d\eta$$

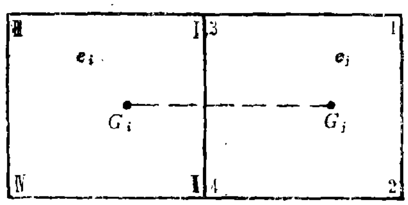

图　2

设 e_i 为与 e_j 相邻的单元，如图 2 所示：

当 $m=2$ 时：　$v_{\xi\eta}=[v_1-v_2-(v_3-v_4)]/4$　　在 e_j 中

$v_{\xi\eta}=[v_{\mathrm{I}}-v_{\mathrm{II}}-(v_{\mathrm{III}}-v_{\mathrm{IV}})]/4$　在 e_i 中

注意到单元边长有关系：$k_i=k_j$；$h_j\neq h_i$ 且有 $v_{\mathrm{I}}-v_{\mathrm{II}}=v_3-v_4$。因此，对应于 v_3-v_4 和 $v_{\mathrm{I}}-v_{\mathrm{II}}$ 的项有：

$$I_{ij}^5=I_i^5+I_j^5=\frac{v_3-v_4}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[(L_m(\eta)bu_{\eta^m})|_{G_j}-(L_m(\eta)\cdot b\cdot u_{\eta^m})|_{G_i}]d\xi d\eta$$

$$=k_i^m\frac{v_3-v_4}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}L_m(\eta)[(bu_{y^m})|_{G_j}-(bu_{y^m})|_{G_i}]d\xi d\eta$$

由于$|v_4-v_3|\leqslant c|v|_{1,e_j}$ 或 $|v_4-v_3|\leqslant c|v|_{1,e_i}$；得：

$$\left|\int_{-1}^{1}(bu_{y^m}|_{G_j}-bu_{y^m}|_{G_i})d\eta\right|\leqslant\int_{-1}^{1}\left|\int_{G_i}^{G_j}(bu_{y^m})_x\,dx\right|d\eta$$

$$\leqslant k_i^{-1}\iint_{e_i+e_j}|(bu_{y^m})_x|dxdy$$

$$\leqslant k_i^{-1}\left(\iint_{e_i+e_j}dxdy\right)^{\frac12}\left(\iint_{e_i+e_j}|(bu_{y^m})_x|^2dxdy\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant c([u]_{e_i}+[u]_{e_j})$$

由此得：$|I_{ij}^5|\leqslant ch^m([u]_{e_i}|v|_{1,e_i}+[u]_{e_j}\cdot|v|_{1,e_j})$由于 S 平行于 x 轴，我们按上述做法，一个单元到另一个单元一直做到边界 $\partial\Omega$；由 u 满足零边值条件，我们最后得到：

$$|\sum_iI_{e_i}^5|\leqslant ch^m|v|\cdot\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\qquad\text{当 } m=2\text{ 时}\tag{3.14}$$

当 $m=3$ 时，$L_m(\eta)$是关于 η 的奇函数，$v_{\xi\eta}=(\alpha_{11}+2\alpha_{21}\xi+2\alpha_{12}\eta)$，前两项之和与 η 无关，因

此：
$$\left|\int_{-}^{1}\int_{-1}^{1} bL_m(\eta)u_{\eta^m}(\alpha_{11}+2\alpha_{21}\xi)\,d\xi d\eta\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{-1}^{1}\left[(\alpha_{11}+2\alpha_{21}\xi)\int_{-1}^{1} bL_m(\eta)u_{\eta^m}\,d\eta\right]d\xi\right|$$
$$\leqslant c|v|_{1,e_i}\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1} bL_m(\eta)u_{\eta^m}\,d\eta\right|d\xi$$
$$\leqslant c|v|_{1,e_j}\int_{-1}^{1}\left|\int_{0}^{1} bL_m(\eta)u_{\eta^m}\,d\eta+\int_{0}^{1} bu_{\eta^m}L_m\Big|_{-\eta}d\eta\right|d\xi$$
$$\leqslant c|v|_{1,e_i}k_i^m\int_{-1}^{1}\left|\int_{0}^{1} L_m(\eta)\int_{-\eta}^{\eta}(bu_{y^m})_y\,dyd\eta\right|d\xi$$
$$\leqslant c|v|_{1,e_i}k_i^m h_j^{-1}\iint_{e_i}|(bu_{y^m})_y|\,dxdy$$
$$\leqslant ch^m|v|_{1,e_j}[u]_{e_j}$$
由于 $\alpha_{12}=(\delta^2v_5-\delta^2v_6)/4$，我们可用 x 轴方向单元合併法处理 $v_{\xi\eta}$ 的第三项；因此，对 $m=3$ 我们也有：
$$\left|\sum_i I_{e_i}^6\right|\leqslant ch^m\|v\|\cdot\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2} \tag{3.15}$$

转向 $I_{e_i}^4$ 的估计。有
$$I_{e_i}^4=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} bu_\xi^m v_\eta\,d\xi d\eta=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[L_m(\eta)u_{\xi\eta^m}bv_\eta$$
$$-L_m(\xi)u_{\xi^m}(b_\xi v_\eta+bv_{\xi\eta})]d\xi d\eta$$
除了含 $v_{\xi\eta}$ 的项外，其余各项显然被 $ch^m[u]_{e_i}|v|_{1,e_i}$ 界住。以下只需处理含 $v_{\xi\eta}$ 的项，当 $m=2$ 时：
$$v_{\xi\eta}=[v_1-v_2-(v_3-v_4)]/4 \qquad 于\ e_j\ 上$$
$$v_{\xi\eta}=[v_{\rm I}-v_{\rm II}-(v_{\rm III}-v_{\rm IV})]/4 \qquad 于\ e_i\ 上$$
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\xi)bu_{\xi^m}\,d\xi d\eta$$
$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{\xi}(L_m bu_{\xi^m})_\xi d\xi\right\}d\xi d\eta$$
$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{\xi}\left[\int_{0}^{\xi}(L_m''bu_{\xi^m}+L_m'b_\xi u_{\xi^m}+L_m'bu_{\xi^{m+1}})d\xi\right.\right.$$
$$\left.\left.+L_m b_\xi u_{\xi^m}+L_m bu_{\xi^{m+1}}\right]d\xi\right\}d\xi d\eta$$
其中利用了以下事实：$L_2(\xi)=\xi^2-1$ 之零点为 ±1，$L_2'(\xi)=2\xi$ 的零点为 0，$L_2''(\xi)$ 为常数。代入 $I_{e_i}^4$ 中，上述式中除含有$L_2''(\xi)$的项外，均可被界住，用 $h^m|v|_{1,e_i}[u]_{e_i}$。对 $I_{e_i}^4$ 类似的结果成立。注意到$v_{\rm I}-v_{\rm II}=v_3-v_4$ 在两单元的公共边上。合并于公共边的积分(含L_2''的项)有：
$$\left|\frac{v_3-v_4}{4}h^m\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{\xi}\left[\int_{0}^{\xi}\int_{a_i}^{a_j}(bu_{x^m})_x\,dxd\xi\right]d\xi\right\}d\xi d\eta\right|$$
$$\leqslant ch^m(|v|_{1,e_j}[u]_{e_j}+|v|_{1,e_i}[u]_{e_i})$$
当 $m=3$，$v_{\xi\eta}=(\alpha_{11}+2\alpha_{12}\eta)+2\alpha_{21}\xi$，其中括号中 $\alpha_{11}+2\alpha_{12}\eta$ 不含 ξ。由于 $L_m(\xi)$是奇函数，我们在每个单元上用积分变换处理含 $\alpha_{11}+2\alpha_{12}\eta$ 的项，用 $\xi L_3(\xi)=\xi^4-\xi^3$ 和 $\alpha_{21}=(\delta^2v_7-\delta^2v_8)/4$ 分别取代$m=2$的推导过程中$L_2(\xi)$和 $v_{\xi\eta}$的位置。同时注意到：$\xi L_3(\xi)$，$[\xi L_3(\xi)]'$，$[\xi L_3(\xi)]''$，$[\xi L_3(\xi)]^{(3)}$的零点都在$[-1,\ 1]$中，类似于 $m=2$ 时的推导可得：

$$|\sum_i I^4_{e_i}| \leqslant ch^m |v| \|u\|_{m+1,\,\Omega_1\cup\Omega_2} \quad 对\ m=2,3.$$

引理证毕。

由此得到：

定理 3.2 在引理 3.2 的条件下，对(3.12)的解 u 有：

$$\mathrm{Er}|u-u_h|_{G_m} \leqslant ch^m \|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2} \qquad (m=2,3)$$

注意，上面讨论只对一条 S 进行，由证明过程看出条数的增加并不影响证明，只要它们都在同一个方向上。如果所有间断线 S 并不平行于一个方向，应力佳点依然存在。为此我们考察 S 如图 3 所示的折线情形：

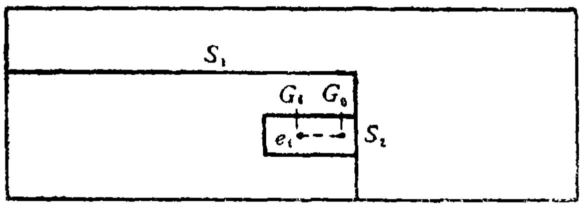

图 3

引理 3.3 设 u 是(3.12)的弱解，S 如图 3 所示：$S=S_1\cup S_2$，则有：

$$B(u-u_I,\ v) \leqslant ch^{m-\frac{1}{2}} \|u\|_{m+1,\,\Omega_1\cup\Omega_2} |v| \tag{3.16}$$

证 困难在于单元合并时，$I^4_{e_i}$ 和 $I^6_{e_i}$ 的合并都通不过 S_1 或 S_2，这时多出一些项。例如：

$$\frac{v_1-v_2}{4} k_i^m \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\eta) b u_{y^m}\, d\xi d\eta$$

和

$$\frac{v_1-v_2}{4} k_i^m \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\xi}\int_{0}^{\xi} [L''_m(\xi) b u_{x^m}]\, d\xi d\xi d\xi d\eta$$

当 $m=2$ 及 $m=3$ 时类似的项。这种单元积分沿着 S_1 或 S_2 两则排列，共有 $O(h^{-1})$ 项。

设 e_i 是靠近 S_2 的一个单元，记 G_0 为 e_i 中坐标为 $(x_0,\ y)$ 的点，固定 x_0，并记 $\tilde{S}_i=\{(x_0,\ y);\ (x_0,\ y)\in e_i\}$

$$\frac{v_1-v_2}{4} k_i^m \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\eta) b u_{y^m}\, d\xi d\eta$$

$$=\frac{v_1-v_2}{4} k_i^m \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\eta)[b u_{y^m} - b u_{y^m}|_{G_0}]\, d\xi d\eta$$

$$+\frac{v_1-v_2}{4} k_i^m \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\eta) b u_{y^m}|_{G_0}\, d\xi d\eta$$

$$=\frac{v_1-v_2}{4} k_i^m \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_m(\eta) \int_{(x_0,y)}^{(x,y)} (b u_{y^m})_x\, dx d\xi d\eta$$

$$+\frac{v_1-v_2}{4}2k_i^m\int_{-1}^{1}L_m(\eta)bu_{y^m}\Big|_{G_0}d\eta$$

沿 S_2 求和，第一项被 $ch^m|v|\,\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}$ 界住，第二项有上界：

$$c\sum_i|v|_{e_i}k_i^{m-\frac{1}{2}}\left(\int_{\tilde S_i}|D_y^m u|^2dS\right)^{\frac{1}{2}}$$

界住。由索伯列夫嵌入定理[8]得：

$$\sum_i|v|_{e_i}k_i^{m-\frac{1}{2}}\left(\int_{\tilde S_i}|D_y^m u|^2dS\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant ch^{m-\frac{1}{2}}\Big(\sum_i|v|_{e_i}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_i\int_{i\tilde S}|D_y^m u|^2dS\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant ch^{m-\frac{1}{2}}|v|\,\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}$$

其它各项处理方法类似，引理证毕。

定理 3.3 设 $u\in H^{m+1}(\Omega_1\cup\Omega_2)\cap\mathring{H}^1(\Omega)$ 是(3.12)的弱解，则我们有：

$$\mathrm{Er}|u-u_h|_{G_m}\leqslant ch^{m-\frac{1}{2}}\|u\|_{m+1,\Omega_1\cup\Omega_2}\qquad m=2,3$$

其中 S 如引理 3.3 所述。

注意 在本文基础上，对三角单元也可证明系数间断方程的应力佳点定理。

本文得到陈传淼教授的指导和李灝教授的鼓励，作者深表谢忱。

参 考 文 献

[1] 陈传淼，三角形线性元的应力佳点，高等学校计算数学学报，**2** (1980)，12—20.

[2] Zlamal, M., Some superconvergence results in the finite element method, *Lecture Notes in Mathematics*, **606** (1977), 353—362.

[3] Zlamal, M., Superconvergence and reduced integration in the finite element method, *Math. Comp.*, **32** (1978), 663—685.

[4] Ciarlet, P. G. and P. A. Raviart, General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **46** (1972), 177—199.

[5] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc-Graw Hill, London (1977).

[6] Ciarlet, P., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[7] 陈传淼，《有限元方法及其提高精度的分析》，湖南科技出版社 (1982).

[8] Adams, R. A., *Sobolev Space*, Academic Press, New York (1975).

[9] 陈传淼，有限元解及其导数的超收敛性，高等学校计算数学学报，**3** (1981)，118—125.

The Optimal Point of the Gradient of Finite Element Solution

Huang Xiao-fan

(*Department of Mathematics, Xiangtan University, Hunan*)

Abstract

We consider the first boundary value problem of the second order elliptic equation and serendipity rectangular elements. Papers [2,3,9] proved that the gradients of finite element solution possess superconvergence at Gaussianpoint. In this paper, we extend the results in papers [2,3,9] in the sense that the coefficients of the elliptic equations are discontinuous on a curve S which lies in the bounded domain Ω.