应用数学和力学，第7卷第8期（1986年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

摄动方法在生态学中的应用*

王 辅 俊

（华东师范大学，1983年1月31日收到）

摘 要

本文研究摄动方法在生态学中的应用，得到一个生态方程的渐近解。

摄动方法是研究非线性方程的一个重要方法，它广泛地应用于力学中，近年来它应用于生物学中并显示了重要的作用。在[1]中用正则摄动方法得到Volterra系统周期解的近似周期。本文用奇异摄动方法得到含自身竞争的Volterra系统的渐近解，并指出它的应用。

现考虑食饵-捕食者系统。设

$x(t)$是食饵的种群密度，$y(t)$是捕食者的种群密度。

并设对食饵存在自身竞争，则$x(t)$和$y(t)$满足如下微分方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy - ex^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + fxy \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中a，b，e，c，f是正常数。

（1）有三个平衡点，即

$$(0,\ 0);\ \left(\frac{a}{e},\ 0\right);\ \left(\frac{c}{f},\ \frac{af-ce}{bf}\right)$$

在文献[2]中指出，如$fa<ce$，则$(0,\ 0)$和$(a/e,\ 0)$有生态意义，且$(0,\ 0)$不稳定，$(a/e,\ 0)$渐近稳定。

现对含小参数的系统(1)求渐近解，引入如下新变量

$$x^* = \frac{f}{c}x,\quad y^* = \frac{b}{a}y,\quad \varepsilon = \frac{a}{c},\quad t^* = at$$

则(1)化为如下系统(2)，且(2)中无量纲。

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt^*} &= x^* - x^*y^* - kx^{*2} \\ \varepsilon\frac{dy^*}{dt^*} &= -y^* + x^*y^* \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中$k=ec/af$，设$k>1$，即$af<ce$。

* 江福汝推荐。

如果$\varepsilon=a/c\ll1$，且(2)中“*”号省去，则(2)改写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=x-xy-kx^2\\&\varepsilon\frac{dy}{dt}=-y+xy\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

初始条件为

$$x(0)=\theta>0,\quad y(0)=A>0\tag{3}$$

因ε位于dy/dt前面，(2)是一个非线性奇异摄动问题。

设零阶外解为$x_0(t)$，$y_0(t)$，则它们满足退化方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=x-xy-kx^2\\&-y+xy=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$x(0)=B\tag{5}$$

其中B待定。

(4)和(5)的解是

$$\left.\begin{aligned}&y_0(t)\equiv0\\&x_0(t)=\frac{B}{kB+(1-kB)\exp(-t)}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$y_0(t)$不满足初始条件(3)，因此在$t=0$附近存在边界层，$y(t)$有一个突变，现引入内部变量$\tau=t/\varepsilon$，(2)化为如下内部解的方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{d\tau}=\varepsilon(x-xy-kx^2)\\&\frac{dy}{d\tau}=-y+xy\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

令零阶内解为$\bar{x}_0(\tau)$，$\bar{y}_0(\tau)$，它们满足

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{d\tau}=0\\&\frac{dy}{d\tau}=-y+xy\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$x(0)=\theta,\qquad y(0)=A\tag{9}$$

(8)和(9)的解为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}_0(\tau)\equiv\theta\\&\bar{y}_0(\tau)=A\exp[(\theta-1)\tau]\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

现应用匹配原则(参见文献[3])

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{t\to0}x_0(t)=\lim_{\tau\to\infty}\bar{x}_0(\tau)=\theta\\&\lim_{t\to0}y_0(t)=\lim_{\tau\to\infty}\bar{y}_0(\tau)=0\qquad(\theta<1)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\therefore\quad B=\theta\tag{12}$$

A 任取。

则零阶形式匹配渐近解是

$$\left.\begin{aligned} x(t)&\sim x_0(t)+\bar{x}_0(\tau)-\theta=\frac{\theta}{k\theta+(1-k\theta)\exp(-t)} \\ y(t)&\sim y_0(t)+\bar{y}_0(\tau)-0=A\exp\left[(\theta-1)\frac{t}{\varepsilon}\right] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

现证明形式渐近解是精确度为$O(\varepsilon)$的渐近解。

设
$$F(x,y)=-y+xy \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x=x_0(t)}=-1+x_0(t)=-1+\frac{\theta}{k\theta+(1-k\theta)\exp(-t)} \tag{15}$$

$$\therefore \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x=x_0(t)}<0 \tag{16}$$

从非线性奇异摄动初值问题的一般理论（参见文献[4]）可断言稳定性条件满足，因此零阶形式渐近解(13)是(2)和(3)的精确度为$O(\varepsilon)$的渐近解。

定理 如$k>1$，$\theta<1$，则(2)和(3)的解是

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\frac{\theta}{k\theta+(1-k\theta)\exp(-t)}+O(\varepsilon) \\ y(t)&=A\exp\left[(\theta-1)\frac{t}{\varepsilon}\right]+O(\varepsilon) \end{aligned}\right\}\ (t>0) \tag{17}$$

由此定理可断言，当t很大，$x(t)\approx 1/k$，$y(t)\approx 0$，即$(a/e,\ 0)$稳定，从而得到与定性分析相同的结论。公式(17)在应用中是方便的，例如，设T是$y(t)$从A衰减到ε的时间，那么从(17)可估计衰减过程与参数间的关系。

如果系统中含有其它小参数，例如$a/c\ll 1$或$f/a\ll 1$，也可应用摄动方法求渐近解。这个方法也可用于方程个数多于二个或方程更复杂的情形。

参 考 文 献

[1] Grasman, J. and E. J. Verling, *Asymptotic Methods for the Volterra-Lotka Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1977), 711.

[2] Brann, M., *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, New York (1975).

[3] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley, New York (1973).

[4] O' Malley, R. E., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press (1974).

The Application of Perturbation Methods to Ecology

Wang Fu-jun

(*East China Normal University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, we study the application of perturbation methods to ecology. We obtain the asymptotic solution of an ecological differential equation.