应用数学和力学，第7卷第5期(1986年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

更一般的杂交广义变分原理及有限元模型*

陈 万 吉

（大连工学院，1985年4月5日收到）

摘 要

本文根据钱伟长教授提出的更一般的广义变分原理，给出了适用于有限元法中的更广义杂交变分原理，并由此建立了新的广义杂交模型。

进一步以变厚度薄板弯曲单元为例，对基于各种不同的广义变分原理建立的各种杂交元做了比较。

一、弹性力学中更一般的广义变分原理

最近，钱伟长教授提出高阶拉格朗日乘子法并建立了弹性理论中更一般的广义变分原理[1]，从而更进一步地统一和推动了对广义变分原理的研究。

用一般的拉格朗日乘子法建立弹性力学中的广义变分原理有两个不足之处。第一，不能从势能原理直接得到Reissner原理。第二，不能从余能原理直接得到胡海昌-鹫津广义变分原理。可见，用以往的拉格朗日乘子法建立广义变分原理是有局限性的。

钱伟长教授提出的高阶拉格朗日乘子法进一步的发展了拉格朗日乘子法，克服了用传统拉格朗日乘子法建立广义变分原理存在的困难，并进一步建立了新的更一般的广义变分原理。

钱伟长教授给出的高阶拉格朗日乘子项还可以做为罚函数引进，这样会更直接些，并且增加了对高阶乘子项的一种物理解释。

在建立弹性力学中更一般广义变分原理时，是将域内的应力、应变关系做为高阶乘子项引入。在弹性力学中，应力应变关系可表示为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.1}$$

或

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.2}$$

或

$$\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}=0 \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为应变，应力。$\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ 分别为柔度，弹性系数矩阵，且 $\mathbf{a}^{-1}=\mathbf{A}$。

不难证明，$\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})^T\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})$

* 唐立民推荐.

$=-(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})/2$。就是说(1.3)式等价于用高阶项表示的应力、应变关系约束。

我们将(1.3)式做为罚函数直接引入泛函中，结合拉格朗日乘子法可以分别从势能原理和余能原理推出两个等价的更一般的广义变分原理。详细推导可参见文[1]。其泛函为：

$$\Pi_{P\lambda}=\Pi_{G1}+\iiint_V\lambda\left(\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\right)dV \tag{1.4}$$

及

$$\Pi_{C\lambda}=\Pi_{G2}-\iiint_V\lambda\left(\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\right)dV \tag{1.5}$$

其中

$$\Pi_{G1}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{D}^T\mathbf{u})-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS-\iint_{S_u}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{1.6}$$

$$\Pi_{G2}=\iiint_V\left[\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{u}\right]dV-\iint_{S_\sigma}(\mathbf{T}-\bar{\mathbf{T}})^T\mathbf{u}dS-\iint_{S_u}\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{u}}dS \tag{1.7}$$

其中，$\mathbf{D}$ 为平衡方程对应的微分算子，$\mathbf{T}$ 为边界力，$\mathbf{u}$ 为位移，$\bar{\mathbf{F}}$ 为给定的体积力、$\bar{\mathbf{T}}$ 和 $\bar{\mathbf{u}}$ 分别为边界 S_σ 和 S_u 上给定的边界力和边界位移，λ 为任意给定的常数。

进一步可以证明，由 $\delta\Pi_{P\lambda}=0$ 或 $\delta\Pi_{C\lambda}=0$，λ 取任何常数所对应的变分方程都等价于弹性力学全部基本方程。

显然，$\Pi_{P\lambda}=-\Pi_{C\lambda}$。

$\Pi_{P\lambda}$ 和 $\Pi_{C\lambda}$ 是完全无约束的更广义变分原理，现有的各种广义变分原理，包括胡海昌-鹫津广义变分原理都是它的特例。

对应不同的 λ 值，可以得到各种广义变分原理。

（1） 当 $\lambda=0$ 时，记 $\Pi_{P\lambda}$ 和 $\Pi_{C\lambda}$ 为 Π_{P0} 和 Π_{C0}，由(1.5)，(1.6)式可知，它与胡海昌-鹫津广义变分原理等价。由于 $\Pi_{C\lambda}$ 是由余能原理直接推出的，因此，用这种方法解决了拉格朗日乘子法存在的问题。

（2） 当 $\lambda=1$ 时，记 $\Pi_{P\lambda}$ 和 $\Pi_{C\lambda}$ 为 Π_{P1} 和 Π_{C1}，显然它与 Reissner 原理等价。由于 $\Pi_{P\lambda}$ 是由势能原理直接推出的，因此，用这种方法又克服了拉格朗日乘子法的另一个问题。

（3） 当 $\lambda=1/2$ 时，记 $\Pi_{P\lambda}$ 和 $\Pi_{C\lambda}$ 为 $\Pi_{P\frac{1}{2}}$ 和 $\Pi_{C\frac{1}{2}}$，则有，

$$\Pi_{P\frac{1}{2}}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}+2\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^T\mathbf{u})\right]-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right\}dV$$

$$-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS-\iint_{S_u}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{1.8}$$

$$\Pi_{C\frac{1}{2}}=-\Pi_{P\frac{1}{2}}$$

这个变分原理不能从胡海昌-鹫津变分原理推出。如果在(1.8)式中代入约束条件 $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}^T\mathbf{u}$ 则

$$\Pi_{P\frac{1}{2}}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^T\mathbf{u})\right]-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right\}dV-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS-\iint_{S_u}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{1.9}$$

这就是梁国平、付子智给出的广义变分原理[2]。

如果在(1.9)式中代入$\iiint_V\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^T\mathbf{u})dV=\iint_{S_\sigma+S_u}\mathbf{T}^T\mathbf{u}dS-\iiint_V(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}dV$ 并满足约束条件 $\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}=0$ 且不计体积力 $\bar{\mathbf{F}}$ 时，

$$\Pi_{P\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\iiint_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\right)dV-\iint_{S_\sigma}\mathbf{u}^T(2\bar{\mathbf{T}}-\mathbf{T})dS-\iint_{S_u}\mathbf{T}^T(2\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})dS\right] \tag{1.10}$$

这就是文[3]所用的混合变分原理。

（4） 当 $\lambda=-1$ 时，记 $\Pi_{P\lambda}$ 和 $\Pi_{C\lambda}$ 为 Π_{P-1} 和Π_{C-1}，则有，

$$\Pi_{P-1}=\iiint_V\left[\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-2\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^T\mathbf{u})+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS-\iint_{S_u}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{1.11}$$

这个变分原理也不能直接从胡海昌-鹫津广义变分原理推出。如果在(1.10)式中代入约束条件，$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}^T\mathbf{u}$（在域内），$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$（在边界 S_u 上），得：

$$\Pi_{P-1}=\iiint_V\left[(\mathbf{D}^T\mathbf{u})^T\mathbf{A}(\mathbf{D}^T\mathbf{u})+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^T\mathbf{u})-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right]dV-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{u}dS \tag{1.12}$$

这就是 Oden 给出的本构-势能原理[4]。

当 λ 取不同的常数时，就会得到各种新的广义变分原理，从而使各种广义变分原理有了一个更为统一的框架。如果将 λ 理解为应力应变关系约束的惩罚函数因子，则按罚函数的性质可知，当$\lambda\to\infty$时，应力、应变约束将会得到满足，这样$\Pi_{P\lambda}$ 和$\Pi_{C\lambda}$就会退化成Reissner原理，即与 $\lambda=1$ 时相同。在近似计算中关于不同 λ 值对近似解精度的影响是个有待进一步研究的课题。本文将用有限元法中的一个算例讨论这个问题。

二、有限元法中更一般的杂交广义变分原理

将 $\Pi_{P\lambda}$ 和$\Pi_{C\lambda}$ 直接用于建立有限元模型时，为了保证收敛，通常要顾及 $\Pi_{P\lambda}$ 中对 $\mathbf{u}$ 的协调要求或 $\Pi_{C\lambda}$ 中对 $\boldsymbol{\sigma}$ 的协调要求．根据 $\Pi_{P\lambda}$ 或$\Pi_{C\lambda}$ 用不协调的单元函数建立有限元模型很不方便。如果对 $\Pi_{P\lambda}$ 或$\Pi_{C\lambda}$ 应用拉格朗日乘子法放松单元间的协调约束，就可以建立适用于有限元法的广义变分原理。按照文[5]的方法，可以从 $\Pi_{P\lambda}$ 和$\Pi_{C\lambda}$ 直接建立两种更广义的杂交变分原理。

$$\Pi_{mP\lambda}=\sum_e\iiint_{V_e}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{D}^T\mathbf{u})-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}+\lambda\left(\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\right)\right]dV$$

$$-\sum_e\iint_{\partial V_e}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}})dS-\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{u}}dS \tag{2.1}$$

或
$$\Pi_{mC\lambda}=\sum_e\iiint_{V_e}\Big[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}+(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\mathbf{F}})^T\mathbf{u}-\lambda\,(\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})\Big]dV-\sum_e\iint_{\partial V_e}\mathbf{T}^T\tilde{\mathbf{u}}dS+\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\tilde{\mathbf{u}}dS \tag{2.2}$$

其中，$\tilde{\mathbf{u}}$ 为单元边界 ∂V_e 上的位移插值函数，它有两种构造方法。第一种是使 $\tilde{\mathbf{u}}$ 由单元间公共参数唯一确定，这是常见的杂交方法。第二种是使 $\tilde{\mathbf{u}}=(\beta\mathbf{u}^a+\alpha\mathbf{u}^b)/(\alpha+\beta)$，其中 α，β为任意常数($\alpha+\beta\neq0$)，$\mathbf{u}^a$ 和 $\mathbf{u}^b$ 为单元交界面两侧不协调单元函数在交界面处的位移。当 α 和β 取不同值时，例如 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha=0$、或 $\beta=0$ 时又常被称之为分区广义变分原理[3][7][8]。

三、更广义的杂交模型

根据 $\Pi_{mP\lambda}$ 或 $\Pi_{mC\lambda}$ 建立的模型可称之为更广义的杂交模型。

在单元内假定，

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}\\&\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}\boldsymbol{\beta}\quad\text{则}\ \mathbf{T}=\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}\\&\mathbf{u}=\mathbf{B}\mathbf{q}\\&\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{L}\mathbf{q}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为单元内的独立参数，$\mathbf{q}$ 为节点参数，$\mathbf{N}$，$\mathbf{P}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{L}$ 为相应的插值函数，$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{P}$ 相关。代入 $\Pi_{mC\lambda}$ 中得：

$$\Pi_{mC\lambda}=\sum_e\Big[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{W}\mathbf{q}-\lambda\Big(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{G}\mathbf{q}\Big]+\mathbf{q}^T\mathbf{Q} \tag{3.2}$$

其中
$$\mathbf{H}=\iiint_{V_e}\mathbf{N}^T\mathbf{A}\mathbf{N}dV$$

$$\mathbf{D}=\iiint_{V_e}\mathbf{P}^T\mathbf{N}dV$$

$$\mathbf{C}=\iiint_{V_e}\mathbf{P}^T\mathbf{a}\mathbf{P}dV$$

$$\mathbf{W}=\iiint_{V_e}\mathbf{P}_1{}^T\mathbf{B}dV$$

$$\mathbf{G}=\iint_{\partial V_e}\mathbf{R}^T\mathbf{L}dS$$

$$\mathbf{q}^T\mathbf{Q}=\sum_e\iiint_{V_e}\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{C}\mathbf{q}dV+\iint_{S_\sigma}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{L}\mathbf{q}dS$$

由 $\frac{\partial \Pi_{mC\lambda}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}=0$ 得 $\sum_e -\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{D}^T\boldsymbol{\beta}+\lambda(\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{D}^T\boldsymbol{\beta})=0$ (3.3)

由 $\frac{\partial \Pi_{mC\lambda}}{\partial \boldsymbol{\beta}}=0$ 得 $\sum_e \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}+(\mathbf{W}-\mathbf{G})\mathbf{q}+\lambda(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})=0$ (3.4)

由 $\frac{\partial \Pi_{mC\lambda}}{\partial \mathbf{q}}=0$ 得 $\sum_e (\mathbf{G}-\mathbf{W})^T\boldsymbol{\beta}=\mathbf{Q}$ (3.5)

由 (3.3) 得 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}^T\boldsymbol{\beta}$ (3.6)

将(3.6)代入(3.4)得 $\boldsymbol{\beta}=[(1-\lambda)\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}^T+\lambda\mathbf{C}]^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{W})\mathbf{q}$ (3.7)

将(3.7)代入(3.5)得 $\sum_e \mathbf{K}^e\mathbf{q}=\mathbf{Q}$ (3.8)

其中单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^e$ 为：

$$\mathbf{K}^e=(\mathbf{G}-\mathbf{W})^T[(1-\lambda)\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}^T+\lambda\mathbf{C}]^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{W}) \tag{3.9}$$

当 $\lambda=0$ 时得广义杂交元。当 $\lambda=1$ 时得广义杂交应力元，为果这时单元内假定的应力满足平衡方程得杂交应力元。

四、变厚度弯曲薄板的更广义杂交模型

杂交元放松了对单元函数的协调要求，因此，可以在较大范围内选择试探函数，而使单元的性能尽可能的得到改善。广义杂交元在单元内增加了变量的数目，并尽可能的放松了对这些变量的约束，例如，单元内平衡条件，连续性条件，应力、应变关系及单元间的协调条件等，更加改善了杂交元的性能。

对于变厚度薄板单元，杂交应力是不方便的，因为 $\mathbf{C}$ 矩阵的精确计算出现困难，又不能避免对 $\mathbf{C}$ 阵的求逆运算。而用广义杂交元就可以避免上述问题[6]。

对于更广义杂交元，这里给出一个三角形薄板单元，其厚度按线性变化，并用计算实例说明 λ 值对精度的影响。

单元节点参数为一个横向位移和二个方向的转角（图 1）。

单元内的应力和应变用面积座标表示的线性插值。

单元间的位移用单元间的公共节点参数构造插值函数，位移 w 为三次函数，法向导数 $\partial\tilde{w}/\partial n$为线性函数。

由此可推得单元刚度矩阵中的 $\mathbf{G}$，$\mathbf{W}$，$\mathbf{D}$ 矩阵的显式，而 $\mathbf{H}^{-1}$，$\mathbf{C}$ 可通过数值积分求得[6]。

作为数值例子，计算了无限宽线性变厚度，受均匀载荷作用的悬臂板，尺寸如图 2 所示。弹性常数为 $E=2\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$，$\nu=0.3$。

不同的 λ 值对应不同的杂交模型，当 $\lambda=1$ 时为杂交应力元（单元应力场满足平衡），当$\lambda=0$时为广义杂交元，当$\lambda=1/2$时为文[2]给出的变分原理对应的杂交元，当 $\lambda=-1$ 时为文[3]给出的变分原理对应的杂交元。在图 3中分别记为R，H，L，O。

关于 A 点的挠度的计算结果参见表 1 及图 3。从图 3 可以看出，当网格加密到一定程度，对应不同的 λ 值的杂交元有几乎相同的精度，对于这类单元，如果考虑到计算效率，

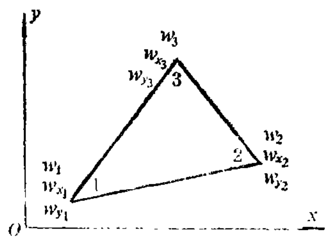

图 1

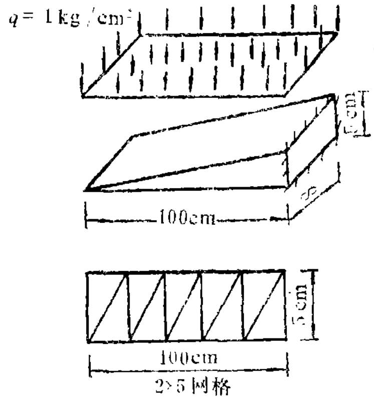

图 2

表 1 　　　　A点的挠度(cm)　　梁解析解w_A=2.184cm

λ \ w_A \ 网格	2×2	2×4	2×6	2×8	2×15	2×20
0	2.555	2.379	2.311	2.274	2.219	2.206
1	2.728	2.428	2.320	2.271	2.216	2.205
−1	2.537	2.398	2.256	2.240	2.208	2.200
0.5	2.690	2.423	2.321	2.272	2.216	2.205
−0.5	2.511	2.371	—	2.228	2.206	2.197
2	2.792	2.440	2.323	2.273	2.218	2.206
−2	2.385	2.359	2.280	2.252	2.209	2.199
5	2.930	2.471	2.338	2.284	2.223	2.210
−5	3.069	2.254	2.220	2.211	2.200	2.196

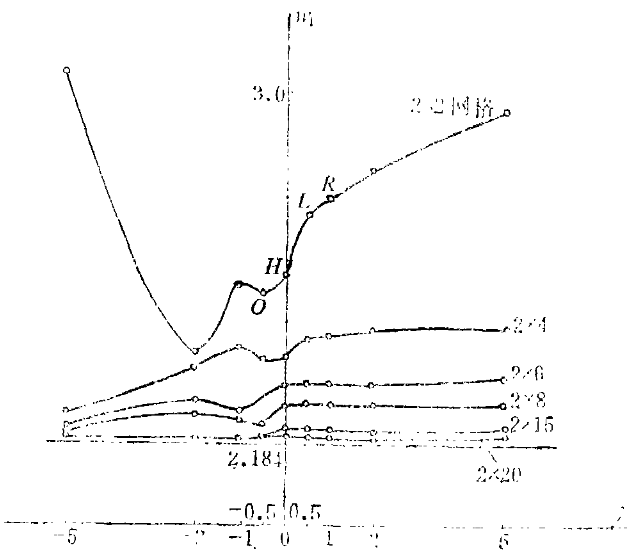

图 3

节省机时，还是广义杂交元(H)便于实施。从(3.8)式可以看出对于广义杂交元 ($\lambda=0$) 可以避免求逆运算，而对于其他的 λ 值则无法避免这种求逆运算。

对有限方法，做为罚函数的因子不必取得太大。惩罚因子是用来控制单元内应力。应变关系满足的程度，当$\lambda\to\infty$时，即使单元内应力应变关系严格满足，这时的结果应与$\lambda=1$相同，都是对应Reissner原理。从图3也可以看出不同的λ值。当网格加密到一定程度时，对精度影响不大。另外，当λ值取得太大时，往往要求很高的计算精度，否则，方程出现病态。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学与力学，**4**，2（1983）。

[2] Liang Guo-ping(梁国平)and Fu Zi-zhi(付子智),A New method for the construction element, *Proccedings of the Intenational Conference On Finite Element Methods*, Shanghai, 2—6, August (1982), 593—599.

[3] Michael., L. Day and T. Y. Yang, A mixed variatianal principle for finite element analysis, *Int. J. Num. Methods Engng.*, 8 (1982), 1212—1230.

[4] Oden, J. T., The classical variational principles of mechanics, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Edited by R. Glowinsk, E. Y. Rodin., O. C. Zienkiewicz (1979), 1—31.

[5] 陈万吉，杂交广义变分原理及杂交模型，大连工学学报，4（1983）。

[6] 陈万吉，变厚度薄板，壳广义杂交元，力学学报（待发表）。

[5] 钱伟长，《变分法和有限元》，科学出版社（1980）。

[8] 龙驭球，弹性力学中的分区广义变分原理，上海力学，2（1981）。

More Generalized Hybrid Variational Principle and Corresponding Finite Element Model

Chen Wan-ji

(*Dalian Institute of Technology, Dalian*)

Abstract

According to recent studies of the generalized variational principle by Professor Chien Wei-zang, the mere generalized hybrid variational principle for finite element method is given, from which a new kind of the generalized hybrid element model is established.

Using the thin plate bending element with varying thickness as an example, we compare various hybrid elements based on different generalized variational principles.