应用数学和力学，第7卷第7期（1986年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

随机积分方程和微分方程解的存在性和比较结果*

丁协平

（四川师范学院，1985年5月20日收到）

摘　要

本文是[1]的继续．在本文中我们对非线性随机 Volterra 积分方程给出了解的另一存在性准则，极值解的存在性定理和随机积分不等式的比较定理，这些定理分别推广了 Vaughan[2,3]和 Lakshmikantham[4,5]的相应结果．

一、引　言

我们已经知道随机积分方程和随机微分方程的理论在许多应用科学领域内有广泛的应用，它们已成为很多数学工作者研究的课题．在[1]中，我们已经在某些紧性型条件下给出了非线性随机 Volterra 积分方程和非线性随机微分方程解的存在性准则，推广了若干已知结果．

本文目的是对这些随机积分和随机微分方程给出解的另一存在性准则、极值随解的存在性和随机解的比较定理，这些定理分别改进和推广了 Vaughan[2,3] 和 Lakshmikantham[4,5] 的结果．

二、预备知识

设$(\Omega,\mathcal{A},\mu)$是一完备σ-有限测度空间，$(X,\|\cdot\|)$是一可分 Banach 空间，$CL(X)$表X的一切非空闭子集的族．

定义 1　称映射$x:\Omega\to X$是可测的，如果对任意开集$A\subset X$，$x^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega,\ x(\omega)\in A\}\in\mathcal{A}$．称映射$E:\Omega\to CL(X)$是可测的，如果对任意开集$A\subset X$，$E^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega:E(\omega)\cap A\neq\phi\}\in\mathcal{A}$．

令G为X的一开子集，$J=[t_0,\ t_0+a]\subset R$是实直线上一闭区间．记

$$C[J,X]=\{x:J\to X\,|\,x\text{ 连续，}\|x(t)\|_J=\max_{t\in J}\|x(t)\|\}$$

则　$(C[J,X],\ \|\cdot\|_J)$是一可分 Banach 空间．又令

$$C[\Omega\times J,G]=\{x:\Omega\times J\to G\,|\,\forall\omega\in\Omega,\ x(\omega,\cdot)\text{连续和}\forall t\in J,x(\cdot,t)\text{可测}\}$$

---

* 钱伟长推荐．

$C[\Omega\times J\times J\times G,G]=\{K:\Omega\times J\times J\times G\to G\mid\forall\omega\in\Omega,\ K(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$连续和

$\forall(t,s,x)\in J\times J\times G,\ K(\cdot,t,s,x)$可测$\}$。

引理 1[1] 设$x_0\in C[\Omega\times J,G]$，如果对每一$\omega\in\Omega$存在$\sigma(\omega)>0$使得$S(x_0(\omega,t_0),\sigma(\omega))\subset G$ ($S(x,r)$表X内以x为心$r(r>0)$为半径的开球)，则存在可测函数$\eta:\Omega\to(0,\infty)$使得$S(x_0(\omega,t_0),\eta(\omega))\subset G$。且若有某$\theta:\Omega\to(0,\infty)$使$S(x_0(\omega,t_0),\theta(\omega))\subset G$ $(\forall\omega\in\Omega)$，则$\eta(\omega)\geqslant\theta(\omega)$ $(\forall\omega\in\Omega)$。

引理 2[1] 设$x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$\eta:\Omega\to(0,\infty)$可测，则存在可测函数$\delta:\Omega\to(0,\infty)$使得

$$|t-t_0|<\delta(\omega)\Rightarrow\|x_0(\omega,t)-x_0(\omega,t_0)\|<\eta(\omega)/2$$

引理 3[6] $x\in C[J\times\Omega,X]$的充要条件是映射$\omega\mapsto x(\omega,\cdot)$被视为从$\Omega$到$C[J,X]$的函数时是可测的。

引理 4[1] 设$x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$\eta:\Omega\to(0,\infty)$和$\gamma:\Omega\to(0,a)$是可测函数。令$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$，则由$E(\omega)=\{x\in C[\Omega\times J_0,G]:\|x(\omega,t)-x_0(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\leqslant\eta(\omega)/2\}$定义的映射$E:\Omega\to CL(C[\Omega\times J_0,G])$是可测的。

对于Banach空间X的每一有界子集A，由面式子定义A的Kuratowski非紧性测度α：

$$\alpha(A)=\inf\{\varepsilon>0:A\text{能被有限个直径小于}\varepsilon\text{的子集所覆盖}\}$$

关于这里所要用到的非紧性测度α的性质读者可参见[2]的引理2.1。

引理 5[6] 设$x_n(\omega,t)\in C[\Omega\times J,G]$ $(n\geqslant1)$使得对每一$\omega\in\Omega$，序列$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$是紧的。则存在一函数$x^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J,G]$使得对每一固定的$\omega\in\Omega$，$x^*(\omega,\cdot)$是序列$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$的一聚点。

三、存在性准则

在本节中我们研究下面形式的非线性随机Volterra积分方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds \tag{3.1}$$

其中$x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$，$J=[t_0,t_0+a]$和$G$是$X$内一开集。

为了方便起见，下面我们列举函数K的某些假设：

(H_1) 存在可测函数$M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$，

$$\|K(\omega,t,s,x)\|\leqslant M(\omega)\qquad(\forall(t,s,x)\in J\times J\times G)。$$

(H_2) 对每一$\omega\in\Omega$，$I\subset J$和有界集$B\subset G$，

$$\lim_{t\to\tau}\left(\sup\left\{\int_I\|K(\omega,t,s,\psi(\omega,s))-K(\omega,\tau,s,\psi(\omega,s))\|ds\,\middle|\,\psi\in C[\Omega\times I,B]\right\}\right)=0$$

(H_3) 存在可测函数$\beta:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$和有界集$B\subset G$，

$$\alpha(K(\omega,J,J,B))\leqslant\beta(\omega)\alpha(B)$$

(H_4) 对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$和对每一有界集$B\subset G$，$\alpha(K(\omega,t,s,B))\leqslant g(\omega,t,s,\alpha(B))$，其中$g\in C[\Omega\times J\times J\times R^+,R^+]$，$R^+=[0,\infty)$，对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$g(\omega,t,s,u)$关于$u$单调非减和随机方程$u(\omega,t)=\int_{t_0}^{t}g(\omega,t,s,u(\omega,s))ds$有唯一解$u(\omega,t)\equiv0$ $(\forall\omega\in\Omega)$。

在[1]中我们已证明下面存在性准则。

定理 1 设$x_0\in C[\Omega\times J,G]$和$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$如果条件($H_1$)，($H_2$)和($H_3$)成立，则存在可测函数$\gamma:\Omega\to(0,a)$使得随机Volterra积分方程(3.1)在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$

上有一随机解 $x^*\in C[\Omega\times J_0,G]$。

下面我们给出另一存在性准则

定理 2 设 $x_0\in C[\Omega\times J,\ G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$ 和对每一 $\omega\in\Omega$，$K(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$ 一致连续，如果条件(H_1)，(H_2)和(H_4)成立，则存在一可测函数 $\gamma:\Omega\to(0,a)$ 使得随机方程(3.1)在 $J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$ 上有一随机解 $x^*\in C[\Omega\times J_0,G]$。

证明 设 $\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理 1 和 2 内一样被定义。令 $\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\ \eta(\omega)/2M(\omega)\}$。则 $\gamma:\Omega\to(0,a)$是一可测函数。令 $J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$。显然我们有 $x_0\in C[\Omega\times J_0,\ G]$。下面我们定义序列$\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^\infty$如下：

$$x_n(\omega,t)=x_0(\omega,t_0)\quad(\omega\in\Omega,\ t_0-\gamma(\omega)<t<t_0)$$

$$x_n(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^t K(\omega,t,s,x_n(\omega,s-\gamma(\omega)/n))ds\quad(\omega\in\Omega,\ t\in[t_0,\ t_0+\gamma(\omega)])\quad(3.2)$$

用类似[2]中定理3.1的论证，我们能证明对每一 $\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^\infty$ 是等度连续和一致有界的。由于 $x_0\in C[\Omega\times J,\ G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$和 $\gamma(\omega)$ 可测，故对每一固定的$(t,s)\in J\times J$，$K(\cdot,t,s,x_0(\cdot,s-\gamma(\cdot)/n))$是可测的。于是作为可测函数有限和的极限，对每一$t\in J_0$，$\int_{t_0}^t K\left(\cdot,t,s,x_0\left(\cdot,s-\frac{\gamma(\cdot)}{n}\right)\right)ds$ 也是可测的。从而由 $\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^\infty$ 的定义知 $x_n(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,G]$。由于对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\cdot)\}$一致有界和等度连续，故对每一$\omega\in\Omega$，序列

$$\{K(t,s,x_n(\omega,s-\gamma(\omega)/n))\}_{n=1}^\infty$$

也是等度连续的。利用非紧性测度 α 的性质([2]的引理 2.1)，我们有对每一 $\omega\in\Omega$，

$$\begin{aligned}\alpha(\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^\infty)&=\alpha\left(\left\{\int_{t_0}^t K\left(\omega,\ t,\ s,\ x_n\left(\omega,\ s-\frac{\gamma(\omega)}{n}\right)\right)ds\right\}_{n=1}^\infty\right)\\&\leqslant\int_{t_0}^t\alpha\left(\left\{K\left(\omega,t,s,x_n\left(\omega,\ s-\frac{\gamma(\omega)}{n}\right)\right)\right\}_{n=1}^\infty\right)ds\\&=\int_{t_0}^t\alpha\left(K\left(\omega,t,s,\left\{x_n\left(\omega,\ s-\frac{\gamma(\omega)}{n}\right)\right\}_{n=1}^\infty\right)\right)ds\\&\leqslant\int_{t_0}^t g\left(\omega,t,s,\alpha\left(\left\{x_n\left(\omega,\ s-\frac{\gamma(\omega)}{n}\right)\right\}_{n=1}^\infty\right)\right)ds\\&=\int_{t_0}^t g(\omega,t,s,\alpha(\{x_n(\omega,s)\}_{n=1}^\infty))ds\end{aligned}$$

所以对每一 $\omega\in\Omega$，$\alpha(\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^\infty)\leqslant r(\omega,t)$，其中对每一 $\omega\in\Omega$，$r(\omega,t)$是方程

$$u(\omega,t)=\int_{t_0}^t g(\omega,t,s,u(s))ds$$

的极大解。因此由条件(H_4)有$\alpha(\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^\infty)=0\ (\forall\omega\in\Omega)$。由此推得 $\overline{\{x_n(\omega,t)\}}_{n=1}^\infty$ 是一紧集。因为对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^\infty$ 是等度连续的，由 Ascoli 定理，$\overline{\{x_n(\omega,\cdot)\}}_{n=1}^\infty$ 是紧集，又因 $x_n(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,\ G]$，从引理 5 推得存在$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{x_{n_i}(\omega,\cdot)\}_{i=1}^\infty$ 和一函数 $x^*\in C[\Omega\times J_0,\ G]$使得$\{x_{n_i}(\omega,\cdot)\}_{i=1}^\infty$ 一致收敛于$x^*(\omega,\cdot)$，由有界收敛定理我们有对每一 $\omega\in\Omega$，

$$\int_{t_0}^t K(\omega,t,s,x_{n_i}(\omega,s))ds\to\int_{t_0}^t K(\omega,t,s,x^*(\omega,s))ds$$

因此由(3.2)式推得

$$x^*(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x^*(\omega,s))ds$$

即 $x^*\in C[\Omega\times J_0,G]$是随机积分方程(3.1)的一随机解。

定理 3 设 $x_0:\Omega\to G$ 可测，$f:\Omega\times J\times G\to G$ 使得对每一 $\omega,f(\omega,\cdot,\cdot)$一致连续和对每一$(t,x)\in J\times G$, $f(\cdot,t,x)$可测，假设

(i) 存在可测函数 $M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一 $\omega\in\Omega$, $\|f(\omega,s,x)\|\leqslant M(\omega)$ $(\forall(s,x)\in J\times G)$,

(ii) 对每一$(\omega,s)\in\Omega\times J$ 和有界集 $B\subset G$,

$$\alpha(f(\omega,s,B))\leqslant g(\omega,s,\alpha(B)).$$

其中 $g\in C[\Omega\times J\times R^+, R^+]$且对每一$(\omega,s)\in\Omega\times J$, $g(\omega,s,u)$关于 u 单调非减和随机方程

$$u(\omega,t)=\int_{t_0}^{t}g(\omega,s,u(\omega,s))ds$$

有唯一解 $u(\omega,t)\equiv0$ $(\forall\omega\in\Omega)$.

则存在可测函数 $\gamma:\Omega\to(0,a)$使得随机 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(\omega,t)}{dt}=f(\omega,t,x(\omega,t))\\&x(\omega,t_0)=x_0(\omega)\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

在 $J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上有一随机解 $x^*\in C[\Omega\times J_0,G]$。

证明 为了求随机 Cauchy 问题(3.3)的随机解，我们考虑与它等价的随机 Volterra 积分方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}f(\omega,s,x(\omega,s))ds\tag{3.4}$$

在定理 2 中，对一切 $t\in J$, 令 $x_0(\omega,t)=x_0(\omega)$, $K(\omega,t,s,x)=f(\omega,s,x)$。则容易验证由假设 (i), (ii)可推得定理 2 的条件全部被满足。因此方程(3.4)存在随机解 $x^*\in C[\Omega\times J_0,G]$。它也就是随机 Cauchy 问题(3.3)的一随机解。

注 1 定理 2 是[2]中定理3.2和[4]中定理 2.2 的随机推广。定理 3 是[5]中定理 2.5.1 的随机推广。

四、随机极值解的存在性

在本节中我们证明随机积分方程 (3.1) 的极大随机解的存在性，极小随机解的存在性可类似地被证明。

现在令 $H\subseteq X$ 是一真锥。H 的内部 $H^0\neq\varnothing$。对 $u,v\in X$, 我们说：

$u\leqslant v$, 如果 $v-u\in H$ 和

$u<v$, 如果 $v-u\in H^0$.

令 H_0^* 和 H^* 分别表示下列泛函的集：

$H_0^*=\{c\in L(X,R)\,|\,x\in H^0\Rightarrow c(x)>0\}$

$H^*=\{c\in L(X,R)\,|\,x\in H\Rightarrow c(x)\geqslant0\}$

其中 $L(E,R)$是一切从X到R的连续线性泛函的空间。

由 [4] 的定理 3.1 我们容易得到随机积分不等式的下面结果。

定理 4 令 $K\in C[\Omega\times J\times J\times X,X]$, x_0, $u,v\in C[\Omega\times J, X]$和对每一 $(\omega, t, s)\in\Omega\times J$

$\times J$，$K(\omega,t,s,u)$关于u单调非减。如果对$t>t_0$

$$u(\omega,t)\leqslant x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K(\omega,t,s,\ u(\omega,s))ds \quad (\forall\omega\in\Omega)$$

$$v(\omega,t)\geqslant x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K(\omega,t,s,v(\omega,s))ds \quad (\forall\omega\in\Omega)$$

且其中之一是严格不等式和

$$u(\omega,t_0)<v(\omega,t_0) \quad (\forall\omega\in\Omega)$$

则我们有

$$u(\omega,t)<v(\omega,t) \quad (\forall\omega\in\Omega,\ t\geqslant t_0)$$

定理 5 令$x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$和对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$K(\omega,t,s,u)$关于$u$单调非减。如果条件$(H_1)$，$(H_2)$和$(H_3)$成立，则存在一可测函数$\eta:\Omega\to(0,a)$使得随机方程(3.1)在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上存在极大随机解和极小随机解。

证明 设$\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理1和2内一样被定义，令$\gamma(\omega)=\min\left\{a,\delta(\omega),\dfrac{\eta(\omega)}{4M(\omega)},\dfrac{b}{\beta(\omega)}\right\}$其中$b\in(0,1)$。则$\gamma:\Omega\to(0,a)$是可测函数，令

$$E(\omega)=\{x\in C[\Omega\times J_0,\ G]\,|\,\|x(\omega,t)-x_0(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\leqslant\eta(\omega)/2\} \quad (\forall\omega\in\Omega)$$

定义 $T:\Omega\times C[\Omega\times J_0,G]\to C[\Omega\times J_0,\ G]$如下：

$$T(\omega,x(\omega,t))=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds$$

令$y_0(\omega)\in H^0$可测使$\|y_0(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$ $(\forall\omega\in\Omega)$和令$y_n(\omega)=y_0(\omega)/n$ $(n=1,2,\cdots)$。定义$T_n:\Omega\times C[\Omega\times J_0,\ G]\to C[\Omega\times J_0,\ G]$如下

$T_n(\omega,x(\omega,t))=T(\omega,x(\omega,t))+y_n(\omega)$ $(\forall\omega\in\Omega,\ n=1,2,\cdots)$，于是对每一$\omega\in\Omega$有

$$\|T_n(\omega,x(\omega,t))-x_0(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\leqslant\left\|y_n(\omega)+\int_{t_0}^{t} K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds\right\|_{J_0(\omega)}$$

$$\leqslant\|y_n(\omega)\|+M(\omega)(t-t_0)\leqslant\frac{\eta(\omega)}{4n}+M(\omega)\gamma(\omega)\leqslant\frac{\eta(\omega)}{2}$$

故有对每一$\omega\in\Omega$，$T_n:E(\omega)\to E(\omega)$。利用[2]中定理4.2和[1]中定理3.1的证明方法，我们能证明T_n在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上有一随机不动点$x_n(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,\ G]$。

又因对每一$\omega\in\Omega$，

$$\begin{aligned}x_1(\omega,t)&=x_0(\omega,t)+y_1(\omega)+\int_{t_0}^{t} K(\omega,t,s,x_1(\omega,s))ds\\&>x_0(\omega,t)+y_2(\omega)+\int_{t_0}^{t} K(\omega,t,s,x_1(\omega,s))ds\\&=T_2(\omega,x_1(\omega,t))\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}x_1(\omega,t_0)&=x_0(\omega,t_0)+y_1(\omega)\\&>x_0(\omega,t_0)+y_2(\omega)=x_2(\omega,t_0)\end{aligned}$$

因此由定理4推得对每一$\omega\in\Omega$有$x_1(\omega,t)>x_2(\omega,t)$ $(\forall t\in J_0(\omega))$。类似可证对每一$\omega\in\Omega$有

$$x_n(\omega,t)>x_m(\omega,t) \qquad (\forall t\in J_0(\omega)\ \text{和}\ m>n)$$

利用类似于[2]中定理4.2的论证我们能证明对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$是一致有界和等度

连续的。因此利用条件(H_3)有对每一$\omega\in\Omega$,

$$\begin{aligned}\alpha(\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^{\infty})&=\alpha(\{T(\omega,x_n(\omega,t))+y_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty})\\&=\alpha\left(\left\{\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x_n(\omega,t))ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right)\\&\leqslant\alpha\left(\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,\{x_n(\omega,s)\}_{n=1}^{\infty})ds\right)\\&\leqslant\gamma(\omega)\beta(\omega)\alpha(\{x_n(\omega,J_0(\omega))\}_{n=1}^{\infty})\\&\leqslant b\alpha(\{x_n(\omega,J_0(\omega))\}_{n=1}^{\infty})\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\alpha(\{x_n(\omega,J_0(\omega))\}_{n=1}^{\infty})&=\sup_{t\in J_0(\omega)}\alpha(\{x_n(\omega,t)\}_{n=1}^{\infty})\\&\leqslant b\alpha(\{x_n(\omega,J_0(\omega))\}_{n=1}^{\infty})\end{aligned}$$

因为$b<1$，故$\alpha(\{x_n(\omega,\ J_0(\omega))\}_{n=1}^{\infty})=0\ (\forall\omega\in\Omega)$，由此推得对每一$\omega\in\Omega$，$\{\overline{x_n(\omega,\cdot)}\}_{n=1}^{\infty}$是紧集·因此由引理5，存在$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$的一子序列$\{x_{n_i}(\omega,\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$和一函数$x^*\in C[\Omega\times J_0,\ G]$使得$\{x_{n_i}(\omega,\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$一致收敛于$x^*(\omega,\cdot)$。由有界收敛定理对每一$\omega\in\Omega$,

$$\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x_{n_i}(\omega,s))ds\to\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x^*(\omega,s))ds$$

因此$x^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,G]$是随机方程(3.1)的一随机解。

现在设$x\in C[\Omega\times J_0,\ G]$是方程(3.1)的另一随机解，即有

$$x(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds\quad(\forall\omega\in\Omega)$$

因为对每一$\omega\in\Omega$,

$$\begin{aligned}x_{n_i}(\omega,t)&=x_0(\omega,t)+y_{n_i}(\omega)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x_{n_i}(\omega,s))ds\\&>x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x_{n_i}(\omega,s))ds\end{aligned}$$

和 $$x(\omega,t_0)=x_0(\omega,t_0)<x_0(\omega,t_0)+y_{n_i}(\omega)=x_{n_i}(\omega,t_0)$$

由定理 4 推得

$$x(\omega,t)<x_{n_i}(\omega,t)\quad(\forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0(\omega))$$

这蕴含对每一$\omega\in\Omega$和$t\in[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$

$$x(\omega,t)\leqslant\lim_{i\to\infty}x_{n_i}(\omega,t)=x^*(\omega,t)$$

因此$x^*(\omega,t)$是随机方程(3.1)在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上的极大随机解。

类似地，可证明极小随机解的存在性。

注 2 定理 5 是[2]中定理 4.2 和[5]中定理 5.5.3 的随机推广。利用 [1] 中定理3.2的论证方法，我们也能得到[3]中定理 4.2 的随机推广，这里不再陈述。

定理 6 设$x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$，对每一$\omega\in\Omega$，$K(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$一致连续和对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$K(\omega,t,s,u)$关于$u$单调非减。如果条件$(H_1)$，$(H_2)$和$(H_4)$成立，则存在可测函数$\gamma:\Omega\to(0,a)$使得随机方程(3.1)在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上存在极大随机解和极小随机解。

证明 设$\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理 1 和 2 内一样被定义。令$\gamma(\omega)=\min\{a,\ \delta(\omega),\ \eta(\omega)/$

$[4M(\omega)]\}$，则 $\gamma:\Omega\to(0,a)$ 可测。令 $y_0(\omega)\in H^0$ 可测使得 $\|y_0(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$ $(\forall\omega\in\Omega)$ 和令 $y_n(\omega)=y_0(\omega)/n$ $(n=1,2,\cdots)$。利用定理 2 的证明方法可证得随机方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega,t)+y_n(\omega)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds$$

在 $J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$ 上有一随机解 $x_n(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,G]$，利用定理 4 和类似于定理 5 的论证，容易证明对每一 $\omega\in\Omega$，$x_n(\omega,t)>x_m(\omega,t)$ $(\forall\omega\in\Omega,\ m>n)$。仿[2]中定理4.2的证明，可证得对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致有界和等度连续。再利用假设(H_4)和非紧性测度α的性质，可证得对每一$\omega\in\Omega$，$\overline{\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}}$ 是紧集。从而存在$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$的子序列$\{x_{n_i}(\omega,\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $x^*\in C[\Omega\times J_0,G]$ 使得$\{x_{n_i}(\omega,\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $x^*(\omega,t)$，且 $x^*(\omega,t)$ 是随机方程(3.1)的一随机解。用定理 5 证明中相同的论证，可证明 $x^*(\omega,t)$是随机方程(3.1)在 $J_0(\omega)$ 上的极大随机解。用类似论证，可证明极小随机解的存在性。

注 3 用类似于定理 3 的证明和利用定理 5 和 6，我们容易得到随机初值问题 (3.3)的极值解的存在性定理，它们可推广[5]中的相应结果。为节省篇幅，我们省去。

五、比 较 定 理

在本节中我们证明随机积分不等式的一比较结果。

定理 7 设定理 5 的假设成立，$m\in C[\Omega\times J_0,\ G]$和对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0(\omega)$，

$$m(\omega,t)\leqslant x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,m(\omega,s))ds$$

则对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0(\omega)$，有

$$m(\omega,t)\leqslant x^*(\omega,t)$$

其中 $x^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,G]$是随机方程(3.1)的极大随机解。

证明 如在定理 5 的证明中一样，令 $y_0(\omega)\in H^0$ 可测使得$\|y_0(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$ 和令 $y_n(\omega)=y_0(\omega)/n$ $(n=1,2,\cdots)$。令 $x_n(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0,\ G]$是随机方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega,t)+y_n(\omega)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds$$

的随机解。无妨设对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $x^*(\omega,t)$。

因为 $m(\omega,t_0)\leqslant x_0(\omega,t_0)<x_0(\omega,t_0)+y_n(\omega)=x_n(\omega,t_0)$ $(\forall\omega\in\Omega)$

和

$$x_n(\omega,t)>x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x_n(\omega,s))ds\quad(\forall\omega\in\Omega)$$

定理 4 蕴含 $m(\omega,t)<x_n(\omega,t)$ $(\forall\omega\in\Omega,\ t\in J_0(\omega),\ n\geqslant1)$，因此定理结论成立。

注 4 定理 7 是[2]中定理4.3，[4]中定理 4.1 和[5]中定理5.5.4的随机推广。

参 考 文 献

[1] 丁协平，随机积分和微分方程解的存在性准则，应用数学和力学，6，3 (1985).

[2] Vaughan, R. L., Existence and Comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, *Appl. Anal.*, 7 (1978), 337—348.

[3] Vaughan, R. L., Criteria for the existence and Comparison of solutions to nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 463—468.
[4] Lakshmikantham, V., Existence and Comparison results for Volterra integral equations in Banach spaces, *Volterra Integral Equations*, Springer—Verlag **737** (1979), 120—126.
[5] Lakshmikantham V. and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York (1981).
[6] De Blasi, F. S. and J., Myjak, Random differential equations on closed subsets of a Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* **90** (1982), 273—285.

Existence and Comparison Results for Solutions of Random Integral and Differential Equations

Ding Xie-ping

(Sichuan Normal College, Chengdu)

Abstract

This paper is the continuation of [1]. In this paper, we give another criterion of the existence of solutions for nonlinear random Volterra integral. A comparison theorem and the existence of random extremal solutions are also obtained by using the notion of ordering with respect to a cone. Our theorems generalize the corresponding results of Vaughan[2,3] and Lakshmikantham[4,5].