

等直弹性杆自由扭转电涡流比拟*

王振民 张可学

(江苏工学院, 1985年8月10日收到)

摘 要

本文提出了测定弹性等截面直杆自由扭转剪应力和抗扭刚度的一种新的比拟理论和方法——电涡流比拟。在理论部分建立了电涡流和自由扭转的比拟关系。在实验部分依照比拟理论设计了试验装置和测量线路; 并通过对某些具有解析解的截面形状进行了实际测量, 所得实验数据验证了本理论的正确性; 还对集肤效应和影响精度的一些主要因素进行了讨论。本文所得结果可以推广到其它类似的流场或者具有一定边界条件的泊松方程(或拉普拉斯方程)求解。

在弹性力学等截面直杆的自由扭转求解剪应力和抗扭刚度问题中, 能得到解析解的截面形状还不多, 远不能满足工程上的需要。对于一般形状截面的求解方法, 一种是近似解法, 如黎兹方法和康托洛维奇方法; 另一种是数值解法, 如有限差分方法。而这些方法往往需要大量的计算工作。还有一种方法就是比拟, 利用和扭转问题有相同数学模型的不同物理模型, 通过测量的手段使扭转问题获解。已有的比拟大致可分为三类: 薄膜比拟、电流比拟和流体力学比拟。数十年来, 国内外许多学者和专家在这方面进行了大量的工作, 使这些比拟方法有了较大的发展, 并解决了一些有实际意义的问题。但另一方面由于这些比拟方法所涉及的物理模型本身的特点和实验手段的局限性, 因而还存在着某些缺陷。例如薄膜比拟法要精确测量难度较大, 而且要花费较多的时间, 特别对于复连通截面问题比拟的实现非常困难。本文提出的电涡流比拟是异于上述各种比拟的一种新的比拟理论和实验方法。实验证实了这种比拟避免了上述各种缺陷, 能够很方便地解决等直弹性杆自由扭转的剪应力和抗扭刚度问题。

一、理 论 部 分

1 弹性等截面直杆自由扭转基本理论

弹性等截面直杆(以下简称杆)在两端受到扭矩 M 的作用产生自由扭转(图1)。杆的横截面边界 Γ 由外边界 l_0 及 n 个内边界 m_i ($i=1, 2, \dots, n$)组成(截面为单连通域, 作为特例, 可视 $n=0$) (图2)。设外边界 l_0 与内边界 m_i ($i=1, 2, \dots, n$)所围成的区域和面积以 A_0 表示(不包括孔的区域和面积), m_i 所围的区域和面积以 A_i ($i=1, 2, \dots, n$)表示。

* 钱伟长推荐。

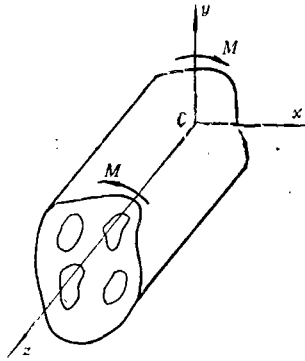


图 1

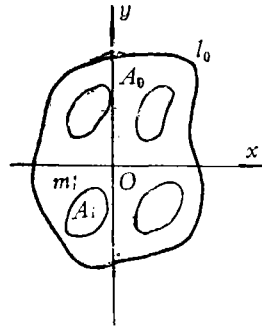


图 2

该截面的应力函数 $\phi(x, y)$ 应满足下面三个条件:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -2 \quad ((x, y) \in A_0) \quad (1.1)$$

$$\frac{d\phi(x, y)}{ds} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma) \quad (1.2)$$

$$\oint_{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = 2A_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

式中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为拉普拉斯算子, s 为沿边界的弧坐标. 截面为单连通域的情况, 由于没有内边界, (1.3) 式就不存在.

由 (1.2) 式可知 $\phi(x, y)$ 在内外边界上都各为常数. 这些常数有一个是独立可以任意取定的, 一般取:

$$\phi(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in l_0) \quad (1.4)$$

并记:

$$\phi(x, y) = K_i \quad ((x, y) \in m_i, i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

截面上各点的剪应力和杆的抗扭刚度可由下列式子得出:

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$\frac{M}{G\theta} = 2 \left(\iint_{A_0} \phi dx dy + \sum_{i=1}^n K_i A_i \right) \quad (1.7)$$

式中 τ_{xz} , τ_{zy} 分别表示横截面上任一点处剪应力 τ 在 x 和 y 方向上的投影分量, G 为杆材料的剪切弹性模量, θ 为杆受扭时 z 方向上相距单位长度两横截面的相对转角. 在单连通域情况时, 公式 (1.7) 括号中第二项不存在.

2 涡流比拟理论

现研究磁场中导体薄片的涡流问题. 设有一单位厚度非铁磁物质的导体薄片, 中间有 n 个孔 (图 3), 仍设 Γ , l_0 , m_i , A_0 , A_i 等与前面有相同的含义. 令一束磁力线垂直地穿过导体片, 其磁感应强度 $B = B(t)^1$, 即仅是时间 t 的函数, 与坐标 (x, y) 无关. 那么导体片

注1) 此处 B 应该是外磁场与导体片涡流产生的磁场合成的磁感应强度, 但导体片尺寸不很大, 厚度很小, 涡流量也就很小, 所产生的磁感应强度相对于外部磁感应强度很小, 其影响可以忽略不计, 这可由试验证实.

上便感应产生一个平面涡旋电流场, 设某一瞬时任意一点电流密度为

$$\mathbf{l} = I_x(x, y)\mathbf{i} + I_y(x, y)\mathbf{j}$$

在低频情形, 导体中的位移电流 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ 非常微弱, 忽略不计¹⁾。那么麦克斯韦方程第一式的微分形式

$$-\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{l} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

便成为

$$-\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{l}$$

再对上式两边求散度就成为:

$$\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} = 0 \quad ((x, y) \in A_0) \quad (1.8)$$

再由麦克斯韦方程第二式的积分形式, 对导体片上任意闭合回路 l 都有:

$$\oint_l I_x dx + I_y dy = \frac{1}{\rho} \iint_A B'(t) dx dy \quad (1.9)$$

式中 ρ 为导体片的电阻率, A 为 l 所围的区域或面积。

另外在导体片的边界外部是空气, 空气的电阻率可视为无穷大, 因此涡流只限于导体片上流动, 不会从边界窜入或窜出, 即边界上满足:

$$\mathbf{l} \times d\mathbf{s} = 0$$

亦即:

$$I_x dy - I_y dx = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma) \quad (1.10)$$

(1) 电流密度与剪应力的比拟关系

(1.8) 式等价于在区域 A_0 上存在一个函数 $\omega(x, y)$, 满足下列与电流密度的关系:

$$I_x = \frac{B'(t)}{2\rho} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad I_y = -\frac{B'(t)}{2\rho} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (1.11)$$

将 (1.11) 式代入 (1.9) 式得

$$\oint_l I_x dx + I_y dy = \oint_l \frac{B'(t)}{2\rho} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} dx - \frac{\partial \omega}{\partial x} dy \right) = \iint_A \frac{B'(t)}{\rho} dx dy$$

1) 我们将采用 50Hz 的交变磁场, 它的电磁波长 $\lambda = 6,000,000\text{m}$, 导体片的线尺度 $r = 0.1\text{m}$, $\lambda \gg r$, 满足似稳条件, 故位移电流 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ 可略去。

2) 为方便起见, 这里规定 B 的正方向与 z 轴反向, 故式前出现负号, (1.9) 式省去负号。

3) 证: 由于 $\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} = 0 \quad ((x, y) \in A_0)$, 必有 $\oint_l I_x dy - I_y dx = 0 \quad (l \in A_0)$ 若 l 内部含有一个孔 A_i , 此时必有 $\oint_l I_x dy - I_y dx - \oint_{m_i} I_x dy - I_y dx = 0$, 由 (1.10) 式可知第二个积分 $\oint_{m_i} I_x dy - I_y dx = 0$ 所以 $\oint_l I_x dy - I_y dx = 0$; l 内部含有多个孔情形与此相仿。从而可以定义一个函数 $\omega(x, y) = \frac{2\rho}{B'(t)} \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} I_x dy - I_y dx$ ($(x, y) \in A_0, (x_0, y_0) \in A_0$), 这样的函数满足 (1.11) 的要求 (只要 ω 分别对 x, y 求偏导数就得 (1.11) 式); 另外 (1.11) 式成立, 必会推出 (1.8) 式, 事实上由 (1.11) 式得: $\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} = \frac{B'(t)}{2\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = 0$, 这就是 (1.8) 式。

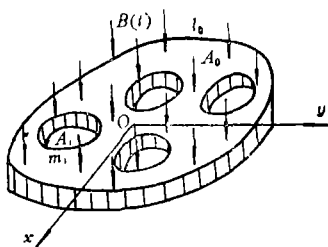


图 3

由格林公式又得:

$$\iint_A -\frac{B'(t)}{2\rho} \nabla^2 \omega dx dy = \iint_A \frac{B'(t)}{\rho} dx dy$$

上述这个积分在区域 A_0 上任何子区域 A 上都成立, 所以:

$$\nabla^2 \omega(x, y) = -2 \quad ((x, y) \in A_0) \quad (1.12)$$

将 (1.11) 式代入边界条件 (1.10) 式得:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx = 0$$

即:

$$\frac{d\omega}{ds} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma) \quad (1.13)$$

(1.13) 式说明 $\omega(x, y)$ 在内外边界上各为常数, 这些常数有一个是独立的, 仿前令:

$$\omega(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in l_0) \quad (1.14)$$

并记:

$$\omega(x, y) = K_i \quad ((x, y) \in m_i; i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.15)$$

将 (1.9) 式积分路径 l 换为内边界 m_i , 并将 (1.11) 式代入, 就会得:

$$\oint_{m_i} \frac{\partial \omega}{\partial y} dx - \frac{\partial \omega}{\partial x} dy = 2A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.16)$$

比较 (1.1), (1.2), (1.3) 和 (1.12), (1.13), (1.16) 两组方程可以看出电流密度函数 ω 完全满足应力函数 ϕ 的要求. 再由 (1.6) 和 (1.11) 两式可以看出, τ_{zx} , τ_{zy} 分别与 I_x , I_y 对应, 只差一个常数因子.

由 (1.11) 式可以看出, 如果 $B(t)$ 是时间 t 的正弦函数, 则 $B'(t)$ 是时间 t 的余弦函数, I_x , I_y 也是时间 t 的余弦函数, 其有效值仍与 τ_{zx} , τ_{zy} 存在着比例关系. 这样就可以利用交变磁场在导体片上感应涡流的电流密度来比拟和导体片相同形状截面杆的扭转剪应力.

又由电学可知:

$$I = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\rho} (E_x i + E_y j)$$

式中 E 为导体片上任意一点的电场强度.

于是可借助于测量某一点的电场强度 (即该点沿各方向微段单位长度上的电压降的最大值) 来得到该点的剪应力 (包括大小和方向).

(2) 功率与扭转刚度的比拟关系

导体片上任一点发热功率密度为:

$$\rho I^2 = \rho (I_x^2 + I_y^2)$$

导体片为单位厚度, 总发热功率就是:

$$W = \rho \iint_{A_0} (I_x^2 + I_y^2) dx dy$$

将 (1.11) 式代入上式, 得:

$$W = \frac{[B'(t)]^2}{4\rho} \iint_{A_0} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$= \frac{[B'(t)]^2}{4\rho} \iint_{A_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] dx dy$$

按格林公式可得:

$$W = \frac{[B'(t)]^2}{4\rho} \left[\oint_{l_0} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} dy - \frac{\partial \omega}{\partial y} dx \right) - \sum_{i=1}^n \oint_{m_i} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} dy - \frac{\partial \omega}{\partial y} dx \right) - \iint_{A_0} \omega \nabla^2 \omega dx dy \right]$$

此式括号中前两项积分是在边界上进行的, 第三项积分是在区域 A_0 上进行的, 将 (1.14)、(1.15)、(1.12) 及 (1.16) 各式代入, 此式简化为:

$$W / [B'(t)]^2 = 2 \left[\iint_{A_0} \omega dx dy + \sum_{i=1}^n K_i A_i \right] \quad (1.17)$$

比较 (1.7) 和 (1.17) 两式, 可以看出抗扭刚度与导体片消耗功率的比拟关系. 这样就可以利用测定导体片消耗的功率来得到杆的抗扭刚度.

对于应力与电流密度 (或电场强度), 抗扭刚度与消耗功率间的各自换算因子, 可以通过对已知解析解的圆形截面的实际测量来进行标定.

综上所述, 扭转问题与导体片涡流问题的对应关系, 列于表 1 中.

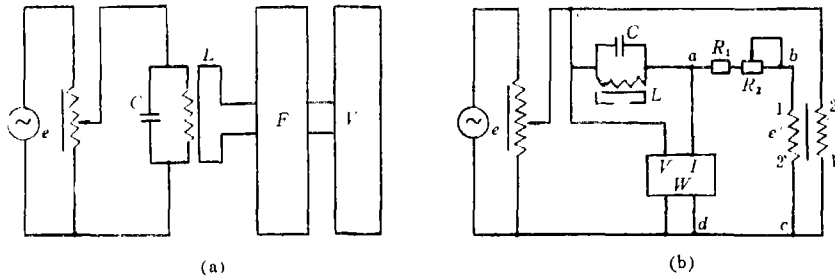
表 1 扭转问题与导体片涡流问题的对比

应力函数 ϕ 与电流密度函数 ω 所满足的条件	$\nabla^2 \phi = -2 \quad ((x, y) \in A_0)$ $\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma)$ $\oint_{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = 2A_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$	$\nabla^2 \omega = -2 \quad ((x, y) \in A_0)$ $\frac{d\omega}{ds} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma)$ $\oint_{m_i} \frac{\partial \omega}{\partial y} dx - \frac{\partial \omega}{\partial x} dy = 2A_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$
剪应力与电流密度表达式	$\tau_{yx} = G\theta \frac{\partial \phi}{\partial y}$ $\tau_{xy} = -G\theta \frac{\partial \phi}{\partial x}$	$I_x = \frac{B'(t)}{2\rho} \frac{\partial \omega}{\partial y}$ $I_y = -\frac{B'(t)}{2\rho} \frac{\partial \omega}{\partial x}$
ϕ 与 ω 在边界上的取值	$\phi = 0 \quad ((x, y) \in l_0)$ $\phi = K_i \quad ((x, y) \in m_i)$	$\omega = 0 \quad ((x, y) \in l_0)$ $\omega = K_i \quad ((x, y) \in m_i)$
抗扭刚度和导体片发热功率	$M/G\theta = 2 \left(\iint_{A_0} \phi dx dy + \sum_{i=1}^n K_i A_i \right)$	$W/[B'(t)]^2 = 2 \left(\iint_{A_0} \omega dx dy + \sum_{i=1}^n K_i A_i \right)$

二、实验部分

1 测量线路设计

测量线路分为两部分. 一部分用来测量剪应力; 一部分用来测量抗扭刚度. 在实际线路中这两部分合在一起. 线路中采用稳压电源, 是为了提高测量精度; 自耦变压器可使测量值调节到一个较好的读数; 测量刚度线路中的支路 $abcd$ 是利用和电源 e 相位差 180° 的电源 e'



a) 测应力线路图

b) 测刚度线路图

图 4

在电阻 R_1 , R_2 上形成的电流抵消磁场发生器 L 的铁损和铜损电流, 将功率初读数调整为零; 电容 C 是用来提高功率因子, 降低空载电流。线路中主要仪表、电器及型号见表 2。

表 2 线路中主要仪表及电器

图 中 符 号	名 称	型 号
F	电荷放大器	DHF-7
V	数字电压表	PF-2
W	单相瓦特表	D34-W
L	磁场发生器	

2 磁场发生器和测量触头总成

磁场发生器 (图 5) 是由带缺口的铁芯和线圈组成。铁芯是由 0.3mm 厚的矽钢片叠合而成。线圈分四个绕组, 每组 100 匝, 线径为 2.1mm。工作时, 分别将两组串联, 然后再并联, 最大工作电压为 250V, 采用 50Hz 交流电源。测试工作在铁芯缺口里进行。缺口每边除 1cm 宽度具有边缘效应外, 其有效工作面积为 $10 \times 10\text{cm}^2$ 。

测量触头总成如图 6 所示, 两根硬质金属探针 (非铁磁物质) 固定在球头柱上, 球头柱用插销与套管固定, 套管嵌入固定板的孔内, 上端部和转动手柄固牢。用两根拧在一起的漆包线连接两根探针, 并顺手柄引出连接信号传输线。工作时固定板装在可以纵横移动的定位

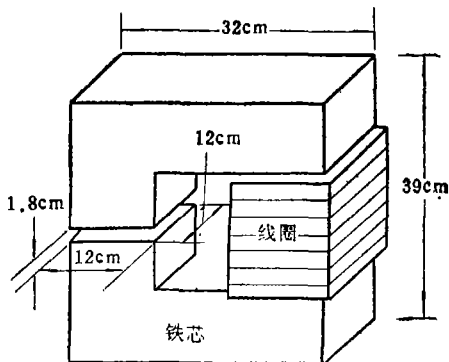


图 5

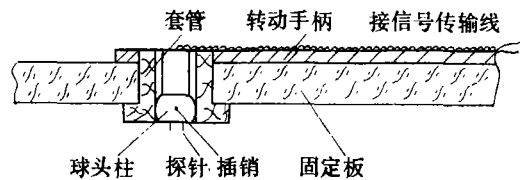


图 6

架上, 以准确地确定测量点坐标位置, 两探针的方位可以用转动手柄调整, 以选择测量方向。

3 对于几种形状截面的测量结果

为了检验本比拟方法的正确性和可行性,选择了一些已有解析解或近似解的截面形状,对抗扭刚度及剪应力进行测量,以资比较;同时还测量了一些还没有解析解的常见复连通形状和工程常见轴类零件的截面形状。在换算中以圆形截面的数据作为标定值。

1 抗扭刚度测量

抗扭刚度测量是在功率表上采取读数,测得读数后按下式计算:

$$C_m = \left(\frac{M}{\theta} \right)_m = K_1 W_m G \quad (2.1)$$

$$K_1 = J_r / W_{cm} \quad (2.2)$$

式中 W_m , W_{cm} 分别为被测导体片和标定圆片功率读数值, J_r 为标定圆片的极惯性矩,按 $\pi d^4/32$ 计算, K_1 称为刚度标定系数或刚度换算系数。

2 扭转剪应力测量

扭转剪应力测量是在电压表上采取读数,测量后按下式换算:

$$\tau_m = K_2 \frac{E_m}{C_m/G} M \quad (2.3)$$

$$K_2 = r / E_{r,m} \quad (2.4)$$

式中 E_m , E_{cm} 分别为被测导体片测点上与标定圆导体片边上所测得的电压值, r 为标定圆片的半径, K_2 称为应力标定系数或应力换算系数。

对于有理论解的形状测量后可由下式计算相对误差 δ_1 (指刚度), δ_2 (指应力)

$$\delta = \left| \frac{v_m - v_a}{v_a} \right| \quad (2.5)$$

其中, v_m 为测量值, v_a 为理论值。

以正方形导体片的计算说明如下:

标定圆片: $r = 4.5\text{cm}$, $J_r = 644.1\text{cm}^4$, $W_{cm} = 94.0$, $E_{cm} = 1021$

方形导体片: 边长 = 8cm , $C_a = 575.9\text{kg}\cdot\text{cm}^2$

$$\tau_{\max a} = 9.39 \times 10^{-3} M, W_{sm} = 84.3, E_{sm} = 1212$$

抗扭刚度计算

$$K_1 = \frac{644.1}{94.0} = 6.852$$

$$C_{sm} = 6.852 \times 84.3 G = 577.7 G \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$$

$$\delta_1 = \left| \frac{577.7 - 575.9}{575.9} \right| = 0.3\%$$

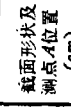
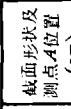





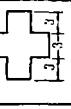
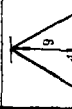

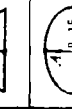
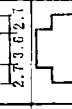
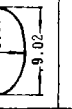
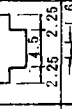


扭转剪应力计算:

$$K_2 = \frac{4.5}{1021} = 4.407 \times 10^{-3}$$

$$\tau_{\max m} = 4.407 \times 10^{-3} \times \frac{1212}{577.7} = 9.247 \times 10^{-3} M \text{ kg}/\text{cm}^2$$

$$\delta_2 = \left| \frac{9.247 - 9.39}{9.39} \right| = 1.5\%$$

表 3 几种形状截面抗扭刚度及最大剪应力测量结果

截面形状及 测点A位置 (cm)	抗扭刚度 计算值 C_t (kg-cm ²)	测量值		相对 误差 δ_1	最大剪应力 计算值 τ_{max} (kg/cm ²)	测量值		相对 误差 δ_2	截面形状及 测点A位置 (cm)	抗扭刚度 计算值 C_t (kg-cm ²)	测量值		相对 误差 δ_1	最大剪应力 计算值 τ_{max} (kg/cm ²)	测量值		相对 误差 δ_2
		功率表 读数 (格)	抗扭刚度测量 值 C_m (kg-cm ²)			电压表 读数 τ_m (mV)	τ_{max} (kg/cm ²)				功率表 读数 (格)	抗扭刚度测量 值 C_m (kg-cm ²)			电压表 读数 τ_m (mV)	τ_{max} (kg/cm ²)	
	644.1G	94.0			$6.986 \times 10^{-3}M$	1021					79.0	541.3G ²					
	575.9G	84.3	577.7G	0.3%	$9.390 \times 10^{-3}M$	1212	$9.247 \times 10^{-3}M$	1.5%		151.2G ³	22.1	151.4G	0.11%				
	252.5G	37.2	254.9G	0.9%	$17.82 \times 10^{-3}M$	1013	$17.51 \times 10^{-3}M$	1.7%		249.5G ³	36.0	246.7G	1.1%				
	527.8G	76.8	526.3G	0.3%	$8.501 \times 10^{-3}M$	1024	$8.575 \times 10^{-3}M$	0.8%		434.2G ³	63.2	433.1G	0.26%				
	103.9G ²	15.3	104.8G	0.9%	$35.29 \times 10^{-3}M$	839	$35.27 \times 10^{-3}M$	0.06%				188.0G ⁴					
	371.0G ¹	54.0	370.0G	0.3%	$17.44 \times 10^{-3}M$	1475	$17.52 \times 10^{-3}M$	0.5%				163.6G ²					
	277.3G ¹	40.7	278.9G	0.6%	$21.59 \times 10^{-3}M$	1357	$21.44 \times 10^{-3}M$	0.7%				161.2G ⁴		$25.89 \times 10^{-3}M^4$			
	802.0G	88.0	803.0G	0.15%								43.0G ⁴		$78.8 \times 10^{-3}M^4$			

1) 计算值按文献[1]有关章节计算。

2) A. A. Griffith 与 G. I. Taylor 用皂膜比拟实验结果偏心圆环与同心圆环抗扭刚度的比值为 0.924, 本试验结果为 0.898。

3) 计算值按《应用数学和力学》1982 年第一期第 113—118 页陈宜周、陈宜亭论文, 其中第二个数字系内差得出, 若按 B. Л. Абрагнн 采用分割法求出的刚度上下限平均值, 则此三个数分别为 149.3, 246.5 及 430.8。

4) 这些试验所采用的导体片材料与前不同, 故未给出试验中的测量读数。

本测试过程费时甚少，连同圆片标定以及误差计算前后不过花数分钟时间，而且对于复连通截面测试一样迅速准确，为本方法特别优越之处。

现将几种截面的解析解（或近似解）以及实际测量结果和相对误差列于表3中。

由表中的测量数据可以看出，与计算值比较应力及刚度的相对误差一般都在2%以内。

三、几点讨论

1 关于集肤效应的讨论

前面假定导体片很薄，形成涡电流很小，因而对磁场的反作用是个微量，所以认为磁感应强度 B 对坐标 (x, y) 是个常量。这种论断是假设导体片厚度 $e \rightarrow 0$ 或者电阻率 $\rho \rightarrow \infty$ 而得到的，而事实上是不可能的。一般地说，在磁场中导体片上的涡流，在中间部分环绕的多，靠近外边界环绕量逐渐减小。磁场中间部分受到影响较大，向外次之。影响结果，使合成的磁感应强度中间略小于边部，因而在导体片上感应的涡电流密度中间部分略小于理论计算值¹⁾，有把电流向外排挤的趋势，这种现象称为集肤效应。图7是一个圆形导体片上磁感应强度和电流密度与边界上对应量的比值对于半径的分布曲线。从理论上计算电流密度分布因集肤效应引起的变化是非常困难的，但从试验中可以测得磁场受影响最严重的区域和数值，然后从最不理想的情况出发——认为磁场处处都受到这样的影响——来考虑误差范围。

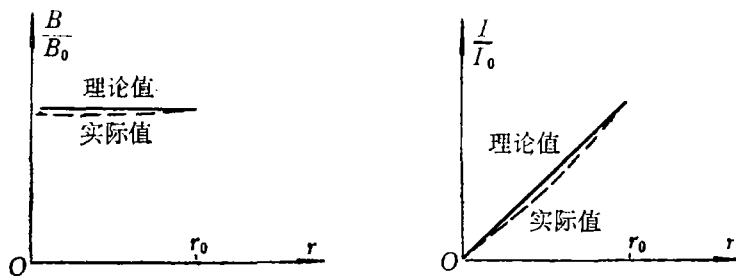


图 7

为方便起见，以实际磁感应强度 B_e 与理论磁感应强度 B_a 最大相对误差定义一个导体片集肤效应的特征，用字母 Ω 表示，即：

$$\Omega = \max \left| \frac{B_e - B_a}{B_a} \right| \quad (3.1)$$

现讨论集肤效应引起的误差范围，首先注意到：

$$B_e = \bar{B}_e \sin \omega t, \quad B_a = \bar{B}_a \sin \omega t$$

则
$$B'_e = \bar{B}_e \omega \cos \omega t, \quad B'_a = \bar{B}_a \omega \cos \omega t$$

式中 \bar{B} 表示交变磁感应强度的幅值。

所以

$$\left| \frac{B_e - B_a}{B_a} \right| = \left| \frac{B'_e - B'_a}{B'_a} \right|$$

1) 事实上导体片上靠边界部分和中间部分的磁感应强度不但大小上有个差值，而且时间上还有一个相位差。在涡流很小的情况下，此相位差非常微小，讨论中不考虑其影响，只研究大小差值引起的误差。

由 (1.11) 式可以得到:

$$dI_x = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \omega}{\partial y} dB'$$

所以由磁感应强度变化引起 I_x 的相对误差 Ω_{I_x} 为:

$$\begin{aligned} \Omega_{I_x} &= \left| \frac{dI_x}{I_x} \right| = \left| \frac{dB'}{B'} \right| = \left| \frac{B'_e - B'_a}{B'_a} \right| \\ &= \left| \frac{B_e - B_a}{B_a} \right| \leq \max \left| \frac{B_e - B_a}{B_a} \right| = \Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

同样:

$$\Omega_{I_y} \leq \Omega \quad (3.3)$$

如上处理 (1.17) 式, 可得功率由集肤效应引起的误差范围:

$$\Omega_w \leq 2\Omega \quad (3.4)$$

由上面三式可以看出 Ω , 2Ω 分别是扭转剪应力和抗扭刚度的误差限。

以上讨论可以看出, 减小 Ω 值就会降低误差范围。 Ω 的大小与导体片厚度、电阻率有关。一般地说, 厚度小、电阻率大的导体片 Ω 值就非常小。但厚度很小的导体片的厚薄均匀程度变差, 因而应该选择电阻率大而厚薄均匀程度可以保证的导体片为佳。前面的试验是采用厚度为 0.35mm 的铜皮或者厚度为 1mm 的铝皮做导体片, Ω 值都小于 1%, 但后者试验效果为好。

还应该指出, 实际测量误差往往小于所给的误差限很多, 这是因为一方面上述误差限是很保守的估计; 另一方面, 标定片与被测片都存在着这样的误差, 计算后这两个误差在很大程度上被抵消。

2 影响测量精度的一些主要因素

在测量过程中, 实际测量值与理论计算值 (指具有解析解形状的截面) 总有一定的误差。误差的因素是多方面的, 有必要对主要因素进行分析研究, 以尽量减小其影响。

(1) 磁场的均匀性

磁场的均匀性用下式表示:

$$q = \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{av}} \quad (3.5)$$

式中 B_{\max} , B_{\min} , B_{av} 分别为磁场工作面积中同一时刻最大、最小和平均磁感应强度。

q 的变化范围是 $q \geq 0$, q 接近于零时说明磁场均匀性良好。 q 对于应力和刚度测量的影响类似于集肤效应 Ω 的影响。 q 值是磁场发生器的本身特征, 它和铁芯缺口上下表面平行度关系最大, 因而对该平行度在工艺上要提出较高的要求。其次应使缺口处矽钢片压紧, 保证矽钢片分布均匀。还应该在矽钢片之间采取绝缘措施, 以消除铁芯中涡流窜动对磁场发生影响。

(2) 测量仪表

仪表的精度, 直接关系到测量精度。对于相同的电量, 随工作环境和条件不同, 测量结果有所差异。因而对仪表应考虑到精度的要求, 同时在试验中应注意到仪表的工作环境和条件, 例如放大器和电压表不要放在强磁场附近。

(3) 外界信号干扰

在测量应力时，电压信号比较微弱，需要放大，这样外界电磁场干扰信号也会窜入放大系统，对测量精度造成影响。要消除这个影响，必须对信号源和信号传输线予以屏蔽，并连同仪表外壳良好地接地。

(4) 探头精度

a) 两探针的尖锐程度关系到两探针间的被测微段的长度是否每次都能相等。若探针稍钝，由于探针和导体片接触的随机性，每次可能是探针端部的中心点接触，也可能是边缘点接触，就会引起测量微段长度的差异，给应力信号带来测量误差。因此探针端部必须尖锐，同时采用不易磨损的硬质合金制作探针。

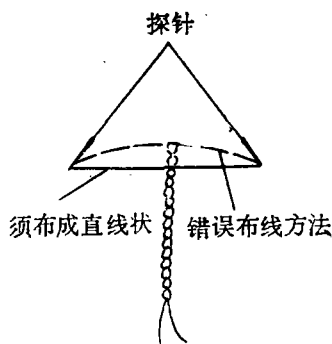


图 8

b) 两探针的各自连线必须直线地引到两探针间的中点，再拧合引出，不要偏移任一方（图 8），否则测量时会有一个附加信号窜入，对精度造成影响。

(5) 应力过度急躁

测量应力是对电场强度的测量，而实际以两探针间（认为位长度）的电压值作为中点的电场强度，它们之间存在着差别，在应力变化剧烈处，差别较大，解决这一问题的方法是缩小两探针间的距离，放大导体片的尺寸。

(6) 导体片的温度变化

测量导体片的发热功率时，导体片会很快发热，使功率值下降，给测量刚度带来误差。克服这一影响的最有效的方法是选择小量程的功率表，测量时将磁场强度调弱，在表针稳定后，立即测出读数，这样由温度变化带来的误差基本消除。

(7) 导体片的精度

导体片的精度包括加工形状几何尺寸的精度和所采用的导体片厚度的均匀性，这两者都会引起测量误差。

(8) 线路参数的影响

在测量刚度时，线路中串入了功率表（图 4），计算时并没有考虑到其内阻的影响。事实上当磁场中放入导体片时，电路电流增加，使表头压降有一个微小上升，因而磁场发生器电压稍有下降，导致磁感应强度 B 减小，这就会引起消耗功率大于标定片的导体片，刚度测量稍小于理论值，反之则大于理论值。因而制作几个大小不同的标定片，测量时选取与被测件功率相近的标定片来标定，就会克服这个影响。

四、涡流比拟的其它应用

人们很早就发现流体力学中某些流场与扭转问题的相似性，并用来比拟扭转问题。但这个比拟没有彻底实现。而扭转问题的发展，反使得这类流场中的一些问题得到解决。同样本文所讨论的涡流比拟也可以用来模拟这类流场的流速和动能问题。事实上 (1.8)，(1.9) 式可归结为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = B'(t)\mathbf{K} \quad (4.2)$$

两个矢量方程式。因而它可以直接模拟满足一定边界条件有旋（旋为常矢）无源矢量场。这种比拟是否可推广到更一般的平面泊松场求解尚待进一步研究。

五、结 论

1. 涡流比拟是异于其它比拟的一种新的比拟理论和方法。它可以完满定量地解决扭转剪应力和抗扭刚度问题。对任何形状截面都可以得到足够精确的结果。
2. 与其它已有的比拟方法相比，本方法试验手段简便，精确度高，测量迅速，能解决工程上的实际问题，是本方法特别优越之处。
3. 由于流体力学某些流场与扭转问题的相似性，本方法可直接用于流体力学这类场的模拟。
4. 这种比拟方法有待于推广到一般泊松方程的模拟，有待于进一步发展，以便解决更为复杂的问题。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长等, 《弹性柱体的扭转理论》, 科学出版社 (1956).
- [2] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1980).
- [3] 荆广生, 《弹性力学》, 江苏工学院.
- [4] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, third edition, McGraw-Hill Book Company (1970).
- [5] Grant, I. S. and W. R. Phillips, *Electromagnetism*, John Wiley and Sons Ltd. (1976).
- [6] Binns, K. J. and P. J. Lawrenson, *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*, 2nd edition, Pergamon Press (1973).
- [7] Kemmer, N., *Vector Analysis*, Cambridge University Press (1977).

Eddy Current Analogy of Torsion Problem

Wang Zhen-min Zhang Ke-xue

(Jiangsu Institute of Technology, Jiangsu)

Abstract

In this paper, an eddy current analogy and a brief sketch of required equipment are presented. Values of torsional rigidity and shearing stresses of a prismatic bar under free torsion can be obtained experimentally to a high degree of accuracy in an instant with this equipment whether the cross-section is bounded by a single boundary or multi-connected boundaries. The error is less than two per cent generally, as shown in Table 3. This new analogy can be used extensively to solve various physical problems expressed by Poisson's (or Laplace's) equation with constant boundary condition.