应用数学和力学，第 7 卷第 4 期（1986年 4 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于板的动力学的最小转换能量原理和最小值原理*

李家仁　　张慎学

（吉林大学，1984年1月16日收到）

摘　要

本文首先通过Laplace变换导出了关于具有三个广义位移并考虑转动惯量效应时各向异性的线弹性板在动力学中的转换虚功原理和三个最小转换能量原理及其在原空间时间域中用原函数表示的对应形式，然后通过引进相容权函数的集合推导出关于空间时间域的三个最小值原理。在上述两组最小值原理中各有两个均为板在静力学中最小势能原理和最小余能原理的推广形式；而另一个最小值原理，在静力学中便没有对应形式.

一、混合边值问题

考虑一个各向异性的线弹性板的弯曲运动问题。设板的中面 $\bar{\Omega}$ 位于 x_1x_2 平面内并且 x_1，x_2，x_3 轴互相垂直，Ω是$\bar{\Omega}$ 的内部，C 是 $\bar{\Omega}$ 的按段光滑的边界。设 $h(\mathbf{x})$ 是板的厚度，$\mathbf{x}\equiv(x_1,\ x_2)\in\bar{\Omega}$。板的两表面方程为

$$x_3=\pm h(\mathbf{x})/2 \qquad (\mathbf{x}\in\bar{\Omega}) \tag{1.1}$$

现引进下述记号和定义：

(a) 全文只用下标 i 表示亚指标和自由指标($i=1,\ 2$)；

(b) $(\ \ )_{,i}=\partial(\ \ )/\partial x_i$，$i$只取1，2.

$(\dot{\ })=\partial(\ \ )/\partial t$，$t$表示时间；

(c) $f\in C^{M,N}$ 是指 $f(\mathbf{x},\ t)$对每一$(\mathbf{x},\ t)\in\bar{\Omega}\times[0,\ \infty)$关于$x_i$至少$M$次，关于$t$至少 N 次连续可微。向量函数 $\mathbf{f}\in C^{M,N}$ 是指 $\mathbf{f}$ 的分量均属于 $C^{M,N}$，$F=(\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \mathbf{f}_3)\in C^{M,N}$ 是指 $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\in C^{M,N}$；

(d) 一个函数$f(\mathbf{x},t)$在∞是有界的，指的是对f的定义域中的每个 $\mathbf{x}$ 极限$\lim\limits_{t\to\infty}f(\mathbf{x},t)$ 存在。向量函数在∞有界是指它的分量均在∞有界。

本理论假设：变形前垂直中面的直线段在运动中仍保持为直线段。因此板内各点（x_1，x_2，x_3）在时刻t的位移分量可表示为

$$u_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=-x_3\varphi_i(\mathbf{x},\ t),\ w(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=w(\mathbf{x},\ t) \qquad (\mathbf{x},\ t)\in\Omega\times(0,\infty) \tag{1.2}$$

* 叶开沅推荐.

φ_i 是变形前垂直中面的直线段的转角，并且 φ_i 是 x_ix_3 平面内的转角，以从x_i轴经90°到x_3轴的转向为正。w为中面的挠度，它的正向与x_3轴正向一致。

设板中应力由下列5个广义内力决定：

$$\mathbf{M}^T=(M_1,\ M_2,\ M_{12})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_{12})x_3dx_3 \quad 在\Omega\times[0,\ \infty)上 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{Q}^T=(Q_1,\ Q_2)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{13},\sigma_{23})dx_3 \quad 在\Omega\times[0,\ \infty)上 \tag{1.4}$$

正的弯矩 M_i 在 $x_3>0$ 的一边产生正的法应力 σ_i，正的扭矩M_{12}在$x_3>0$ 的一边产生正的剪应力 σ_{12}，正的剪力 Q_i 产生正的剪应力σ_{i3}，广义内力与广义位移之间的关系为

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}\mathbf{k},\quad \mathbf{Q}=\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} \quad 在\ \Omega\times(0,\ \infty)上 \tag{1.5}$$

或

$$\mathbf{k}=\mathbf{d}\mathbf{M},\quad \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{c}\mathbf{Q} \quad 在\ \Omega\times(0,\ \infty)上 \tag{1.6}$$

其中正定矩阵

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ D_{12} & D_{22} & D_{26}\\ D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{12} & C_{22}\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

是弯曲刚度矩阵和剪切刚度矩阵

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16}\\ d_{12} & d_{22} & d_{26}\\ d_{16} & d_{26} & d_{66}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

是柔度系数矩阵，并有

$$\mathbf{D}\,\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{C}\,\mathbf{c}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{k}^T=(k_1,\ k_2,\ 2k_{12})=-(\varphi_{1,1},\ \varphi_{2,2},\ \varphi_{1,2}+\varphi_{2,1}) && 在\Omega\times[0,\ \infty)上\\ &\boldsymbol{\gamma}^T=(\gamma_1,\ \gamma_2)=(w_{,1}-\varphi_1,\ w_{,2}-\varphi_2) && 在\Omega\times[0,\infty)上\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

板的运动方程为

$$-M_{1,1}-M_{12,2}+Q_1+m_1-I\ddot{\varphi}_1=0 \quad 在\ \Omega\times(0,\ \infty)上 \tag{1.11a}$$

$$-M_{12,1}-M_{2,2}+Q_2+m_2-I\ddot{\varphi}_2=0 \quad 在\ \Omega\times(0,\ \infty)上 \tag{1.11b}$$

$$Q_{i,i}+p-B\ddot{w}=0 \quad 在\ \Omega\times(0,\ \infty)上 \tag{1.11c}$$

其中 m_i，p是作用在单位中面面积内的载荷在 x_ix_3 平面内的合力矩和在 x_3 轴的合力，m_i和p的正向分别与 φ_i和x_3 轴的正向一致；$I=\rho(\mathbf{x})h^3(\mathbf{x})/12$，$B=\rho(\mathbf{x})h(\mathbf{x})$（$\rho(\mathbf{x})$是板的质量密度）。

本文只考虑三种典型边界条件：

$$w=\bar{w},\quad \varphi_n=\bar{\varphi}_n,\quad \varphi_s=\bar{\varphi}_s \quad 在\ C_1\times[0,\ \infty)上 \tag{1.12a}$$

$$w=\bar{w},\quad \varphi_s=\bar{\varphi}_s \quad 在\ C_2\times[0,\ \infty)上 \tag{1.12b}$$

$$M_n=\bar{M}_n \quad 在\ C_2\times[0,\ \infty)上 \tag{1.12c}$$

$$M_n=\bar{M}_n,\quad M_{ns}=\bar{M}_{ns},\quad Q_n=\bar{Q}_n \quad 在\ C_3\times[0,\ \infty)上 \tag{1.12d}$$

其中 C_1，C_2，C_3 分别为固定边、简支边和自由边且 $C=C_1+C_2+C_3$。n，s 分别为边界的向外法线方向和切线方向（有时也用 s 代表边界曲线的弧长）。n，s的转向取得与 x_1，x_2 的转

向相同。此外有

$$\varphi_n=l\varphi_1+m\varphi_2,\quad \varphi_s=-m\varphi_1+l\varphi_2 \tag{1.13a}$$

$$Q_n=lQ_1+mQ_2,\quad M_n=l^2M_1+2lmM_{12}+m^2M_2 \tag{1.13b}$$

$$M_{ns}=lm(M_2-M_1)+[l^2-m^2)M_{12} \tag{1.13c}$$

(l, m为n的方向余弦)。初始条件为

$$w(\mathbf{x},\ 0)=w_0(\mathbf{x}),\ \varphi_i(\mathbf{x},\ 0)=\varphi_{i0}(\mathbf{x})\qquad \mathbf{x}\in\bar{\Omega} \tag{1.14a}$$

$$\dot{w}(\mathbf{x},\ 0)=\dot{w}_0(\mathbf{x}),\ \dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ 0)=\dot{\varphi}_{i0}(\mathbf{x})\qquad \mathbf{x}\in\bar{\Omega} \tag{1.14b}$$

本文未知函数有3个广义位移w，φ_i，5个广义力M_i，M_{12}，Q_i，它们由(1.5)或(1.6)，(1.10)，(1.11)，(1.12)和(1.14)完全确定，我们称之为问题(Ⅰ)。其中广义应变k_i，γ_i，k_{12}，$\mathbf{Y}$，$\mathbf{k}$等只表示一种缩写，此外文中假设1)：

(a) I，$B>0$且在$\bar{\Omega}$上连续可微。

(b) w_0，$\dot{w}_0$，φ_{i0}，$\dot{\varphi}_{i0}$在$\bar{\Omega}$上，$\bar{\varphi}_n$在$C_1\times[0,\ \infty)$上，$\bar{w}$，$\bar{\varphi}_s$在$(C_1+C_2)\times[0,\ \infty)$上均连续1)。

(c) p，$m_i\in C^{1,0}$，$\bar{M}_n$在$(C_2+C_3)\times[0,\ \infty)$上，$\bar{M}_{ns}$，$\bar{Q}_n$在$C_3\times[0,\ \infty)$上均连续。

(d) 文中被取Laplace变换的函数均在∞是有界的，因而它们存在非正的增长指数[4]。

二、关于(Ⅰ)的等价陈述

设A是含在$\bar{\Omega}$内的点集，并假设f和g是在$A\times[0,\ \infty)$上定义的函数。对每一个$\mathbf{x}\in A$，$f(\mathbf{x},\ \cdot)$，$g(\mathbf{x},\ \cdot)$在$[0,\ \infty)$上连续。所谓f和g的卷积我们指的是在$A\times[0,\ \infty)$上通过下式定义的函数$f*g$

$$[f*g](\mathbf{x},t)=\int_0^t f(\mathbf{x},\ t-\tau)g(\tau)d(\tau)\qquad (\mathbf{x},\ t)\in A\times[0,\ \infty)^{[3]} \tag{2.1}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &-t*(M_{1,1}+M_{12,2}-Q_1)-I\varphi_1+m_{t1}=0, && \text{在}\Omega\times[0,\ \infty)\text{上}\\ &-t*(M_{12,1}+M_{2,2}-Q_2)-I\varphi_2+m_{t2}=0, && \text{在}\Omega\times[0,\ \infty)\text{上}\\ &t*Q_{i,i}-Bw+p_t=0, && \text{在}\Omega\times[0,\ \infty)\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中

$$m_{ti}=t*m_i+I(\varphi_{i0}+t\dot{\varphi}_{i0}),\ p_t=t*p+B(w_0+t\dot{w}_0),\qquad \text{在}\Omega\times[0,\ \infty)\text{上} \tag{2.3}$$

由(1.5)或(1.6)，(1.10)，(2.2)和(1.12)所确定的问题叫作(Ⅱ)。

令

$$(T_{1,1},\ T_{2,2},\ T_{1,2}+T_{2,1})^T=\mathbf{d}\mathbf{M},\ (T_1+T_{,1},\ T_2+T_{,2})^T=\mathbf{c}\mathbf{Q},\ \text{在}\Omega\times[0,\ \infty)\text{上} \tag{2.4}$$

$$T=\bar{w},\ -T_n=\bar{\varphi}_n,\ -T_s=\bar{\varphi}_s,\qquad \text{在}C_1\times[0,\ \infty)\text{上} \tag{2.5a}$$

$$T=\bar{w},\ -T_s=\bar{\varphi}_s,\qquad \text{在}C_2\times[0,\ \infty)\text{上} \tag{2.5b}$$

$$M_n=\bar{M}_n\qquad \text{在}C_2\times[0,\ \infty)\text{上} \tag{2.5c}$$

$$M_n=\bar{M}_n,\ M_{ns}=\bar{M}_{ns},\ Q_n=\bar{Q}_n,\qquad \text{在}C_3\times[0,\ \infty)\text{上} \tag{2.5d}$$

其中

1) 对(4.19)式和定理5之(c)，还要求$\dot{\bar{\varphi}}_n$在$C_1\times[0,\ \infty)$上，$\dot{\bar{w}}$，$\dot{\bar{\varphi}}_s$在$(C_1+C_2)\times[0,\ \infty)$上连续。

$$T_i=I^{-1}(t*S_i-m_{ti}),\ T=B^{-1}(t*S-p_t),\qquad 在\Omega\times[0,\ \infty)上 \tag{2.6}$$

$$S_1=M_{1,1}+M_{12,2}-Q_1,\ S_2=M_{12,1}+M_{2,2}-Q_2,\ S=Q_{i,i},\qquad 在\Omega\times[0,\ \infty)上 \tag{2.7}$$

$$T_n=lT_1+mT_2,\ T_s=-mT_1+lT_2,\qquad 在C\times[0,\ \infty)上 \tag{2.8}$$

由(2.4)和(2.5)所确定的问题叫作(Ⅱ)。

定理1

(a) 设 $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}\in C^{1,0}$, $\mathbf{W}\in C^{1,2}$. 则$\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$ 满足(1.11)和(1.14)，当且仅当$\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$满足(2.2)。这里 $\mathbf{W}=(\varphi_1,\ \varphi_2,\ w)^T$。

(b) 设 $\mathbf{M}$; $\mathbf{Q}\in C^{2,0}$. 则 $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$ 满足(2.4)，(2.5)，当且仅当存在 $\mathbf{W}\in C^{1,2}$ 使得$\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$ 满足(1.6)；(2.2)，(1.10)和(1.12)。

证明

(a) 如果 $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$ 满足(1.11)和(1.14)，则由(2.3)和公式

$$t*\ddot{f}(\mathbf{x},\ t)=f(\mathbf{x},\ t)-f(\mathbf{x},\ 0)-t\dot{f}(\mathbf{x},\ 0) \tag{2.9}$$

易见，$\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$ 必满足(2.2)。反之，如果 $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$满足(2.2)，则用 $t=0$ 代入(2.2)以及(2.2)对t求导所得之方程，便得(1.14)。进而使用卷积的性质：

$$f_1*f_2=0\ 意味着\ f_1=0\ 或\ f_2=0^{[3]} \tag{2.10}$$

则从(1.14)，(2.2)，(2.3)和(2.9)便可得到(1.11)。

(b) 设 $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$ 满足(2.4)和(2.5)，则通过(1.6)定义 $\mathbf{k}$, $\mathbf{Y}$, 通过(2.2)定义 $\mathbf{W}$。易见 $\mathbf{W}\in C^{1,2}$，并从(2.4)，(2.2)和(1.6)便可得到(1.10)，进而从(2.2)，(2.5)～(2.8)和(1.13a)便知(1.12)成立。反之，设 $\mathbf{W}\in C^{1,2}$ 并且 $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{W}$ 满足(1.6)，(2.2)，(1.10)和(1.12)。则由(1.6)，(2.2)和(1.10)知(2.4)被满足，又由(2.2)，(1.13a)，(1.12)便可得(2.5)。证毕。

本文恒用 $f'(\mathbf{x},\ \alpha)$代表$f(\mathbf{x},\ t)$的 Laplace 变换：

$$f'(\mathbf{x},\ \alpha)=\int_0^{\infty}f(\mathbf{x},\ t)e^{-\alpha t}dt\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in A\times(0,\ \infty) \tag{2.11}$$

通过取(Ⅰ)和(Ⅱ)的 Laplace 变换可得(Ⅰ)′和(Ⅱ)′：

(Ⅰ)′的方程为

$$\mathbf{M}'=\mathbf{D}\mathbf{k}',\ \mathbf{Q}'=\mathbf{C}\mathbf{Y}'\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty) \tag{2.12}$$

或 $$\mathbf{k}'=\mathbf{d}\mathbf{M}',\ \mathbf{Y}'=\mathbf{c}\mathbf{Q}'\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty) \tag{2.13}$$

$$\mathbf{k}'^T=-(\varphi'_{1,1},\ \varphi'_{2,2},\ \varphi'_{1,2}+\varphi'_{2,1}),\ \mathbf{Y}'^T=(w'_{,1}-\varphi'_1,\ w'_{,2}-\varphi'_2)\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\infty) \tag{2.14}$$

$$-(M'_{1,1}+M'_{12,2}-Q'_1)-\alpha^2I\varphi'_1+m_{\alpha1}=0\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty) \tag{2.15a}$$

$$-(M'_{12,1}+M'_{2,2}-Q'_2)-\alpha^2I\varphi'_2+m_{\alpha2}=0\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty) \tag{2.15b}$$

$$Q_{i,i}-\alpha^2Bw+p_\alpha=0\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty) \tag{2.15c}$$

其中 $m_{\alpha i}$, p_α 由下两式规定：

$$m_{\alpha i}=m'_i+I(\alpha\varphi_{i0}+\dot{\varphi}_{i0}),\ p_\alpha=p'+B(\alpha w_0+\dot{w}_0)\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty) \tag{2.16}$$

$$w'=\bar{w}',\ \varphi'_n=\bar{\varphi}'_n,\ \varphi'_s=\bar{\varphi}'_s\qquad(s,\ \alpha)\in C_1\times(0,\ \infty) \tag{2.17a}$$

$$w'=\bar{w}',\ \varphi'_s=\bar{\varphi}'_s\qquad(s,\ \alpha)\in C_2\times(0,\ \infty) \tag{2.17b}$$

$$M'_n=\bar{M}'_n\qquad(s,\ \alpha)\in C_2\times(0,\ \infty) \tag{2.17c}$$

$$M'_n=\bar{M}'_n,\ M'_{ns}=\bar{M}'_{ns},\ Q'_n=\bar{Q}'_n\qquad(s,\ \alpha)\in C_3\times(0,\ \infty) \tag{2.17d}$$

(Ⅱ)′的方程为

$$\left.\begin{aligned}&(T_{\alpha 1,1},\ T_{\alpha 2,2},\ T_{\alpha 1,2}+T_{\alpha 2,1})^T=\alpha^2\mathbf{dM}' && (\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty)\\&(T_{\alpha 1}+T_{\alpha,1},\ T_{\alpha 2}+T_{\alpha,2})^T=\alpha^2\mathbf{cQ}' && (\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty)\end{aligned}\right\}\qquad(2.18)$$

其中

$$T_{\alpha i}=I^{-1}(S_i'-m_{\alpha i}),\ T_\alpha=B^{-1}(S'+p_\alpha)\qquad(\mathbf{x},\alpha)\in\Omega\times(0,\infty)\qquad(2.19)$$

$$S_1'=M_{1,1}'+M_{12,2}'-Q_1',\ S_2'=M_{12,1}'+M_{2,2}'-Q_2'\qquad(\mathbf{x},\alpha)\in\Omega\times(0,\infty)\qquad(2.20)$$

$$S'=Q_{i,i}'\qquad(\mathbf{x},\ \alpha)\in\Omega\times(0,\ \infty)\qquad(2.21)$$

$$T_\alpha=\alpha^2\bar{w}',\ -T_{\alpha n}=\alpha^2\bar{\varphi}_n',\ -T_{\alpha s}=\alpha^2\bar{\varphi}_s'\qquad(s,\ \alpha)\in C_1\times(0,\ \infty)\qquad(2.22a)$$

$$T_\alpha=\alpha^2\bar{w}',\ -T_{\alpha s}=\alpha^2\bar{\varphi}_s'\qquad(s,\ \alpha)\in C_2\times(0,\ \infty)\qquad(2.22b)$$

$$M_n'=\bar{M}_n'\qquad(s,\ \alpha)\in C_2\times(0,\ \infty)\qquad(2.22c)$$

$$M_n'=\bar{M}_n',\ M_{ns}'=\bar{M}_{ns}',\ Q_n'=\bar{Q}_n'\qquad(s,\ \alpha)\in C_3\times(0,\ \infty)\qquad(2.22d)$$

其中

$$T_{\alpha n}=lT_{\alpha 1}+mT_{\alpha 2},\ T_{\alpha s}=-mT_{\alpha 1}+lT_{\alpha 2}\qquad(s,\ \alpha)\in C\times(0,\ \infty)\qquad(2.23)$$

除了$-\alpha^2I\varphi_i'$，$-\alpha^2Bw'$之外，方程(2.12)～(2.17)形式上同板的静力学的边值问题一致[2]，但$-\alpha^2I\varphi_i'$，$-\alpha^2Bw'$可被理解为弹性地基上的反作用力矩和力。因此，利用[2]中提供的方法所有转换能量原理均可被建立。但是静力学中却没有与（Ⅱ）′对应的问题。

为了方便我们引进下列记号和定义。

(a) $\mathbf{W}\in H$当且仅当 (1) $\mathbf{W}\in C^{1,2}$；(2) $\mathbf{W}$ 满足 (1.12a, b)；(3) $\mathbf{W}$，$\mathbf{W}_{,i}$，$\dot{\mathbf{W}}$，$\ddot{\mathbf{W}}$ 在∞有界。$\mathbf{W}'=(\varphi_1',\ \varphi_2',\ w')^T\in H'$ 当且仅当 $\mathbf{W}\in H$。

(b) $F=(\mathbf{M},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{W})\in L$当且仅当(1) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}\in C^{1,0}$；(2) $\mathbf{W}\in C^{1,2}$；(3) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{W}$满足(2.2)，(1.12c, d)；(4) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{W}$，$\mathbf{M}_{,i}$，$\mathbf{Q}_{,i}$，$\mathbf{W}_{,i}$，$\dot{\mathbf{W}}$，$\ddot{\mathbf{W}}$ 在∞是有界的。$F'=(\mathbf{M}',\ \mathbf{Q}',\ \mathbf{W}')\in L'$ 当且仅当 $F\in L$。F是(Ⅱ)的一个解是指：(1) $F\in L$；(2) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{W}$ 满足(1.5)或(1.6)、(2.2)、(1.10)、(1.12c, d)。当F是(Ⅱ)的一个解时，(1) F也叫作(Ⅰ)的一个解；(2) F'叫作(Ⅱ)′的一个解；(3) $\mathbf{W}$和$\mathbf{W}'$分别叫作(Ⅱ)和(Ⅱ)′的位移解。

(c) $S_T=(\mathbf{M},\ \mathbf{Q})\in R$ 当且仅当 (1) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}\in C^{2,0}$；(2) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}$ 满足 (2.5c, d)；(3) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{M}_{,i}$，$\mathbf{Q}_{,i}$，$\mathbf{M}_{,i1}$，$\mathbf{M}_{,i2}$，$\mathbf{Q}_{,i1}$，$\mathbf{Q}_{,i2}$ 在∞是有界的。$S_T'=(\mathbf{M}',\mathbf{Q}')\in R'$ 当且仅当 $S_T\in R$。S_T是(Ⅲ)的一个解是指(1) $S_T\in R$；(2) $\mathbf{M}$，$\mathbf{Q}$ 满足(2.4)、(2.5a, b)。当S_T是(Ⅲ)的一个解时，S_T'叫作(Ⅲ)′的一个解。

三、关于(Ⅱ)′和(Ⅲ)′的最小转换能量原理

设定义在$\bar{\Omega}\times[0,\ \infty)$上的函数$\psi_i$，$v$ 的 Laplace 变换分别为 ψ_i'，v'。(2.15a, b, c) 分别用 ψ_1'，ψ_2'，v'去乘再加起来在Ω上积分，注意到

$$M_n'\psi_n'+M_{ns}'\psi_s'=lM_1'\psi_1'+M_{12}'(m\psi_1'+l\psi_2')+mM_2'\psi_2'\qquad 在C\times(0,\ \infty)上\qquad(3.1)$$

最后我们可得到

$$-\int_\Omega[M_1'\psi_{1,1}'+M_{12}'(\psi_{1,2}'+\psi_{2,1}')+M_2'\psi_{2,2}'-Q_i'(v_{,i}'-\psi_i')]d\Omega$$

$$=\int_\Omega[(m_{\alpha i}-\alpha^2I\varphi_i')\psi_i'+(p_\alpha-\alpha^2Bw')v']d\Omega+\int_C(Q_n'v'-M_n'\psi_n'-M_{ns}'\psi_s')ds\qquad(3.2)$$

这里要求 $\mathbf{M}'$，$\mathbf{Q}'$，$\mathbf{W}'$ 满足 (2.15)，$\psi_{i,1}'$，$\psi_{i,2}'$，$v_{,i}'$在$\bar{\Omega}\times[0,\ \infty)$上存在。

(3.2) 是关于 $(\mathrm{I})'$ 的虚功原理。它将在建立关于 $(\mathrm{I})'$ 的各种变分原理中起着重要的作用。

定理 2

(a) 设 $\mathbf{W}'$ 是 $(\mathrm{I})'$ 的一个位移解。则定义在 H' 上的泛函

$$\Pi_a=\int_\Omega\left[U_{a1}+U_{a2}+\frac{a^2}{2}(I\varphi'_i\varphi'_i+Bw'^2)-m_{ai}\varphi'_i-p_a w'\right]d\Omega$$

$$+\int_{C_2+C_3}\overline{M}'_n\varphi'_n ds+\int_{C_3}(\overline{M}'_{ns}\varphi'_s-\bar{Q}'_n w')ds \qquad (a>0) \tag{3.3}$$

在 $\mathbf{W}'$ 处取最小值。

(b) 设 F' 是 $(\mathrm{I})'$ 的一个解。则定义在 L' 上的泛函

$$\Gamma_a=\int_\Omega\left[V_{a1}+V_{a2}+\frac{a^2}{2}(I\varphi'_i\varphi'_i+Bw'^2)\right]d\Omega+\int_{C_1+C_2}(\bar{\varphi}'_s M'_{ns}-\bar{w}'Q'_n)ds$$

$$+\int_{C_1}\bar{\varphi}'_n M'_n ds \qquad (a>0) \tag{3.4}$$

在 F' 处达到最小值。

其中

$$U_{a1}=\frac{1}{2}\mathbf{k}'^T\mathbf{D}\mathbf{k}',\quad U_{a2}=\frac{1}{2}\mathbf{\gamma}'^T\mathbf{C}\mathbf{\gamma}' \tag{3.5}$$

$$V_{a1}=\frac{1}{2}\mathbf{M}'^T\mathbf{d}\mathbf{M}',\quad V_{a2}=\frac{1}{2}\mathbf{Q}'^T\mathbf{c}\mathbf{Q}' \tag{3.6}$$

证明

(a) 设 $F'=(\mathbf{M}',\ \mathbf{Q}',\ \mathbf{W}')$ 是 $(\mathrm{I})'$ 的一个解，对任意 $\mathbf{W}'_c\in H'$，令

$$\Delta\mathbf{W}'=\mathbf{W}'_c-\mathbf{W}'=(\varphi'_{c1}-\varphi'_1,\ \varphi'_{c2}-\varphi'_2,\ w'_c-w')^T=(\Delta\varphi'_1,\ \Delta\varphi'_2,\ \Delta w')^T \tag{3.7}$$

则

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta w'=0,\ \Delta\varphi'_n=0,\ \Delta\varphi'_s=0 & \text{在 } C_1\times(0,\ \infty)\text{上}\\ \Delta w'=0,\ \Delta\varphi'_s=0 & \text{在 } C_2\times(0,\ \infty)\text{上}\end{array}\right\} \tag{3.8}$$

并且，由(3.5)、(2.12)、(2.14)我们得

$$\Pi_a(\mathbf{W}'_c)=\Pi_a(\mathbf{W}')+2\Pi''_a(\mathbf{W}',\ \Delta\mathbf{W}')+\Pi^2_a(\Delta\mathbf{W}') \tag{3.9}$$

其中

$$2\Pi''_a(\mathbf{W}',\ \Delta\mathbf{W}')=-\int_\Omega[M'_1\Delta\varphi'_{1,1}+M'_{12}(\Delta\varphi'_{1,2}+\Delta\varphi'_{2,1})+M'_2\Delta\varphi'_{2,2}$$

$$-Q'_i\Delta(w'_{,i}-\varphi'_i)]d\Omega+\int_\Omega[a^2(I\varphi'_i\Delta\varphi'_i+Bw'\Delta w')$$

$$-m_{ai}\Delta\varphi'_i-p_a\Delta w']d\Omega+\int_{C_2+C_3}M'_n\Delta\varphi'_n ds$$

$$+\int_{C_3}(\overline{M}'_{ns}\Delta\varphi'_s-\bar{Q}'_n\Delta w')ds \tag{3.10}$$

$$\Pi^2_a(\Delta\mathbf{W}')=\int_\Omega[U_{a1}(\Delta\mathbf{W}')+U_{a2}(\Delta\mathbf{W}')+\frac{a^2}{2}(I\Delta\varphi'_i\Delta\varphi'_i+B\Delta\mathbf{W}'^2)]d\Omega \tag{3.11}$$

由(3.2)、(3.8)并注意到F'是(Ⅱ)$'$的一个解，容易验证(3.10)的右端为零。又由(3.11)是一个关于$\Delta\mathbf{W}'$的正定泛函，故有

$$\Pi_a(\mathbf{W}'_c)\geqslant\Pi_a(\mathbf{W}') \tag{3.12}$$

且当且仅当$\mathbf{W}'_c=\mathbf{W}'$时等号成立。

(b) 设F'是(Ⅱ)$'$的一个解。对任意$F'_c\in L'$令

$$\Delta F'=F'_c-F'=(\mathbf{M}'_c-\mathbf{M}',\ \mathbf{Q}'_c-\mathbf{Q}',\ \mathbf{W}'_c-\mathbf{W}')=(\Delta\mathbf{M}',\ \Delta\mathbf{Q}',\ \Delta\mathbf{W}') \tag{3.13}$$

则

$$\left.\begin{aligned}&-(\Delta M'_{1,1}+\Delta M'_{12,2}-\Delta Q'_1)-a^2I\Delta\varphi'_1=0\\&-(\Delta M'_{12,1}+\Delta M'_{2,2}-\Delta Q'_2)-a^2I\Delta\varphi'_2=0\\&\Delta Q'_{i,i}-a^2B\Delta w'=0\end{aligned}\right\}\quad 在\Omega\times(0,\ \infty)上 \tag{3.14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta M'_n=0\qquad 在C_2\times(0,\ \infty)上\\&\Delta M'_n=0,\ \Delta M'_{ns}=0,\ \Delta Q'_n=0\qquad 在C_3\times(0,\ \infty)上\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

并且，由(3.6)、(2.13)、(2.14)我们有

$$\Gamma_a(F'_c)=\Gamma_a(F')+2\Gamma''_a(F',\ \Delta F')+\Gamma^2_a(\Delta F') \tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned}2\Gamma''_a(F',\Delta F')=&-\int_\Omega[\Delta M'_1\varphi'_{1,1}+\Delta M'_{12}(\varphi'_{1,2}+\varphi'_{2,1})+\Delta M'_2\varphi'_{2,2}-\Delta Q'_i(w'_{,i}-\varphi'_i)]d\Omega\\&+a^2\int_\Omega(I\Delta\varphi'_i\varphi'_i+B\Delta w'w')d\Omega+\int_{C_1+C_2}(\Delta M'_{ns}\bar{\varphi}'_s-\Delta Q'_n\bar{w}')ds\\&+\int_{C_1}\Delta M'_n\bar{\varphi}'_n ds\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\Gamma^2_a(\Delta F')=\int_\Omega[V_{a1}(\Delta\mathbf{M}')+V_{a2}(\Delta\mathbf{Q}')+\frac{a^2}{2}(I\Delta\varphi'_i\Delta\varphi'_i+B\Delta w'^2)]d\Omega \tag{3.18}$$

由(3.2)、(3.14)、(3.15)并注意到F'是(Ⅱ)$'$的一个解，容易验证(3.17)的右端为零，又因$\Gamma^2_a(\Delta F')$是$\Delta F'$的正定泛函，故有

$$\Gamma_a(F'_c)\geqslant\Gamma_a(F') \tag{3.19}$$

这里当且仅当$\Delta F'\equiv0$即$F'_c=F'$时等号成立，定理证完。

由(3.2)可验证，对于(Ⅱ)$'$的一个解F'有

$$\Pi_a(\mathbf{W}')+\Gamma_a(F')=0\qquad(a>0) \tag{3.20}$$

定理 3 设S'_T是(Ⅲ)$'$的一个解。则定义在R'上的泛函

$$\begin{aligned}\Gamma_{aT}(S'_T)=&\int_\Omega\left[a^2(V_{a1}+V_{a2})+I^{-1}\left(\frac{1}{2}S'_i-m_{ai}\right)S'_i+B^{-1}\left(\frac{1}{2}S'+p_a\right)S'\right]d\Omega\\&+a^2\int_{C_1+C_2}(\bar{\varphi}'_sM'_{ns}-\bar{w}'Q'_n)ds+a^2\int_{C_1}\bar{\varphi}'_nM'_nds\qquad(a>0)\end{aligned} \tag{3.21}$$

在S'_T处取最小值。

证明 当$S'_T+\delta S'_T\in R'$时，我们有

$$\delta\Gamma_{aT}(S'_T)=\int_\Omega\left[a^2\left(\frac{\partial V_{a1}}{\partial M'_i}\delta M'_i+\frac{\partial V_{a1}}{\partial M'_{12}}\delta M'_{12}+\frac{\partial V_{a2}}{\partial Q'_i}\delta Q'_i\right)+I^{-1}(S'_i-m_{ai})\delta S'_i\right.$$

$$+B^{-1}(S'+p_a)\delta S'\Big]d\Omega+\alpha^2\int_{C_1+C_2}(\bar{\varphi}'_s\delta M'_{ns}-\bar{w}'\delta Q'_n)ds$$

$$+\int_{C_1}\alpha^2\bar{\varphi}'_n\delta M'_n ds \tag{3.22}$$

其中

$$\delta S'_1=\delta M'_{1,1}+\delta M'_{12,2}-\delta Q'_1,\ \delta S'_2=\delta M'_{12,1}+\delta M'_{2,2}-\delta Q'_2,\ \delta S'=\delta Q'_{i,i} \tag{3.23}$$

将(3.23)代入(3.22)，经分部积分并使用(2.19)，可得

$$\delta\Gamma_{aT}(S'_T)=\int_\Omega\Big[\Big(\alpha^2\frac{\partial V_{a1}}{\partial M'_1}-T_{a1,1}\Big)\delta M'_1+\Big(\alpha^2\frac{\partial V_{a1}}{\partial M'_2}-T_{a2,2}\Big)\delta M'_2$$

$$+\Big(\alpha^2\frac{\partial V_{a1}}{\partial M'_{12}}-T_{a1,2}-T_{a2,1}\Big)\delta M'_{12}+\Big(\alpha^2\frac{\partial V_{a1}}{\partial Q'_i}-T_{ai}-T_{a,i}\Big)\delta Q'_i\Big]d\Omega$$

$$+\int_C[lT_{a1}\delta M'_1+(mT_{a1}+lT_{a2})\delta M'_{12}+mT_{a2}\delta M'_2+lT_a\delta Q'_1+mT_a\delta Q'_2]ds$$

$$+\alpha^2\int_{C_1+C_2}(\bar{\varphi}'_s\delta M'_s-\bar{w}'\delta Q'_n)ds+\alpha^2\int_{C_1}\bar{\varphi}'_n\delta M'_n ds \tag{3.24}$$

由(1.13)、(2.23)、(3.1)并注意到$\delta S'_T$满足与(2.22c, d) 相对应的齐次边界条件，(3.24)的三个线积分成为

$$\int_{C_1+C_2}[(T_{as}+\alpha^2\bar{\varphi}'_s)\delta M'_{ns}+(T_a-\alpha^2\bar{w}')\delta Q'_n]ds+\int_{C_1}(T_{an}+\alpha^2\bar{\varphi}'_n)\delta M'_n ds \tag{3.25}$$

(3.24)，(3.25)意味着S'_T是(Ⅲ)′的一个解当且仅当

$$\delta\Gamma_{aT}(S'_T)=0 \tag{3.26}$$

再注意到

$$\delta^2\Gamma_{aT}(S'_T)>0 \tag{3.27}$$

便得Γ_{aT}在S'_T处取最小值。定理证毕。

由(3.2)，定理2和定理3及Lagrangian乘数法可得关于(Ⅱ)′和(Ⅲ)′的互等定理和各种广义变分原理。

四、关于(Ⅱ)和(Ⅲ)的最小值原理

$\alpha^{-2}\Pi_a$，$\alpha^{-2}\Gamma_a$，$\alpha^{-2}\Gamma_{aT}$的Laplace逆变换为

$$\Pi_t=\int_\Omega\Big[t*(U_{t1}+U_{t2})+\frac{1}{2}(I\varphi_i*\varphi_i+Bw*w)-m_{ti}*\varphi_i-p_t*w\Big]d\Omega$$

$$+t*\int_{C_2+C_3}\bar{M}_n*\varphi_n ds+t*\int_{C_3}(\bar{M}_{ns}*\varphi_s-\bar{Q}_n*w)ds \qquad (\mathbf{W}\in H,\ t\geqslant 0) \tag{4.1}$$

$$\Gamma_t=\int_\Omega\Big[t*(V_{t1}+V_{t2})+\frac{1}{2}(I\varphi_i*\varphi_i+Bw*w)\Big]d\Omega$$

$$+t*\int_{C_1+C_2}(\bar{\varphi}_s*M_{ns}-\bar{w}*Q_n)ds+t*\int_{C_1}\bar{\varphi}_n*M_n ds \qquad (F\in L,\ t\geqslant 0) \tag{4.2}$$

$$\Gamma_{tT}=\int_\Omega\Big[V_{t1}+V_{t2}+I^{-1}\Big(\frac{t}{2}*S_i-m_{ti}\Big)*S_i+B^{-1}\Big(\frac{t}{2}*S+p_t\Big)*S\Big]d\Omega$$

$$+\int_{C_1+C_2}(\bar{\varphi}_s*M_{ns}-\bar{w}*Q_n)ds+\int_{C_1}\bar{\varphi}_n*M_n ds \qquad (S_T\in R,\ t\geqslant 0) \tag{4.3}$$

其中

$$U_{t_1}=\frac{1}{2}\mathbf{k}^T*(\mathbf{Dk}),\ U_{t_2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^T*(\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}) \tag{4.4}$$

$$V_{t_1}=\frac{1}{2}\mathbf{M}^T*(\mathbf{dM}),\ V_{t_2}=\frac{1}{2}\mathbf{Q}^T*(\mathbf{cQ}) \tag{4.5}$$

$$T_n=lT_1+mT_2,\ T_s=-mT_1+lT_2 \tag{4.6}$$

应用定理 2 和定理 3 或直接算 $\delta\Pi_t$, $\delta\Gamma_t$, $\delta\Gamma_{tT}$, 可以得到

定理 4

(a) $\mathbf{W}$是(Ⅰ)的一个位移解当且仅当

$$\Pi_t(\mathbf{W})=\underset{\mathbf{W}_c\in H}{\mathrm{st}}\ \Pi_t(\mathbf{W}_c) \qquad (t\geqslant 0) \tag{4.7}$$

(b) F是(Ⅰ)的一个解当且仅当

$$\Gamma_t(F)=\underset{F_c\in L}{\mathrm{st}}\ \Gamma_t(F_c) \qquad (t\geqslant 0) \tag{4.8}$$

(c) S_T是(Ⅱ)的一个解当且仅当

$$\Gamma_{tT}(S_T)=\underset{S_{Tc}\in R}{\mathrm{st}}\ \Gamma_{tT}(S_{Tc}) \qquad (t\geqslant 0) \tag{4.9}$$

这个定理仅提供了泛函的驻立值原理。使用[5]中的方法[1)]，可以得到关于(Ⅰ)和(Ⅱ)的最小值原理。为此，我们引进一个相容的权函数集合E. $g(t)\in E$是指(a)对每一个$t\in[0,\ \infty)$, $g(t)$存在并且 $g(t)$ 是某一非负的且在其定义域内至多只有有限个零值的连续函数 $G(\alpha)$ ($\alpha\in[0,\ \infty)$) 的 Laplace 变换,

$$g(t)=\int_0^\infty G(\alpha)e^{-\alpha t}d\alpha \tag{4.10}$$

(b) 下列广义积分存在:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)dtd\tau,\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \dot{g}(t+\tau)dtd\tau,\int_0^\infty\int_0^\infty \ddot{g}(t+\tau)dtd\tau \tag{4.11}$$

这样引进的 $g(t)$和$G(\alpha)$使得本文出现的广义积分均存在并可任意重排积分的次序[4,5]。

首先，通过 Laplace 变换的性质[4]，我们可以得到下列典型的公式:

(a) $$\int_0^\infty G(\alpha)w'(\bullet,\ \alpha)d\alpha=\int_0^\infty g(t)w(\bullet,\ t)dt \tag{4.12}$$

(b) $$\int_0^\infty G(\alpha)\mathbf{k}'^T(\bullet,\ \alpha)\mathbf{D}\mathbf{k}'(\bullet,\ \alpha)d\alpha=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\mathbf{k}^T(\bullet,\ t)\mathbf{D}\mathbf{k}(\bullet,\ \tau)dtd\tau \tag{4.13}$$

(c) $$\int_0^\infty G(\alpha)\alpha w'(\bullet,\ \alpha)d\alpha=\int_0^\infty g(t)\dot{w}(\bullet,\ t)dt+g(0)w(\bullet,\ 0) \tag{4.14}$$

(d) $$\int_0^\infty G(\alpha)\alpha^2\varphi_1'(\bullet,\ \alpha)\varphi_2'(\bullet,\ \alpha)d\alpha=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\dot{\varphi}_1(\bullet,\ t)\dot{\varphi}_2(\bullet,\ \tau)dtd\tau$$

1) 顺便指出，文献[5]中(4.1)式的最后一项的系数1/2是不应该有的.

$$+\int_0^{\infty} g(t)[\dot{\varphi}_1(\bullet,\ t)\varphi_2(\bullet,\ 0)+\dot{\varphi}_2(\bullet,\ t)\varphi_1(\bullet,\ 0)]dt+g(0)\varphi_1(\bullet,\ 0)\varphi_2(\bullet,\ 0) \tag{4.15}$$

(e) $$\int_0^{\infty} G(\alpha)\alpha^2\mathbf{M}'^T(\bullet,\ \alpha)\mathbf{dM}'(\bullet,\ \alpha)d\alpha=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t+\tau)\dot{\mathbf{M}}^T(\bullet,\ t)\mathbf{d}\dot{\mathbf{M}}(\bullet,\ \tau)dtd\tau$$

$$+2\int_0^{\infty} g(t)\dot{\mathbf{M}}^T(\bullet,\ t)\mathbf{dM}(\bullet,\ 0)dt+g(0)\mathbf{M}^T(\bullet,\ 0)\mathbf{dM}(\bullet,\ 0) \tag{4.16}$$

然后，使用(3.3)～(3.6)，(3.21)和(4.12)～(4.16)，对任意已知的$g\in E$，我们有

$$\int_0^{\infty} G(\alpha)\Pi_\alpha d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t+\tau)\int_\Omega [\mathbf{k}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{Dk}(\mathbf{x},\ \tau)+\boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{c}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},\ \tau)$$
$$+I\dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ t)\dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ \tau)+B\dot{w}(\mathbf{x},\ t)\dot{w}(\mathbf{x},\ \tau)-2m_i(\mathbf{x},\ t)\varphi_i(\mathbf{x},\ \tau)$$
$$-2p(\mathbf{x},\ t)w(\mathbf{x},\ \tau)]d\Omega dtd\tau+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t+\tau)$$
$$\cdot\left\{\int_{C_2+C_3}\overline{M}_n(s,\ t)\varphi_n(s,\ \tau)ds+\int_{C_3}[\overline{M}_{ns}(s,\ t)\varphi_s(s,\ \tau)\right.$$
$$\left.-\bar{Q}_n(s,\ t)w(s,\ \tau)]ds\right\}dtd\tau+\int_0^{\infty} g(t)\int_\Omega \{I\dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ t)[\varphi_i(\mathbf{x},\ 0)$$
$$-\varphi_{i0}(\mathbf{x})]+B\dot{w}(\mathbf{x},\ t)[w(\mathbf{x},\ 0)-w_0(\mathbf{x})]-I\varphi_i(\mathbf{x},\ t)\dot{\varphi}_{i0}(\mathbf{x})$$
$$-Bw(\mathbf{x},\ t)\dot{w}_0(\mathbf{x})\}d\Omega dtd\tau$$
$$+g(0)\int_\Omega\left\{I\varphi_i(\mathbf{x},\ 0)\left[\frac{1}{2}\varphi_i(\mathbf{x},\ 0)-\varphi_i(\mathbf{x})\right]+Bw(\mathbf{x},\ 0)\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{1}{2}w(\mathbf{x},\ 0)-w_0(\mathbf{x})\right]\right\}d\Omega$$
$$\equiv\Phi[\mathbf{W};\ g]\qquad \mathbf{W}\in L \tag{4.17}$$

$$\int_0^{\infty} G(\alpha)\Gamma_\alpha d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t+\tau)\int_\Omega [\mathbf{M}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{dM}(\mathbf{x},\ \tau)+\mathbf{Q}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{cQ}(\mathbf{x},\ \tau)$$
$$+I\dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ t)\dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ \tau)+B\dot{w}(\mathbf{x},\ t)\dot{w}(\mathbf{x},\ \tau)]d\Omega dtd\tau$$
$$+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t+\tau)\left\{\int_{C_1+C_2}[\bar{\varphi}_s(s,\ t)M_{ns}(s,\ \tau)-\bar{w}(s,\ t)Q_n(s,\ \tau)]ds\right.$$
$$\left.+\int_{C_1}\bar{\varphi}_n(s,\ t)M_n(s,\ \tau)ds\right\}dtd\tau$$
$$+\int_0^{\infty} g(t)\int_\Omega [I\dot{\varphi}_i(\mathbf{x},\ t)\varphi_i(\mathbf{x},\ 0)+B\dot{w}(\mathbf{x},\ t)w(\mathbf{x},\ 0)]d\Omega dt$$
$$+\frac{1}{2}g(0)\int_\Omega [I\varphi_i(\mathbf{x},\ 0)\varphi_i(\mathbf{x},\ 0)+Bw(\mathbf{x},\ 0)w(\mathbf{x},\ 0)]d\Omega$$
$$\equiv\Theta[F;\ g]\qquad F\in L \tag{4.18}$$

$$\int_0^{\infty} G(\alpha)\Gamma_{\alpha T}d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(t+\tau)\int_\Omega \{\dot{\mathbf{M}}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{d}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x},\ \tau)+\dot{\mathbf{Q}}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{c}\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{x},\ \tau)$$
$$+I^{-1}[S_i(\mathbf{x},\ t)-2m_i(\mathbf{x},\ t)]S_i(\mathbf{x},\ \tau)+B^{-1}[S(\mathbf{x},\ t)$$

$$+2p(\mathbf{x},\ t)]S(\mathbf{x},\ \tau)\}d\Omega dtd\tau$$

$$+\int_0^\infty g(t)\int_\Omega [\dot{\mathbf{M}}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{d}\mathbf{M}(\mathbf{x},\ 0)+\dot{\mathbf{Q}}^T(\mathbf{x},\ t)\mathbf{c}\mathbf{Q}(\mathbf{x},\ 0)$$

$$-\varphi_{i0}(\mathbf{x})\dot{S}_i(\mathbf{x},\ t)-\dot{\varphi}_{i0}(\mathbf{x})S_i(\mathbf{x},\ t)+w_0(\mathbf{x})\dot{S}(\mathbf{x},\ t)$$

$$+\dot{w}_0(\mathbf{x})S(\mathbf{x},\ t)]d\Omega dt+\frac{1}{2}g(0)\int_\Omega [\mathbf{M}^T(\mathbf{x},\ 0)\mathbf{d}\mathbf{M}(\mathbf{x},\ 0)$$

$$-2\varphi_{i0}(\mathbf{x})S_i(\mathbf{x},\ 0)+2w_0(\mathbf{x})S(\mathbf{x},\ 0)]d\Omega$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\Big\{\int_{C_1+C_2}[\dot{\bar{\varphi}}_s(s,\ t)\dot{M}_{ns}(s,\ \tau)$$

$$-\dot{\bar{w}}(s,\ t)\dot{Q}_n(s,\ \tau)]ds+\int_{C_1}\dot{\bar{\varphi}}_n(s,\ t)\dot{M}_n(s,\ \tau)ds\Big\}dtd\tau$$

$$+\int_0^\infty g(t)\Big\{\int_{C_1+C_2}[\dot{\bar{\varphi}}_s(s,\ t)M_{ns}(s,\ 0)+\bar{\varphi}_s(s,\ 0)\dot{M}_{ns}(s,\ 0)$$

$$-\dot{\bar{w}}(s,\ t)Q_n(s,\ 0)-\bar{w}(s,\ 0)\dot{Q}_n(s,\ t)]ds$$

$$+\int_{C_1}[\dot{\bar{\varphi}}_n(s,\ t)M_n(s,\ 0)+\bar{\varphi}_n(s,\ 0)\dot{M}_n(s,\ t)]ds\Big\}dt$$

$$+g(0)\Big\{\int_{C_1+C_2}[\bar{\varphi}_s(s,\ 0)M_{ns}(s,\ 0)-\bar{w}(s,\ 0)Q_n(s,\ 0)]ds$$

$$+\int_{C_1}\bar{\varphi}_n(s,\ 0)M_n(s,\ 0)ds\Big\}$$

$$\equiv\Theta_T[S_T;\ g]\qquad S_T\in R\cap C^{2,1}\tag{4.19}$$

定理 5

(a) 设 $\mathbf{W}$ 是(Ⅰ)的一个位移解。则对任意给定的$g\in E$，不等式

$$\Phi[\mathbf{W}_c;\ g]\geqslant\Phi[\mathbf{W};\ g]\tag{4.20}$$

对所有的 $\mathbf{W}_c\in H$ 保持，这里等号当且仅当 $\mathbf{W}_c=\mathbf{W}$ 时成立。

(b) 设F是(Ⅰ)的一个解。则对任意给定的 $g\in E$，不等式

$$\Theta[F_c;\ g]\geqslant\Theta[F;\ g]\tag{4.21}$$

对所有的 $F_c\in L$ 保持，这里等号当且仅当 $F_c=F$ 时成立。

(c) 设 S_T 是(Ⅱ)的一个解且 $S_T\in C^{2,1}$。则对任意给定的 $g\in E$，不等式

$$\Theta_T[S_{Tc};\ g]\geqslant\Theta[S_T;\ g]\tag{4.22}$$

对所有的 $S_{Tc}\in R\cap C^{2,1}$ 保持，这里等号当且仅当 $S_{Tc}=S_T$ 时成立。

证明

(a) 设 $\Delta\mathbf{W}=\mathbf{W}_c-\mathbf{W}$，注意到 $\mathbf{W}'_c\in H'$，$\mathbf{W}'$ 是(Ⅰ)$'$的一个位移解。则通过(4.17)和定理 2 之(a)以及$G(\alpha)$的定义，我们有

$$\Delta\Phi=\Phi[\mathbf{W}_c;\ g]-\Phi[W;\ g]=\int_0^\infty G(\alpha)[\Pi_\alpha(\mathbf{W}'_c)-\Pi_\alpha(\mathbf{W}')]d\alpha$$

$$=\int_0^\infty G(\alpha)\Pi_\alpha^2(\Delta\mathbf{W}')d\alpha\geqslant 0\qquad W_c\in H\tag{4.23}$$

这里等号保持当且当 $\Delta\mathbf{W}'\equiv 0$ 即 $\mathbf{W}_c=\mathbf{W}$[4,5]。

(b) 设 $\Delta F=F_o-F$，注意到 $F'_c\in L'$，F'是(Ⅱ)′的一个解。则通过(4.18)和定理2之(b)以及$G(\alpha)$的定义，我们有

$$\Delta\Theta=\Theta[F_o;\ g]-\Theta[F;\ g]=\int_0^\infty G(\alpha)[\Gamma_\alpha(F'_c)-\Gamma_\alpha(F')]d\alpha$$

$$=\int_0^\infty G(\alpha)\Gamma_\alpha^2(\Delta F')d\alpha\geqslant 0\qquad F_o\in L \tag{4.24}$$

这里等号保持当且仅当 $\Delta F'\equiv 0$ 即 $F_o=F$。

(c) 设$\Delta S_T=S_{To}-S_T$，注意到$S'_{To}\in R'$，S'_T是(Ⅱ)′的一个解。则通过(4.19)和定理3以及$G(\alpha)$的定义我们有

$$\Delta\Theta_T=\Theta_T[S_{To};\ g]-\Theta_T[S_T;\ g]=\int_0^\infty G(\alpha)[\Gamma_{\alpha T}(S'_{To})-\Gamma_{\alpha T}(S'_T)]d\alpha$$

$$=\int_0^\infty G(\alpha)\Gamma_{\alpha T}^2(\Delta S'_T)d\alpha\geqslant 0\qquad S_{To}\in R\cap C^{2,1} \tag{4.25}$$

这里等号保持当且仅当 $\Delta S'_T\equiv 0$ 即$S_{To}=S_T$。定理证毕。

参 考 文 献

[1] Mindlin, K. D., Influence of rotatory and shear on flexural motion of isotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 18, 1 (1951), 35.

[2] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社 (1981)，465.

[3] Gurtin, M. E., Variational principles for linear elastodynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16, 1 (1964), 34.

[4] 南京工学院数学教研组，《工程数学，积分变换》，人民教育出版社 (1981)，34.

[5] Reiss, R., Minimum principles for linear elastodynamics, *Journal of Elasticity*, 8, 1 (1978), 35.

Principles of Minimum Transformed Energy and Minimum Principles for Dynamics of Plates

Li Jia-ren Zhang Shen-xue

(*Jilin University, Changchun*)

Abstract

In the present paper, we first by Laplace transform present a derivation of principle of transformed virtual work, three principles of minimum transformed energy with influence of rotatory enertia for dynamics of anisotropic linear elastic plates with three generalized displacements. Moreover, the forms with the original in place-time domain corresponding these variational principles are presented.

Then by the introduction of the set of admissible weight functions the three minimum principles for the original place-time domain are derived.

In each of the preceding groups of the variational principles there are two dynamic counterparts to the static principles of minimum potential energy and minimum complementary energy; the other principles are formulated in terms of the internal force alone, but have no counterpart in elastostatics of plates.