应用数学和力学，第7卷第6期（1986年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

两相流基本方程

蔡树棠　　范正翘　陈越南

（中国科技大学近代力学系）（浙江大学力学系）

（1985年4月15日收到）

摘　要

本文按照严格的办法，从纳维斯笃克斯方程出发，经过雷诺平均得到了两相流动的雷诺方程组，从更大的程度上包含了一些物理量的湍流脉动乘积的平均项．本文还讨论了两相之间的相互作用力，分散相的压力和压力以外的应力以及两相之间能量交换项的表达式．

一、引　言

远在一百多年前，即上一世纪末，人们就讨论了大量质点（物体或颗粒）在流动介质中的运动问题．本世纪三十年代开始的泥沙运动理论是没有质量交换的两相流理论．至于有化学反应（包括燃烧等现象）的两相流动的流体力学理论则出现得更晚，要到本世纪六十年代才开始．至今，已经有许多学者讨论了非定常两相流的微分方程组[1,2,3,4]，并且分别提出了不同的简化模型．应该指出，在两相流动中，尽管两个相也可以表现为层流，但是大多数流区仍表现出脉动现象．因此层流形式的方程组在两相流动的应用中是受有很大限制的，湍流问题则显得很重要．目前求解两相流问题在很大程度上仍多用经验方法处理，但是随着大型计算机的发展和对多相流动物理本质的认识，求数值解也日益显得方便和重要起来．两相流问题数值求解的成功与否，主要取决于两个方面，即数学模型的合理建立和选用合理的计算方法[5a]．

两相流问题的数学求解，从准备开始到现在虽已经历了一段很长的时间，但是直到现在仍没有一个完好的基本方程组[5b]．在建立一组基本方程组问题上仍然存在着不少争论．争论重点主要集中在两相之间的相互作用力和压力在两相之间的分配问题上．Rudinger和Chang[6]等人只在连续项考虑存在着压力梯度项，Soo[4]，Pai[7]和Paton[10]，Hseih[7]等人引用分压梯度的概念，Wallis[8]和Spalding[9]等人采用"压力分担假设"．本文采用先写出层流两相流动的基本方程组，然后按1895年雷诺采用的方法取雷诺平均，来得到两相流的基本方程组．在处理两相之间相互作用力问题时，对分散相体积浓度小的情形，我们取圆球在流体中运动时所受到的力代入，这样得到的结果和通常的写法有不小的差别．在压力于两相之间的分配问题上，我们采用分子运动论的观点来解释分散相的应力．这一观点和其它一些人的看法也有所不同．至于分散项浓度很大，固体颗粒相互接触形成骨架能承受力和传递力的情

形，这时流体流动由外问题转为内问题。这种问题属于多孔介质或松散体力学的讨论范围，我们不在此讨论。

二、层流两相流的基本方程组

以后的符号，我们用指标 c 代表连续相，指标 d 代表分散相。符号 ρ 代表密度，α_i 代表单位体积中某一相所占的体积份数，v_i 代表速度，p 代表压力，σ_{ij} 代表压力以外的应力张量，g_i 为重力加速度，e 为单位质量的内能，q_i 为热流，Q_i 为单位体积中的生成热。R_{dc} 为单位体积中从分散相变到连续相的质量，R_{cd} 为单位体积中从连续相变到分散相的质量（例如气液两相就能相互转换）。F_{cdi} 为连续相对分散相的作用力，F_{dci} 为分散相对连续相的反作用力。q_{dc} 为分散相传给连续相的热量结余；q_{cd} 为连续相传给分散相的热量结余。

根据质量守恒定律，则可得两相各自的连续方程式为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_c\alpha_c)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_c\alpha_c v_{cj})=R_{dc}-R_{cd} \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_d\alpha_d)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_d\alpha_d v_{dj})=R_{cd}-R_{dc} \tag{2.1b}$$

由牛顿第二定律，可得两相各自的运动方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_c v_{ci}\alpha_c)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_c v_{ci}\alpha_c v_{cj})=R_{dc}v_{di}-R_{cd}v_{ci}$$

$$+\rho_c\alpha_c g_i-\frac{\partial p_i}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}+F_{dci} \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_d v_{di}\alpha_d)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_d v_{di}\alpha_d v_{dj})=R_{cd}v_{ci}-R_{dc}v_{di}$$

$$+\rho_d\alpha_d g_i-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}+F_{cdi} \tag{2.2b}$$

根据能量守恒定律，可得两相各自的能量方程式如下

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(e_c+\frac{1}{2}v_{cj}v_{cj}\right)\rho_c\alpha_c\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e_c+\frac{1}{2}v_{ck}v_{ck}\right)\rho_c v_{cj}\alpha_c\right]$$

$$=R_{dc}\left(e_d+\frac{1}{2}v_{dj}v_{dj}\right)-R_{cd}\left(e_c+\frac{1}{2}v_{cj}v_{cj}\right)$$

$$+\rho_c\alpha_c g_j v_{cj}-\frac{\partial}{\partial x_j}(p_c v_{cj})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{cij}v_{ci})$$

$$+F_{dcj}v_{cj}-\frac{\partial}{\partial x_j}q_{cj}+q_{dc}+Q_c \tag{2.3a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(e_d+\frac{1}{2}v_{dj}v_{dj}\right)\rho_d\alpha_d\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(e_d+\frac{1}{2}v_{dk}v_{dk}\right)\rho_d v_{dj}\alpha_d\right]$$

$$=R_{cd}\left(e_c+\frac{1}{2}v_{cj}v_{cj}\right)-R_{dc}\left(e_d+\frac{1}{2}v_{dj}v_{dj}\right)$$

$$+\rho_d\alpha_d q_j v_{dj}-\frac{\partial}{\partial x_j}(p_d v_{dj})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{dij}v_{dj})$$

$$+F_{odj}v_{dj}-\frac{\partial}{\partial x_j}q_{dj}+q_{cd}+Q_d \tag{2.3b}$$

式中α满足如下关系式

$$\alpha_c+\alpha_d=1$$

相互作用力项满足反作用定律

$$F_{dci}+F_{cdi}=0$$

互相传递的能量结余则满足能量守恒定律

$$q_{dc}+q_{cd}=0$$

如果在能量方程中需要考虑辐射热交换，则也不难处理。在多相流动中，在不少情况里表现为多组元体系，这样当然还应补充一组分守恒方程，补充这一方程没有很大困难，为此不在此作专门讨论。

把式(2.1)～(2.3)化简，我们就有

$$\frac{\partial v_{cj}}{\partial x_j}=\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right] \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial v_{dj}}{\partial x_j}=\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right] \tag{2.4b}$$

$$\rho_c\alpha_c\left(\frac{\partial v_{ci}}{\partial t}+v_{cj}\frac{\partial v_{ci}}{\partial x_j}\right)=R_{dc}(v_{di}-v_{ci})$$

$$+\rho_c\alpha_c g_i-\frac{\partial p_c}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}+F_{dci} \tag{2.5a}$$

$$\rho_d\alpha_d\left(\frac{\partial v_{di}}{\partial t}+v_{dj}\frac{\partial v_{di}}{\partial x_j}\right)=R_{cd}(v_{ci}-v_{di})$$

$$+\rho_d\alpha_d g_i-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}+F_{cdi} \tag{2.5b}$$

$$\rho_c\alpha_c\left(\frac{\partial e_c}{\partial t}+v_{cj}\frac{\partial e_c}{\partial x_j}\right)=R_{dc}(e_d-e_c)+\frac{1}{2}R_{dc}(v_{dj}-v_{cj})\ (v_{dj}-v_{cj})$$

$$-p_c\frac{\partial v_{cj}}{\partial x_j}+\sigma_{ckj}\frac{\partial v_{ck}}{\partial x_j}-\frac{\partial q_{cj}}{\partial x_j}+q_{dc}+Q_c \tag{2.6a}$$

$$\rho_d\alpha_d\left(\frac{\partial e_d}{\partial t}+v_{dj}\frac{\partial e_d}{\partial x_j}\right)=R_{cd}(e_c-e_d)+\frac{1}{2}R_{cd}(v_{cj}-v_{dj})(v_{cj}-v_{dj})$$

$$-p_d\frac{\partial v_{dj}}{\partial x_j}+\sigma_{dkj}\frac{\partial v_{dk}}{\partial x_j}-\frac{\partial q_{dj}}{\partial x_j}+q_{cd}+Q_d \tag{2.6b}$$

三、两相流的湍流平均流方程组

我们用$\bar{A}$代表某一物理量A的雷诺平均值，用A'代表物理量A的脉动值，则有

$$A=\bar{A}+A' \tag{3.1}$$

把(2.1)式取雷诺平均，则可得到平均后的连续方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_c\bar{\alpha}_c)+\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho'_c\alpha'_c})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_c\bar{\alpha}_c\bar{v}_{cj}+\bar{\rho}_c\overline{\alpha'_c v'_{cj}}+\overline{\rho'_c v'_{cj}}\bar{\alpha}_c+\overline{\rho'_c\alpha'_c}\bar{v}_{cj}+\overline{\rho'_c\alpha'_c v'_{cj}})=\bar{R}_{dc}-\bar{R}_{cd} \tag{3.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_d\bar{\alpha}_d)+\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho'_d\alpha'_d})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}_d\bar{\alpha}_d\bar{v}_{dj}+\bar{\rho}_d\overline{\alpha'_d v'_{dj}}+\overline{\rho'_d v'_{dj}}\bar{\alpha}_d+\overline{\rho'_d\alpha'_d}\bar{v}_{dj}+\overline{\rho'_d\alpha'_d v'_{dj}})=\bar{R}_{cd}-\bar{R}_{dc} \tag{3.2b}$$

如不把式(2.1)取平均，而把式(2.4)取平均，得

$$\frac{\partial\bar{v}_{cj}}{\partial x_j}=\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]} \tag{3.3a}$$

$$\frac{\partial\bar{v}_{dj}}{\partial x_j}=\overline{\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]} \tag{3.3b}$$

把式(2.5)取雷诺平均，再用(2.4)式化简以后，就得到平均后的两相流的运动方程式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{v}_{ci}}{\partial t}+\bar{v}_{cj}\frac{\partial\bar{v}_{ci}}{\partial x_j}=&-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_{ci}v'_{cj}}+\overline{\frac{v_{ci}}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]}\\&-\bar{v}_{ci}\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]}+\overline{\frac{R_{dc}}{\rho_c\alpha_c}(v_{di}-v_{ci})}\\&+g_i-\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\frac{\partial p_c}{\partial x_i}}+\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{cij}}+\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}F_{dci}}\end{aligned} \tag{3.4a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{v}_{di}}{\partial t}+\bar{v}_{dj}\frac{\partial\bar{v}_{di}}{\partial x_j}=&-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_{di}v'_{dj}}+\overline{\frac{v_{di}}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]}\\&-\bar{v}_{di}\overline{\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]}+\overline{\frac{R_{cd}}{\rho_d\alpha_d}(v_{ci}-v_{di})}\\&+g_i-\overline{\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\frac{\partial p_d}{\partial x_i}}+\overline{\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{dij}}+\overline{\frac{1}{\rho_d\alpha_d}F_{cdi}}\end{aligned} \tag{3.4b}$$

把式(2.6)取雷诺平均，化简以后，则得两相流的能量方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{e}_c}{\partial t}+\bar{v}_{cj}\frac{\partial\bar{e}_c}{\partial x_j}=&-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_{cj}e'_c}+\overline{\frac{e_c}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]}\\&-\bar{e}_c\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]}+\overline{\frac{R_{dc}}{\rho_c\alpha_c}(e_d-e_c)}\\&+\overline{\frac{1}{2}\frac{R_{dc}}{\rho_c\alpha_c}(v_{dj}-v_{cj})(v_{dj}-v_{cj})}-\overline{\frac{p_c}{\rho_c\alpha_c}\frac{\partial v_{cj}}{\partial x_j}}+\overline{\frac{\sigma_{ckj}}{\rho_c\alpha_c}\frac{\partial v_{ck}}{\partial x_j}}\\&-\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\frac{\partial}{\partial x_j}q_{cj}}+\overline{\frac{q_{dc}}{\rho_c\alpha_c}}+\overline{\frac{Q_c}{\rho_c\alpha_c}}\end{aligned} \tag{3.5a}$$

$$\frac{\partial\bar{e}_d}{\partial t}+\bar{v}_{dj}\frac{\partial\bar{e}_d}{\partial x_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_{dj}e'_d}+\overline{\frac{e_d}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]}$$

$$-\bar{e}_d\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]+\frac{R_{cd}}{\rho_d\alpha_d}(e_c-e_d)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{R_{cd}}{\rho_d\alpha_d}(v_{cj}-v_{dj})(v_{cj}-v_{dj})-\frac{p_d}{\rho_d\alpha_d}\frac{\partial v_{dj}}{\partial x_j}+\frac{\sigma_{dkj}}{\rho_d\alpha_d}\frac{\partial v_{dk}}{\partial x_j}$$

$$-\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\frac{\partial}{\partial x_j}q_{dj}+\frac{q_{cd}}{\rho_d\alpha_d}+\frac{Q_d}{\rho_d\alpha_d} \tag{3.5b}$$

另外还有关系式

$$\bar{\alpha}_d+\bar{\alpha}_c=1,\qquad \alpha'_d+\alpha'_c=0 \tag{3.6a}$$

$$\bar{F}_{dci}+\bar{F}_{cdi}=0,\qquad F'_{dci}+F'_{cdi}=0 \tag{3.6b}$$

$$\bar{q}_{cd}+\bar{q}_{dc}=0,\qquad q'_{cd}+q'_{dc}=0 \tag{3.6c}$$

(3.3)～(3.6)就是两相流的基本方程组。以上的讨论都是普遍适用的，和 R_{cd}，R_{dc}，F_{cdi}，q_{cd} 等的具体形式无关。而且两相也还处于平等地位。至于多相流动的方程组，只需将分散相的方程式相应增加，这并不具有原则性的困难。至于分散相粒径不同，则也可以把它作为不同的分散相来处理，也没有什么原则性的困难。

四、两相之间的相互作用力等物理量的性质

二十多年前，我们曾推导了小圆球在运动流体中运动时流体对它的作用的表达式[11]

$$f_i=\frac{4}{3}\pi a^3\rho\left[\frac{Du_i}{Dt}-g_i\right]+\frac{2}{3}\pi a^3\rho\left(\frac{Du_i}{Dt}-\frac{Dv_i}{Dt}\right)$$

$$+\pi a^3\mu\nabla^2u_i+\frac{4}{3}\pi a^3R_i\rho$$

式中 u_i 为水流速度，v_i 为圆球速度，a 为圆球半径，μ为流体的粘性系数，$(4/3)\pi a^3\rho R_i$为流体对小圆球的阻力。在雷诺数很小时，它的表达式为

$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho R_i=6\pi\mu a\left[(u_i-v_i)+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{Du}{Dt}-\frac{Dv}{Dt}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right]$$

因为粒子间的相互作用影响是浓度的高阶小量[12]，在分散相浓度极稀的时候，我们可以用这一结果。但是由于分散相颗粒并非圆球，浓度等影响或多或少地存在，我们在相应的项上添上修正系数k_1，k_2和β_0来考虑形状因子和浓度等[13]的影响。我们假定

$$F_{cdi}=-F_{dci}=\rho_c\alpha_c\left(\frac{Dv_{ci}}{Dt}-g_i\right)+\frac{1}{2}k_1\rho_c\alpha_d\left(\frac{Dv_{ci}}{Dt}-\frac{Dv_{di}}{Dt}\right)$$

$$+\frac{3}{4}k_2\alpha_d\mu\nabla^2v_{ci}+\rho_c\alpha_dR_i \tag{4.1}$$

式(4.1)中的第一项为运动流体加速度项和浮力力项，第二项为附加质量项，第三项为流体速度分布不均匀影响项，第四项$(4/3)\pi a^3\rho_cR_i$为单个粒子上所受的阻力。不论粒子能否变形，对粒子的雷诺数很小时

$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho_cR_i=6\pi\beta_0\mu(v_{ci}-v_{di})$$

或用

$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho_o R_i=6\pi\beta_0\mu a\left[(v_{oi}-v_{di})+\sqrt{\frac{a}{\pi\nu}}\int_0^t\frac{\frac{Dv_{oi}}{D\tau}-\frac{Dv_{di}}{D\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right] \tag{4.2a}$$

或在雷诺数较大时，用

$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho_o R_i=\frac{1}{2}C_D(4\pi a^2)(v_{oi}-v_{di})\sqrt{(v_{oj}-v_{dj})(v_{oj}-v_{dj})} \tag{4.2b}$$

至于分散相的压力p_d和压力以外的应力σ_{dij}的来源，我们可以参照分子运动论中多种气体成份时所用的办法。气体分子的压力和应力为[14]

$$-nm\overline{c_i c_j}$$

和该表达式中nm相应的量为

$$nm\sim\rho_d\alpha_d$$

c_i相应于每个粒子具体速度偏离于平均速度v_{di}的值。所以分散相的压力p_d和压力以外的应力σ_{dij}是由于粒子速度偏离平均值v_{di}引起的，并不是由于粒子在界面上占有一定面积引起的，至于粒子截面积的影响则通过式(4.1)第一项由流场加速度和浮力来实现。那种认为压力应该按照界面上的截面来分配的说法是不正确的。当然在颗粒浓度很大，颗粒之间互相接触以后，情况就不一样了。这时流体在固体颗粒之间流动，由原来的外问题变成了现在的内问题。而且在颗粒互相接触以后，就要形成骨架，它能承受力和起传递力的作用。这时即使颗粒完全静止，也有一定的应力存在。

至于两相之间的能量交换，我们可以按照通常的办法引入

$$q_{od}=-q_{do}=K_T\alpha_d(T_o-T_d) \tag{4.3}$$

式中T_o和T_d为连续相和分散相各自的温度，K_T为换热系数。当两相之间相对速度小的时候，K_T的数量级为

$$K_T\sim\frac{\rho_o\nu c_V}{a^2}$$

ν为连续相的运动粘性系数，c_V为连续相的比热。在两相之间的相对速度大的时候，K_T的量级为

$$K_T\sim\frac{\rho_o c_V}{a}\sqrt{\overline{u'^2}}$$

式中$\sqrt{\overline{u'^2}}$为脉动速度的代表值。

至于连续相p_o和ρ_o之间的物态方程，仍和通常情形一样。但必须注意，如果分散相为汽泡，p_d并非汽泡内的压力。

至于R_{od}和R_{do}，它们和温度等量都有密切关系，不能写出一般的表达式。但它们有一个普遍的性质，就是和比面成正比，也就是

$$R_{od}\text{或}R_{do}\sim n(4\pi a^2)\sim\frac{\alpha_d}{a}$$

即R_{od}或R_{do}和α_d/a成正比。

五、引入两相之间相互作用力以后的运动方程式

把两相之间相互作用力式(4.1)代入式(2.2)后，运动方程式就变成

$$\rho_c\left(1+\frac{1}{2}\alpha_d k_1\right)\frac{Dv_{ci}}{Dt}-\frac{1}{2}k_1\rho_c\alpha_d\frac{Dv_{di}}{Dt}$$

$$=R_{dc}(v_{di}-v_{ci})+\rho_c g_i+\left(-\frac{\partial p_c}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}\right)$$

$$-\frac{3}{4}k_2\alpha_d\mu\nabla^2 v_{ci}-\rho_c\alpha_d R_i \tag{5.1a}$$

$$\rho_c\left(1+\frac{1}{2}k_1\right)\alpha_d\frac{Dv_{ci}}{Dt}-\left(\rho_d+\frac{1}{2}k_1\rho_c\right)\alpha_d\frac{Dv_{di}}{Dt}$$

$$=-(\rho_d-\rho_c)\alpha_d g_i-R_{cd}(v_{ci}-v_{di})$$

$$-\left(-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}\right)-\frac{3}{4}k_2\alpha_d\mu\nabla^2 v_{ci}-\rho_c\alpha_d R_i \tag{5.1b}$$

令

$$\beta=\frac{\rho_d}{\rho_c},\qquad \Delta=\frac{\rho_d}{\rho_c}+\frac{k_1}{2}+\frac{k_1}{2}\left(\frac{\rho_d}{\rho_c}-1\right)\alpha_d$$

解出 Dv_{ci}/Dt 和 Dv_{di}/Dt，就有

$$\frac{Dv_{ci}}{Dt}=\frac{1}{\rho_c\Delta}(v_{ci}-v_{di})\left[\frac{1}{2}R_{cd}k_1-R_{dc}\left(\beta+\frac{1}{2}k_1\right)\right]$$

$$+g_i-\frac{3}{4}\frac{\beta\alpha_d\nu k_2}{\Delta}\nabla^2 v_{ci}-\frac{\beta\alpha_d}{\Delta}R_i$$

$$+\frac{\left(\beta+\frac{1}{2}k_1\right)}{\Delta}\frac{1}{\rho_c}\left(-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}\right)+\frac{1}{2\Delta\rho_c}\left(-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}\right) \tag{5.2a}$$

$$\frac{Dv_{di}}{Dt}=\frac{1}{\rho_c\Delta}(v_{ci}-v_{di})\left[\frac{R_{cd}}{\alpha_d}\left(1+\frac{1}{2}k_1\alpha_d\right)-R_{dc}\left(1+\frac{1}{2}k_1\right)\right]$$

$$+g_i+\frac{3}{4}k_2\nu\frac{\alpha_c}{\Delta}\nabla^2 v_{ci}+\frac{\alpha_c}{\Delta}R_i$$

$$+\frac{\left(1+\frac{1}{2}\alpha_d k_1\right)}{\rho_c\alpha_d\Delta}\left(-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}\right)+\frac{\left(1+\frac{1}{2}k_1\right)}{\rho_c\Delta}\left(-\frac{\partial p_c}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}\right) \tag{5.2b}$$

从式(5.2b)，我们可以看出，当 $\alpha_d\approx 0$，连续相的运动方程式(5.2a) 中的加速项、重力项、压力和压力以外应力项都和单项的运动方程式并没有两样，这就保证了即使颗粒的相对截面不等于零，也能回到单相流动的方程式去。同时我们可以看出在 k_1 不等于零时，即使固体颗粒密度比周围气体密度大许多倍时，带 k_1 的附加质量项还是不能略去的，因为式(5.2b)中$(-\partial p_c/\partial x_i+\partial\sigma_{cij}/\partial x_j)$ 前面有因子$(1+k_1/2)$。在 k_1 量级为 1 时，略去附加质量项将导致应力项产生百分之五十的误差。

把式(5.2)取雷诺平均后，就可分别得到两相的运动方程式为

$$\frac{\partial\bar{v}_{ci}}{\partial t}+\bar{v}_{cj}\frac{\partial\bar{v}_{ci}}{\partial x_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_{ci}v'_{cj}}+\overline{\frac{v_{ci}}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]}$$

$$-\bar{v}_{ci}\overline{\frac{1}{\rho_c\alpha_c}\left[R_{dc}-R_{cd}-\frac{D}{Dt}(\rho_c\alpha_c)\right]}$$

$$+\overline{\frac{v_{ci}-v_{di}}{\rho_c\Delta}\left[\frac{1}{2}k_1R_{cd}-\left(\beta+\frac{k_1}{2}R_{dc}\right)\right]}+g_i-\frac{3}{4}\overline{\frac{\alpha_d\beta\nu k_2}{\Delta}\nabla^2 v_{ci}}$$

$$-\overline{\frac{\alpha_d\beta}{\Delta}R_i}+\overline{\frac{\left(\beta+\frac{k_1}{2}\right)}{\Delta\rho_c}\left(-\frac{\partial p_c}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}\right)}+\overline{\frac{1}{2\Delta\rho_c}\left(-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}\right)}\tag{5.3a}$$

$$\frac{\partial\bar{v}_{dc}}{\partial t}+\bar{v}_{dj}\frac{\partial\bar{v}_{di}}{\partial x_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_{di}v'_{dj}}+\overline{\frac{v_{di}}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]}$$

$$-\bar{v}_{di}\overline{\frac{1}{\rho_d\alpha_d}\left[R_{cd}-R_{dc}-\frac{D}{Dt}(\rho_d\alpha_d)\right]}$$

$$+\overline{\frac{(v_{ci}-v_{di})}{\rho_c\Delta}\left[\frac{R_{cd}}{\alpha_d}\left(1+\frac{1}{2}k_1\alpha_d\right)-R_{dc}\left(1+\frac{k_1}{2}\right)\right]}+g_i$$

$$+\frac{3}{4}\overline{\frac{\alpha_c\nu k_2}{\Delta}\nabla^2 v_{ci}}+\overline{\frac{\alpha_c}{\Delta}R_i}+\overline{\frac{\left(1+\frac{1}{2}k_1\alpha_d\right)}{\rho_c\alpha_d\Delta}\left(-\frac{\partial p_d}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{dij}}{\partial x_j}\right)}$$

$$+\overline{\frac{\left(1+\frac{k_1}{2}\right)}{\rho_c\Delta}\left(\frac{\partial p_c}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{cij}}{\partial x_j}\right)}\tag{5.3b}$$

至于能量方程，因为只要把式(4.3)代入就行了，所以在这里就不重复了．另外连续方程也没有变化，不再作重复．

六、结论和讨论

从以上方程式可以看出：(1)基本方程组的实际项数远较一般写出的为多．(2)把两相之间的相互作用力只考虑阻力项的做法是不妥当的．因为还有连续相加速度和浮力项，附加质量项，连续相速度不均匀引起的修正项等都要出现在两相之间相互作用力的表达式中．(3)把压力按两相截面积来分配的办法也是不正确的，因为颗粒截面的应力是通过两项之间相互作用力传递的，不必重复计算．(4)不管连续相密度如何小，附加质量的作用是不能略去的．因为略去它将使应力项产生百分之五十的误差．

参 考 文 献

[1] Hetsroui, G., *Handbook of Multiphase System*, U. S. A. (1982).

[2] Lyczkowski, R. W., D. Gidaspow and C. W. Solbrig, *Multiphase Flow Models for Nuclear, Fossil and Biomass Energy Production*, U. S. A. (1982).

[3] Pai, S. I., *Two Phase Flow*, Chapter V, Vieway Verlag, West Germany (1977).

[4] Soo, S. L., *Fluid Dynamics of Multiphase Systems*, Blaisdell Pub. Co Waltham Mass (1967).

[5] a. 范正翘、陈越南，《多向流体动力学与传热中的数值计算方法》，浙江大学力学系，杭州，全国物理-化学流体力学讲习班 (1984).

b. 陈越南、范正翘、连桂森，多相流体动力学的应用与发展，力学与实践，7, 2 (1985).

[6] Rudinger, G. and A. Cheng, Analysis of nonsteady two phase flow, *Physics of Fluids*, 7, 11 (1964), 1747—1754.

[7] Pai, S. I. and T. Hseih, Interaction terms in gas solid two phase flow, *z. für, Flugwiss*, 21 (1973), 442—445.

[8] Wallis, G. B., *One Dimensional Two Phase Flow*, McGraw-Hill, New York (1969).

[9] Spalding, D. B., Numerical computation of multiphase fluid flow and heat transfer, *Recent Adv. in Numerical Method in Fluid*, Edited by C. Taylor, Vol.1 (1980).

[10] Paton, R. J., Flow properties for the continuum view point of a nonequilibrium gas particle mixture, *Fluid Mech.*, 31 (1968), 273—303.

[11] 蔡树棠，泥沙在动水中的沉淀运动 I，物理学报，13, 5 (1957), 388—398.

[12] 蔡树棠，泥沙在静水中的沉淀运动 I，物理学报，12, 5 (1956), 402—408.

[13] 蔡树棠，泥沙在静水中的沉淀运动 II，物理学报，12, 5 (1956), 409—418.

[14] Chapman, S. and T. G. Cowlding, *Theory of Nonuniform Gases*.

Fundamental Equations of Turbulent Two-Phase Flow

Tsai Shu-tang

(*Dept. of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei*)

Fan Zheng-qiao Chen Yue-nan

(*Dept. of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

A new set of Reynolds equations for predicting turbulent two-phase flows has been developed by means of Reynolds averaging method on the unsteady laminar equations of two-phase flow. These equations involve average terms of products of turbulent fluctuations in some physical parameters in a large degree. The interacting forces between two phases, the pressures for dispersed phase, extra stresses except for pressure and the expressions for energy interchange between two phases have been discussed.