

一个四边形非协调新模式及其收敛性研究*

李 镛 吴长春

(中国科学技术大学, 1985年1月18日收到)

摘 要

本文给出了一个新的四边形非协调元, 利用广义分片检查, 对其收敛性进行了研究并给出了应力和位移的误差估计. 最后, 对弹性力学平面问题做了数值计算.

一、引 言

Q_4 元是最简单的一种四边形等参元, 它适用于任意四边形网格, 在工程中得到了广泛的应用. 但是, 其数值结果不够理想, 特别是不能很好地反映平面弯曲变形.

Wilson等人通过对四边形等参元 Q_4 增加内部自由度构造了一个不协调的位移模式 $Q_6^{[1]}$, 它破坏了单元的协调性, 却得到了很好的效果. 然而, 这种单元通常只适用于矩形或平行四边形网格, 在单元剖分不规则时, 它不能保证收敛^[1], 这就限制了它的使用范围.

关于非协调元的收敛性问题, 许多学者进行过研究, Irons 根据实际计算经验和力学背景提出了分片检查^[3], 对非协调元的发展起到了促进作用. Strang和Fix^[4]对分片检查进行过数学描述, 认为分片检查是非协调元收敛的充分必要条件. 但是, 理论和实际计算表明, 分片检查并不是非协调元收敛的充分必要条件^[1, 6], 对此, Stummel^[5]提出了广义分片检查并证明了广义分片检查是非协调元收敛的充分必要条件.

从能量检查准则 (Irons 分片检查的一种强形式) 出发, [11]中构造了一个四边形非协调模式 Q_{M6} . 本文利用广义分片检查从理论上证明了这种新单元对任意四边形剖分都是收敛的^[6], 并给出了应力和位移的误差估计:

$$\|u - u_h\|_h = O(h) \quad \|u - u_h\|_0 = O(h^2)$$

本文最后给出了数值实例, 计算结果表明 Q_{M6} 元既改善了 Q_4 元的数值性质, 又适用于不规则网格计算.

• 刘人怀推荐.

1) 文献[10]证明了 Q_6 若对剖分加限制条件是收敛的.

二、基本定义和引理

设 G 是 R^2 中的多边形区域, $\{K_\lambda\}$ 是 G 的一族凸四边形满足正则条件 ([2], p247) 的有限元剖分.

设 K 是凸四边形, 顶点为 $P_i = (x_i^1, x_i^2) (1 \leq i \leq 4)$, $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 是参考单元, 顶点为 $\hat{P}_i (1 \leq i \leq 4)$ (图1) 则存在唯一的映射 $F_K \in (Q_1(\hat{K}))^2: \hat{K} \rightarrow K$

$$x_j = \sum_{i=1}^4 x_i^j N_i(\xi, \eta) \quad (j=1, 2) \quad (2.1)$$

使得

$$F_K(\hat{P}_i) = P_i \quad (1 \leq i \leq 4), \quad F_K(\hat{K}) = K$$

其中

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (1 \leq i \leq 4)$$

$Q_1(\hat{K})$ 是 \hat{K} 上的双线性多项式空间.

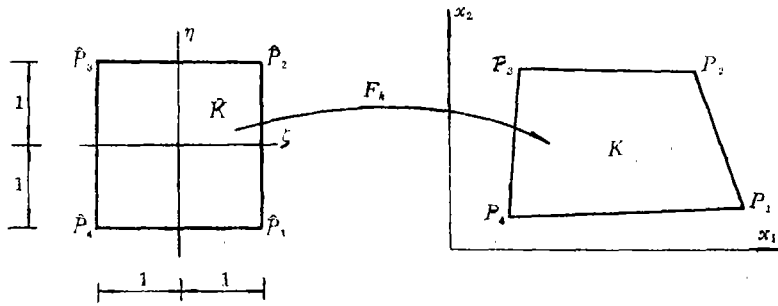


图 1

因为剖分满足正则条件, 由[2]可知, 存在常数 c, c_1, c_2 , 使得

$$c_1 |v|_{1,K} \leq |\hat{v}|_{1,\hat{K}} \leq c_2 |v|_{1,K} \quad (2.2)$$

$$|\hat{v}|_{2,\hat{K}} \leq ch_K |v|_{2,K} \quad (2.3)$$

对 $\hat{v} \in H^2(\hat{K}), v = \hat{v} \cdot F_K^{-1} \in H^2(K)$ 成立.

四边形非协调元 Q_{NB} 定义如下^[11]:

在参考单元 \hat{K} 上, $\hat{u} \in \hat{P}$ 有形式

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i N_i(\xi, \eta) + \{10[(\xi^4 - 1) + (\eta^4 - 1)] - 9[(\xi^2 - 1) + (\eta^2 - 1)]\}t \quad (2.4)$$

在单元 $K \in K_\lambda$ 上,

$$u = \hat{u} \cdot F_K^{-1} \quad (2.5)$$

由此可知, u 由它在单元 K 的结点 $P_i (1 \leq i \leq 4)$ 处的值 u_i 和内部参数 t 唯一决定

其中

$$t = \frac{1}{176} \int_K J_{\bar{K}}^{-1} \cdot \Delta \hat{v} \cdot F_{\bar{K}}^{-1} dx_1 dx_2 \quad (2.6)$$

令

$$\hat{w} = \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i N_i(\zeta, \eta), \quad z = \{10[(\zeta^4 - 1) + (\eta^4 - 1)] - 9[(\zeta^2 - 1) + (\eta^2 - 1)]\}t \quad (2.7)$$

则

$$u = w + z \quad (2.8)$$

其中

$$w = \hat{w} \cdot F_{\bar{K}}^{-1}, \quad z = z \cdot F_{\bar{K}}^{-1}$$

设 V_h 是有限元空间, $u_h \in V_h$ 限制在每个单元 $K \in K_h$ 上是由 (2.4), (2.5) 定义的形函数, 对 $u_h \in V_h$, 由 (2.8) 我们有

$$u_h = w_h + z_h \quad (2.9)$$

其中

$$w_h|_K = w, \quad z_h|_K = z$$

易知, w_h 限制在每个单元 $K \in K_h$ 的边 F 上是由 u_h 在 F 的两端点的值唯一确定的, 因此, w_h 在 \bar{G} 上连续, 是 u_h 的协调部分, z_h 依赖于内部参数 t , 在单元交界一般是不连续的, 所以是 t_h 的非协调部分.

对 $\hat{v} \in H^2(\hat{K})$, 定义插值函数 $\hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v}$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{P}_i) &= \hat{v}(\hat{P}_i) \quad (1 \leq i \leq 4) \\ \int_{\hat{K}} \Delta(\hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v} - \hat{v}) d\hat{\zeta} d\hat{\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

对 $v \in H^2(K)$, 相应的插值函数 $\Pi_K v$ 定义为

$$(\Pi_K v)^\wedge = \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{v}, \quad v = \hat{v} \cdot F_{\bar{K}}^{-1} \quad (2.11)$$

下面给出三个引理.

引理 1 对任意 $w \in C^0(\bar{G})$, $\psi \in C_0^\infty(G)$ 有

$$\sum_{K \in K_h} \int_{\partial K} \psi w N_l ds = \sum_{K \in K_h} \sum_{F \subset \partial K} \int_F \psi w N_l ds = 0 \quad (l=1, 2) \quad (2.12)$$

若 $w|_{\partial G} = 0$, 则 (2.12) 对任意 $\psi \in C_0^\infty(R^2)$ 也成立.

引理 2 对任意单元 $K \in K_h$, 设 P_0 是一线性算子

$$P_0 v = \frac{1}{4} \int_K J_{\bar{K}}^{-1} v dx_1 dx_2 \quad (2.13)$$

则存在常数 c , 使得

$$\int_{\partial K} (v - P_0 v)^2 ds \leq c^2 h_K |v|_{1,K}^2 \quad (2.14)$$

对任意 $v \in H^1(K)$ 成立.

引理 3 对 $u_h \in V_h$, 我们有

$$|u_h|_{m+1,K} \leq c h_K^{-1} |u_h|_{m,K} \quad (0 \leq m \leq 1) \quad (2.15)$$

对任意单元 $K \in K_h$ 成立.

三、收敛性和误差估计

定理 1 由(2.4)(2.5)定义的四边形非协调元 Q_{M_6} 对任意四边形剖分是收敛的。

证明 根据[5], 对二阶问题只需证明对任意有界序列 $u_h \in V_h$ 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_r(\psi, u_h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{K \in K_h} \int_{\partial K} \psi u_h N_r ds = 0 \quad (r=1, 2) \quad (3.1)$$

对任意 $\psi \in C_0^\infty(G)$ (在Dirichlet边界条件 $\psi \in C_0^\infty(R^2)$)成立。

对 $u_h \in V_h$, 由(2.9)并注意 w_h 在 \bar{G} 上连续, 利用引理1, 我们有

$$T_r(\psi, w_h) = 0, \quad T_r(\psi, u_h) = T_r(\psi, z_h) \quad (r=1, 2) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} T_r(\psi, z_h) &= \sum_{K \in K_h} \int_{\partial K} \psi z_h N_r ds \\ &= \sum_{K \in K_h} \int_{\partial K} R_0 \psi z_h N_r ds + \sum_{K \in K_h} \int_{\partial K} P_0 \psi z_h N_r ds \\ &= T^{(1)} + T^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中, $P_0 v$ 是 v 的分片常数逼近, $R_0 v = v - P_0 v$ 是对应的余项。

i) 利用Cauchy不等式和引理2, 我们有

$$|T^{(1)}| \leq \sum_K ch_K |\psi|_{1,K} |t| \quad (3.4)$$

由(2.3), (2.6)和引理3, 我们有

$$|t| \leq c_1 |u_h|_{2,K} \leq c_2 h_K |u_h|_{2,K} \leq c |u_h|_{1,K} \quad (3.5)$$

所以

$$|T^{(1)}| \leq ch |\psi|_{1,K} \|u_h\|_h \quad (3.6)$$

其中

$$\|\cdot\|_h^2 = \sum_K |\cdot|_{1,K}^2$$

ii) 由定义(2.4)直接计算, 例如对 $r=1$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} z_h N_1 ds &= \frac{x_2^1 - x_2^2}{2} \int_{-1}^1 z_h(1, \eta) d\eta + \frac{x_2^3 - x_2^2}{2} \int_{-1}^1 z_h(\xi, 1) d\xi \\ &\quad + \frac{x_2^4 - x_2^3}{2} \int_{-1}^1 z_h(-1, \eta) d\eta + \frac{x_2^1 - x_2^4}{2} \int_{-1}^1 z_h(\xi, -1) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

所以

$$T^{(2)} = 0 \quad (3.8)$$

综合(3.3)、(3.6)、(3.8)可得

$$|T_r(\psi, u_h)| \leq ch |\psi|_{1,K} \|u_h\|_h \quad (r=1, 2) \quad (3.9)$$

由此可知(3.1)成立。证毕。

因为有限元空间 V_h 包含分段线性多项式, $u_h \in V_h$ 在单元 $K \in K_h$ 的结点连续, 所以逼近性和强连续性成立。由[7]可知, 有限元空间 V_h 逼近一般的二次椭圆边值问题和相应的特征值问题是收敛的。

下面给出有限元逼近的误差估计:

现考虑二阶椭圆型方程的Dirichlet问题.

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f && (\text{在 } G \text{ 内}) \\ u &= 0 && (\text{在 } \partial G \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$f \in L^2(G)$

问题(3.10)的弱解形式等价于: 求 $u \in H_0^1(G)$

使得

$$a(u, v) = (f, v) \quad (3.11)$$

对任意 $v \in H_0^1(G)$ 成立.

其中 $a(u, v) = \int_G \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2$, $(f, v) = \int_G f \cdot v dx_1 dx_2$

显然, 对任意 $u, v \in H_0^1(G)$ 我们有

$$a(v, v) \geq \|v\|_1^2 \quad (3.12)$$

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_1 \|v\|_1 \quad (3.13)$$

所以, 变分问题(3.11)有唯一解.

问题(3.11)的有限元逼近是: 求 $u_h \in V_{h,0}$, 使

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad (3.14)$$

对任意 $v_h \in V_{h,0}$ 成立.

其中

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \nabla u_h \nabla v_h dx_1 dx_2$$

$$V_{h,0} = \{v_h \in V_h, v_h|_{\partial\sigma} = 0\}$$

易知, 对 $v_h \in V_{h,0}$ 有

$$a_h(v_h, v_h) \geq \|v_h\|_h^2 \quad (3.15)$$

所以变分问题(3.14)是唯一可解的.

定理 2 设 $u \in H^2(G) \cap H_0^1(G)$ 是(3.11)的解, u_h 是(3.14)的解, 则有误差估计

$$\|u - u_h\|_h \leq ch \|u\|_2 \quad (3.16)$$

证明 由[2], 我们有

$$\|u - u_h\|_h \leq c \left(\inf_{v_h \in V_{h,0}} \|u - v_h\|_h + \sup_{v_h \in V_{h,0}} \frac{|d(u, v_h)|}{\|v_h\|_h} \right) \quad (3.17)$$

其中

$$\begin{aligned} d(u, v_h) &= a_h(u, v_h) - (f, v_h) \\ &= \sum_K \int_K \frac{\partial u}{\partial n} v_h ds \\ &= T_1(\varphi_1, v_h) + T_2(\varphi_2, v_h) \end{aligned} \quad (3.18)$$

这里 $\varphi_i = \partial u / \partial x_i$ ($i=1, 2$), $|\varphi_i|_1 \leq \|u\|_2$, 利用(3.9)可得

$$|d(u, v_h)| \leq ch \|u\|_2 \|v_h\|_h \quad (3.19)$$

由插值函数的定义(2.10), (2.11)和[2], 我们有

$$\inf_{v_h \in V_{h,0}} \|u - v_h\|_h \leq \|u - \pi_K u\|_h \leq ch \|u\|_2 \quad (3.20)$$

综合(3.17), (3.19), (3.20), 我们可得(3.16).

引理 4 对 $u \in H^2(G)$, $v_h \in V_{h,0}$, 则存在常数 c 使得

$$|d(u, v_h)| \leq ch^2 |u|_2 \left(\sum_K |v_h|_{2,K}^2 \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

证明 由(3.4), (3.5), (3.8), (3.18)直接可得

$$\begin{aligned} |d(u, v_h)| &\leq \sum_K c_1 h_K^2 |u|_{2,K} |v_h|_{2,K} \\ &\leq ch^2 |u|_2 \left(\sum_K |v_h|_{2,K}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

定理 3 设 G 是凸多边形区域, 在定理 2 相同假设之下, 有误差估计

$$\|u - u_h\|_0 \leq ch^2 |u|_2 \quad (3.22)$$

证明 因为 G 是凸多边形区域, 由[2]可知变分问题(3.11)及其共轭变分问题是正则的([2], p138). 由[2], 我们有

$$\|u - u_h\|_0 \leq c \sup_{\varphi \in H^2(G)} \left(\inf_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{|E_h(u, \varphi, u_h, \varphi_h)|}{\|\varphi\|_2} \right) \quad (3.23)$$

其中

$$E_h = (u, \varphi, u_h, \varphi_h) = a_h(u - u_h, \varphi - \varphi_h) - d(u, \varphi_h) - d(\varphi, u_h) \quad (3.24)$$

$\varphi \in H^2(G) \cap H_0^1(G)$ 是(3.11)的共轭问题

$$a^*(\varphi, v) = (g, v) \quad (v \in H_0^1(G)) \quad (3.25)$$

的唯一解.

由定理 2 和引理 4, 我们有

$$|a_h(u - u_h, \varphi - \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_2 |\varphi|_2 \quad (3.26)$$

$$|d(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_2 \left(\sum_K |\varphi_h|_{2,K}^2 \right)^{1/2} \quad (3.27)$$

$$|d(\varphi, u_h)| \leq ch^2 |\varphi|_2 \left(\sum_K |u_h|_{2,K}^2 \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

又因为

$$\sum_K |\varphi_h|_{2,K}^2 \leq \sum_K (|\varphi_h - \Pi_K \varphi|_{2,K}^2 + |\Pi_K \varphi|_{2,K}^2) \leq c |\varphi|_2^2 \quad (3.29)$$

$$\sum_K |u_h|_{2,K}^2 \leq \sum_K (|u_h - \Pi_K u|_{2,K}^2 + |\Pi_K u|_{2,K}^2) \leq c |u|_2^2 \quad (3.30)$$

所以

$$|d(u, \varphi_h)| \leq ch^2 |u|_2 |\varphi|_2 \quad (3.31)$$

$$|d(\varphi, u_h)| \leq ch^2 |u|_2 |\varphi|_2 \quad (3.32)$$

由(3.23), (3.24), (3.26), (3.31), (3.32)可得(3.22). 证毕.

四、算 例

用 $Q_{M,6}$ 元对[8]中所引的几个平面弹性力学问题的实例进行了计算, 结果列于表 1、2 中.

剖分网格见图3, 图4. 由表1可见, Q_4 元不适用于不规则网格, 而 Q_{M5} 在改善了 Q_4 元数值性能的同时, 又可以应用于非规则网格, 再者 Q_{M5} 只包含一对内部参数, 其计算量显然比 Q_4 元小.

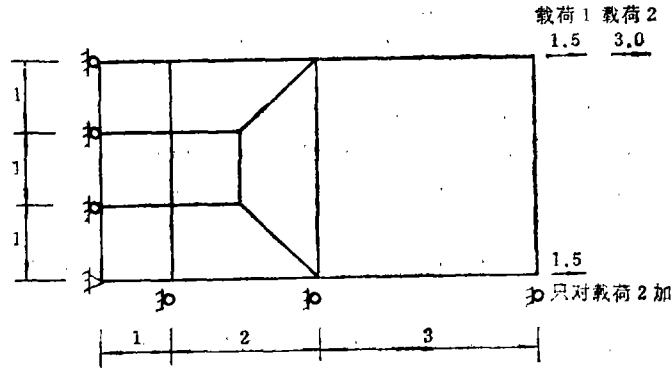


图2 平面应力算例

表1

	Q_4	Q_6	本文解	理论解
载荷1(u_A)	6.00	6.70	6.00	6.00
载荷2($-v_A$)	17.00	19.66	17.40	18.00

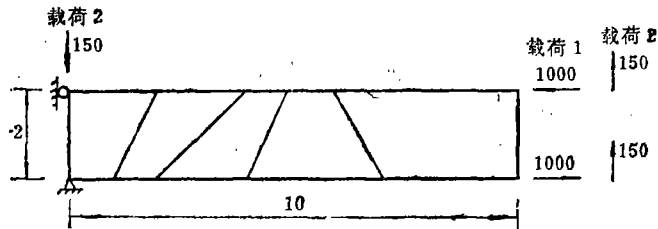


图3 悬臂梁算例

表2

	载荷1 u_A	载荷1 σ_{xB}	载荷2 v_A	载荷2 σ_{xB}
Q_4	45.7	-1781	50.7	-2447.6
Q_6	98.4	-2427.5	100.4	-3354.6
Q_{M5} (本文)	63.5	-3526	69.1	-5003.3
理论解	100	-3000	102.6	-4050

本文得到石钟慈教授的热情指导帮助, 作者深表谢意.

参 考 文 献

- [1] Arantes e Oliveira, E. R., The patch test and general convergence criteria of the finite element method, *Int. J. Solids Structure*, **13** (1977), 159-179.
- [2] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [3] Irons, B. M. and A. Razzaque, Experience with the patch test for convergence of finite elements, *Proc. Symp. on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to Partial Differential Operators*, Baltimore (1972), A. K. Aziz, ed. Academic Press, New York (1972), 557-587.
- [4] Strang, G. and G. Fix, *An Analysis of the Finite Element Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
- [5] Stummel, F., The generalized patch test, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 449-471.
- [6] Stummel, F., The limitations of the patch test, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **15** (1980), 177-188.
- [7] Stummel, F., Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces, *RAIRO Anal. Numer.*, **14** (1980) 81-115.
- [8] Taylor, R. L., et al, A nonconforming element for stress analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **10** (1976) 1211-1219.
- [9] Wilson, E. L., et al, Incompatible displacement models, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. J. Fenves et al ed., Academic Press, New York (1973), 43-57.
- [10] Shi Zhong-ci (石钟慈), A convergence condition for the quadrilateral Wilson element, *Numer. Math.* (to appear).
- [11] 吴长春, 关于二维弹性力学中非协调模式的若干问题 (待发表).

A New Quadrilateral Nonconforming Model and Its Convergence

Li Yong Wu Chang-chun

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

This paper presents a new quadrilateral nonconforming finite element. We deal with its convergence by using generalized patch test. The error on stresses and displacements are obtained and numerical computations for plane elastic problems are given.