应用数学和力学，第7卷第6期（1986年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Navier-Stokes方程的精确解——Dirac-Pauli表象的复变函数理论及其在流体力学中的应用(Ⅱ)*

沈惠川

（中国科学技术大学，1985年1月30日收到）

摘　要

本文是文[1]的继续．在文[1]中我们应用Dirac-Pauli表象的复变函数理论并引入Kaluza"鬼"坐标，将不可压缩粘流动力学的Navier-Stokes方程化成只有一对复未知函数的非线性方程．在本文中，我们将除时间之外的复自变量进行重新组合，从而成对地减少了复自变量的数目．最后，我们将Navier-Stokes方程化成经典的Burgers方程．联结Burgers方程与扩散方程的Cole-Hopf变换实际上是Bäcklund变换，而扩散方程众所周知是具有通解的．于是，我们利用Bäcklund变换求得了Navier-Stokes方程的精确解．

一、前　　言

在文[1]中，我们摒弃了传统的四元数理论，建立了Dirac-Pauli表象的复变函数理论，从而使多元的Navier(1822)-Stokes(1845)方程成为只有一对复未知函数的非线性方程．实际上，似乎是Sylvester[2]，早就发现传统的四元数理论中的四个元，分别与Pauli矩阵和2×2单位矩阵有关．后来，A.S.Eddington[3](1946)又发现这四个元可以用四个4×4矩阵来表示．我们现在知道，Eddington的这四个4×4矩阵，同样与Dirac矩阵[4~5]有关．

Sylvester和Eddington的发现并没有引起足够的重视，因而在Cayley-Klein[6~7]以及Бранец-Шмыглевский[8]的工作中，只能取得有限的成果．现在，由于我们建立了Dirac-Pauli表象的复变函数理论，使得我们有可能用它来方便地解决实际的力学或物理问题．

求解不可压缩粘流动力学的Navier-Stokes方程是流体力学的中心问题[9]．这组方程同时又控制着湍流的瞬时运动[10~13]，因而具有格外重要的意义．可惜的是，Navier-Stokes方程的通解至今没有被人找到．在通常的教科书中，只给出了某些具体流动问题的特解（或简单精确解）．

本文试图在求解Navier-Stokes方程的（一般）精确解的问题上作抛砖引玉之举．由于我们已经有了文[1]的基础，这种打算有可能实现．由文[1]，在引入Kaluza"鬼"坐标后，

* 钱伟长推荐．

我们可以写出Navier-Stokes 方程在 Dirac-Pauli 表象的复变函数理论中的形式为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_k}{\partial z_k}+\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{z}_k}=0\\&\frac{\partial u_i}{\partial t}+\left(u_k\frac{\partial}{\partial z_k}+\bar{u}_k\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)u_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \bar{z}_i}+2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}u_i\qquad(i,k=1,2)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

及其共轭方程。式中 ν 为粘性系数；z_k 和 $\bar{z}_k$ $(k=1,2)$为两对互为复共轭的空间坐标；u_k和$\bar{u}_k$ $(k=1,2)$为两对互为复共轭的流体速度分量。

在文[1]中我们已将上述 Navier-Stokes 方程化成只有一对互相共轭的复未知函数的非线性方程，但是除时间 t 之外的复自变量的数目却有两对。因此我们首先遇到的问题是自变量的数目太多。在本文中，我们先将两对互相共轭的复自变量组合成一对复自变量，然后依此将方程化为只有一个实未知函数的非线性方程。接着，我们又将除时间 t 之外的那一对互相共轭的复自变量组合成一个实自变量，使方程呈最简形式。这种将自变量重新组合的方式并非必要条件，因而由此得到的解仅仅是精确解，而不是通解。但是，本文得到的精确解由于没有使用初-边值条件，它具有广泛的适用性。

本文将Navier-Stokes方程最终简化为经典的Burgers方程。众所周知，M.J.Lighthill[14]曾将一维理想气体方程近似为Burgers方程。他的结果是摄动解，而不是精确解。但是他的结果可以与本文的结果互相映辉。

由于 Burgers 方程经由 Cole-Hopf 变换即实际上的 Bäcklund 变换可以化为扩散方程[15~16]，因此Navier-Stokes方程的精确解可由扩散方程的通解经由Bäcklund变换得到。

本文中对Reynolds 数没有作特别的限制。

本文中凡重复指标按Einstein约定求和。

二、Navier-Stokes方程的再次简化

在文[1]中，我们应用Dirac-Pauli 表象的复变函数理论并引入 Kaluza“鬼”坐标，将Navier-Stokes 方程化归为只有一对复未知函数ψ和$\bar{\psi}$的非线性方程，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial \bar{z}_i}\psi=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left[\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial z_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1\partial z_k}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left[\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{z}_2\partial z_k}\right)-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}_2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{z}_1\partial z_k}\right)\right]\tag{2.1}$$

式中 ψ 为“流函数”，$u_1=\partial\psi/\partial z_2$，$u_2=-\partial\psi/\partial z_1$；$\bar{\psi}$是$\psi$的复共轭。

在方程(2.1)式中，复未知函数，即ψ和$\bar{\psi}$，只有一对，但是除时间 t之外的复自变量(即z_k和 $\bar{z}_k$ $(k=1,2)$)的数目却有两对；因此有条件将此两对复自变量组合成一对复自变量，而不失其一般性。重新组合复自变量的唯一原则，是保持方程(2.1)式的基本形式不变。这种将自变量重新组合的方法，与波动方程的d'Alembert解具有某些相似之处。多维的波动方程和扩散方程，都面临着同样的问题。这种自变量的重新组合，是充分的，但不必要。

研究表明，要保持方程(2.1)式基本形式不变的这种重新组合是：

$$y=z_1+i\bar{z}_2\tag{2.2}$$

同时有

$$\bar{y}=\bar{z}_1-iz_2 \tag{2.3}$$

对照文[1]的(2.17)式，可知(2.2)式和(2.3)式不失一般性。

由全微分条件，我们有

$$\frac{\partial y}{\partial z_1}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}_2}=i,\quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{z}_1}=1,\quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial z_2}=-i \tag{2.4}$$

由此可得

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial \bar{z}_k}=2\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\qquad (k=1,2) \tag{2.5}$$

将(2.4)式和(2.5)式代入(2.1)式，我们有

$$\begin{aligned}2\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\psi &=i\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\psi+\bar{\psi})\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]-i\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\psi+\bar{\psi})\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}^2}\right]\\ &\quad+i\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\psi+\bar{\psi})\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}\right]-i\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\psi+\bar{\psi})\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}\right]\end{aligned} \tag{2.6}$$

将方程(2.6)式与其复共轭方程相加，并令

$$\varphi=\psi+\bar{\psi} \tag{2.7}$$

我们得到只有一个实未知函数φ的非线性方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial \bar{y}}=i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial \bar{y}} \tag{2.8}$$

我们注意到，由于(2.7)式，φ是实未知函数。方程(2.8)式与不可压缩平面流动或轴对称流动的流函数方程十分相似。

如果方程(2.8)式的解已经求得，则由(2.6)式，即由

$$\begin{aligned}2\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}&=2i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}\\ &\quad+i\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{y}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}^2}\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

可以求得复未知函数ψ。我们注意到，在φ成为已知函数的前提下，方程(2.9)式是线性方程。

从而，我们有

定理 1　Navier-Stokes 方程的精确解，可以由线性方程(2.9)式求得。其中φ满足非线性方程(2.8)式，并且复自变量由(2.2)式和(2.3)式给出。

整个问题现在成为求解只有一个实未知函数φ的非线性方程(2.8)式。

三、Navier-Stokes方程的精确解

考察一下方程(2.8)式，我们发现它是由互相复共轭的两个方程相加而成的。这两个方程中的一个是：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial \bar{y}}=2i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{y}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial \bar{y}}\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial \bar{y}}\right)^2\right]$$

即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial\overline{y}}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial\overline{y}}=2i\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial\overline{y}}\right)\right] \tag{3.1}$$

另一个是(3.1)式的复共轭方程.在将方程(2.8)式拆成(3.1)式和它的共轭方程的时候，我们注意到了(2.7)式，即φ为实函数.

(3.1)式又可写成（充分条件）：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial\overline{y}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{y}}=2i\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{y}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial\overline{y}}\right) \tag{3.2}$$

设

$$\phi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\qquad\left(\text{同时有 }\bar{\phi}=\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{y}}\right) \tag{3.3}$$

则(3.2)式成为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial\overline{y}}\right)\phi=-2i\phi\frac{\partial\phi}{\partial\overline{y}} \tag{3.4}$$

在方程(3.4)式中，复未知函数ϕ只有一个，但是除时间t之外的复自变量（即y和$\overline{y}$）的数目却有两个. 因此有条件将此两个复自变量组合成一个实自变量，而不失其一般性 .重新组合复自变量的唯一原则，依然是保持方程 (3.4) 式的基本形式不变. 这种自变量的重新组合，同样是充分的，但不必要.

研究表明，要保持方程(3.4)式基本形式不变的这种重新组合是:

$$\xi=y+\overline{y} \tag{3.5}$$

对照文[1]中的(2.17)式，可知 (3.5)式不失一般性. 并且我们还应注意到，ξ 是一个实自变量.

由全微分条件，我们有

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=1,\qquad\frac{\partial\xi}{\partial\overline{y}}=1 \tag{3.6}$$

由此可得

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial\overline{y}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{3.7}$$

将(3.6)式和(3.7)代入(3.4)式，我们有经典的Burgers 方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+2i\phi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-4\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}=0 \tag{3.8}$$

由于 Burgers 方程(2.8)式可以通过Cole-Hopf 变换

$$\phi=4i\nu\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial\xi} \tag{3.9}$$

与扩散方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=4\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} \tag{3.10}$$

相联系，因此Burgers方程(3.8)式是可以精确求解的.由于文[1]、[17]和本文的结果，我们可将扩散方程(3.10)式称作为不可压缩粘流动力学的学科方程，

实际上，Cole-Hopf变换(3.9)式也可写成[16]

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{i}{4\nu}\phi w,\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\left(-i\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\frac{1}{4\nu}\phi^2\right)w \tag{3.11}$$

而(3.11)式可以认为是Bäcklund变换。从而，我们又有

定理 2 不可压缩粘流动力学Navier-Stokes方程的精确解，可以由线性方程

$$2\left(\frac{\partial}{\partial t}-4\nu\frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}=2i\left(\bar{\phi}\frac{\partial}{\partial y}-\phi\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial \bar{y}}$$

$$+i\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar{y}^2}\right) \tag{3.12}$$

和 Burgers 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+2i\phi\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-4\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial \xi^2}=0 \tag{3.13}$$

及其共轭方程求得。其中

$$y=z_1+i\bar{z}_2,\quad \bar{y}=\bar{z}_1-iz_2,\quad \xi=y+\bar{y} \tag{3.14}$$

由于 Burgers 方程的精确解与扩散方程的通解由Cole-Hopf变换相联系，因此Navier-Stokes方程的精确解可以由扩散方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=4\nu\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \tag{3.15}$$

的通解和 Bäcklund 变换

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{i}{4\nu}\phi w,\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\left(-i\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\frac{1}{4\nu}\phi^2\right)w \tag{3.16}$$

而最终求得。

定理 2 所提供的 Bäcklund 变换暗示着可用逆散射变换来求解 Navier-Stokes 方程。这样一来，求解 Navier-Stokes 方程精确解的问题又与量子本征值问题联系起来。

参 考 文 献

[1] 沈惠川，Dirac-Pauli 表象的复变函数理论及其在流体力学的应用（Ⅰ），应用数学和力学，7，4 (1986)。

[2] Lapedes, D.N.,《科学技术百科全书》，1，《数学，四元数》，科学出版社 (1980)，252。

[3] Eddington, A.S., *Fundamental Theory*, Cambr. Univ. Press, London (1953).

[4] Dirac, P.A.M.,《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965)。

[5] Flügge, S.,《实用量子力学》，宋孝同等译，人民教育出版社 (1981—1983)。

[6] Lapedes, D.N.,《科学技术百科全书》，2，《力学，凯莱-克莱因参量》，科学出版社 (1982)，116。

[7] Klein, F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint; Arithmetic, Algebra, Analysis*, Tr. from the 3rd German ed. by E.R. Hedrick and A. Nöble, Dover. n.d., N.Y. (1924).

[8] Бранец В. Н. и И. П. Шмыглевский，《四元数在刚体定位问题中的应用》，梁振和译，国防工业出版社 (1977)。

[9] Fung, Y. C.（冯元桢），《连续介质力学导论》，李松年、马和中译，科学出版社 (1984)。

[10] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《连续介质力学》，彭旭麟译，人民教育出版社 (1958)。
Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《流体力学》，孔祥言、徐燕侯、庄礼贤译，高等教育

出版社 (1983—1984).

[11] 湯川秀樹, 《現代物理学の基礎》, (第一版) 1, 《古典物理学》, 岩波書店 (1975).

[12] Prandtl, L.,K. Oswatitsch and K. Wieghardt, 《流体力学概论》, 郭永怀、陆士嘉译, 科学出版社 (1981).

[13] Oswatitsch, K., 《气体动力学》, 徐华舫译, 科学出版社 (1965).

[14] Lightill, M J., *Surveys in Mechanics*, Cambr. Univ. Press, London (1956).

[15] 谷内俊弥、西原功修, 《非线性波动》, 徐福元等译, 原子能出版社 (1981).

[16] Eckhans, W. and A. Van Harten, 《逆散射变换和孤立子理论》, 黄迅成译, 陈以鸿校, 上海科学技术文献出版社 (1984).

[17] 沈惠川, 均匀不可压缩黏流动力学的通解, 自然杂志, 7, 10(1984), 799; 7, 12(1984), 940.

Exact Solution of Navier-Stokes Equations——The Theory of Functions of a Complex Variable under Dirac-Pauli Representation and Its Application in Fluid Dynamics (Ⅱ)

Shen Hui-chuan

(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

This work is the continuation of the discussion of Ref.[1]. In Ref. [1] we applied the theory of functions of a complex variable under Dirac-Pauli representation, introduced the Kaluza "Ghost" coordinate, and turned Navier-Stokes equations of viscofluid dynamics of homogeneous and incompressible fluid into nonlinear equation with only a pair of complex unknown functions. In this paper we again combine the complex independent variable except time, and cause it to decrease in a pair to the number of complex independent variables. Lastly, we turn Navier-Stokes equations into classical Burgers equation. The Cole-Hopf transformation join up with Burgers equation and the diffusion equation is Bäcklund transformation in fact, and the diffusion equation has the general solution as everyone knows. Thus, we obtain the exact solution of Navier-Stokes equations by Bäcklund transformation.