应用数学和力学，第7卷第3期（1986年3月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

# 半线性系统的内层现象

林宗池　林苏榕

（福建师范大学）（福建广播电视大学）

（1984年7月31日收到）

**摘　要**

本文研究半线性系统

$$\varepsilon\mathbf{y}''=\mathbf{f}(t,\mathbf{y},\varepsilon)\qquad(a<t<b)$$
$$\mathbf{y}(a,\varepsilon)=\mathbf{A}(\varepsilon),\qquad \mathbf{y}(b,\varepsilon)=\mathbf{B}(\varepsilon)$$

的奇摄动边值问题的内层现象，其中$\varepsilon>0$是一个小参数，$\mathbf{y}$、$\mathbf{f}$、$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是$n$-维向量函数．这种向量边值问题似乎还没有研究过，尽管纯量的边值问题已广泛地研究过．在适当地假设下如同纯量问题一样我们得到解的存在、同时使用适当的不等式，这个解的估计也得到．

## 一、引　　言

某些作者，例如，K. W. Chang和F. A. Howes[1]，应用微分不等式的方法和技巧得到了关于具有内层现象的纯量问题

$$\varepsilon y''=h(t,y)\qquad(a<t<b)$$
$$y(a,\varepsilon)=A,\quad y(b,\varepsilon)=B$$

的解的存在和当$\varepsilon\to0^+$时的渐近性质的十分全面的结果．但是上述结果对于向量边值问题来说似乎还很少．本文研究形如

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon\mathbf{y}''=\mathbf{f}(t,\mathbf{y},\varepsilon) & (a<t<b)\\ \mathbf{y}(a,\varepsilon)=\mathbf{A}(\varepsilon), & \mathbf{y}(b,\varepsilon)=\mathbf{B}(\varepsilon)\end{array}\right\}\tag{1.1}$$

的半线性边值问题．其中$\mathbf{y}$、$\mathbf{f}$、$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是$n$-维向量函数和$\varepsilon>0$是一个小的实值参数．目的是去证明在适当的条件下(1.1)的解存在，这个解对于充分小的$\varepsilon$呈现边界层和角层性质．

我们假设对应的退化系统

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{u},0)=0$$

至少有一个解$\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$．如同纯量情形一样，我们要求退化解$\mathbf{u}(t)$在区域$[a,t_0]$中是$\mathrm{I}_q$-稳定和在$[t_0,b]$中是$\mathrm{II}_n$-稳定，而且退化解$\mathbf{u}(t)$在$(a,b)$中没有连续的一阶导数，但在某一内点$t_0$处有一个"角"．$\mathrm{I}_q$-稳定和$\mathrm{II}_n$-稳定将在第三节中给出．这种按分量逐个做出$\mathrm{I}_q$-稳定和$\mathrm{II}_n$-稳定的条件将允许我们去得到关于(1.1)的解的每一个分量的估计．

## 二、预 备 结 果

我们需要下面的关于微分不等式的基本结果。

**引理1**[2] 研究边值问题

$$\mathbf{y}''=h(t,\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\quad \mathbf{y}(b)=\mathbf{B} \tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$和$\mathbf{B}$是在$R^n$中。假定在$[a,b]$上存在 $n$ 个 $C^{(2)}$类的界定函数对$(\alpha_i(t),\beta_i(t))$，满足

$$\alpha_i(a)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a),\quad \alpha_i(b)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b)\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2a}$$

$$\alpha_i(t)\leqslant\beta_i(t)\qquad (t\in(a,b),\quad i=1,2,\cdots,n) \tag{2.2b}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha''_i\geqslant h_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n)\\ \beta''_i\leqslant h_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n)\end{array}\right\} \tag{2.2c}$$

对 $t$ 在$(a,b)$，$\alpha_j(t)\leqslant y_j\leqslant\beta_j(t)$，$j\neq i$ 成立。又设$\mathbf{h}$在区域 $[a,b]\times\prod\limits_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i]$ 中连续，则问题(2.1)有一个$C^{(2)}[a,b]$类的解 $\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\cdots,y_n(t))$，满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t),\quad (t\in[a,b],i=1,\cdots,n)$$

如果界函数只是分段连续，有一个相应的结果：

**引理 2**[3] 假设$[a,b]$有分割$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$和假设在每一个子区间$[t_{i-1},t_i]$上$(i=1,\cdots,m)$ 存在 $n$ 个界定函数偶 $(\alpha_j,\beta_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ 它们是二次连续可微的。又假设在每一个子区间 $[t_{i-1},t_i]$上(2.2a)～(2.2c)成立。在分点 $t_{i-1}$ 和 $t_i$ 处导数分别是右导数和左导数。最后，假设对于$[a,b]$中的每一个 $t$，$D_L\alpha_i(t)\leqslant D_R\alpha_i(t)$ 和 $D_L\beta_i(t)\geqslant D_R\beta_i(t)$。这里的 $D_L$、$D_R$ 分别表示左导数和右导数。则问题(2.1) 当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时有一个解 $\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\cdots,y^n(t))$，满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t)\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

## 三、边界层和内层现象

令 $q$ 是一个非负的整数，$n\geqslant2$是一个正的整数。往下列关于退化解 $\mathbf{u}(t)$ 的 $\mathrm{I}_q$-稳定 (或 $\mathrm{II}_n$-稳定) 的定义中，我们假设函数 $\mathbf{f}(t,\mathbf{y},\varepsilon)$ 有所规定的在$[a,b]\times[0,\varepsilon_1]\times\prod\limits_{i=1}^{n}D_{1i}\Big($或$[a,b]\times[0,\varepsilon_1]\times\prod\limits_{i=0}^{n}D_{2i}\Big)$中关于 $y_i$ 的连续偏导数的数目。其中 $\varepsilon_1$ 是一个正的常数；$D_{1i}=\{y_i:|y_i-u_i(t)|\leqslant d_i(t)\}$(或 $D_{2i}=\{y_i:0\leqslant y_i-u_i(t)\leqslant d_i(t)\}$，若$A_i\geqslant u_i(a)$和$B_i\geqslant u_i(b)$)，这里的 $d_i(t)$ 是光滑的函数，使得

$$|A_i-u_i(a)|\leqslant d_i(t)\leqslant|A_i-u_i(a)|+\delta\qquad 在[a,a+\delta]上$$

$$|B_i-u_i(b)|\leqslant d_i(t)\leqslant|B_i-u_i(b)|+\delta\qquad 在[b-\delta,b]上$$

和

$$d_i(t)\leqslant\delta\qquad 在\ [a+\delta,b-\delta]上。$$

其中 $A_i$、$B_i$ 分别是 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$的分量和 $\delta>0$ 是小常数。

**定义1** 向量函数$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$在$[a,b]$中称为是$\mathrm{I}_q$-稳定，如果存在 $n$ 个

正常数$m_1,\cdots,m_n$使得

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial y_i^k}(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)=0$$

$$(0\leqslant k\leqslant 2q,\ i=1,\cdots,n;\ (t,y_j,\varepsilon)\in[a,b]\times[0,\varepsilon_1]\times D_{1j},\ j\neq i)$$

且

$$\frac{\partial^{2q+1} f_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,y_n,\varepsilon)\geqslant m_i>0$$

$$(i=1,\cdots,n;\ (t,\mathbf{y},\varepsilon)\in[a,b]\times[0,\varepsilon_1]\times\prod_{i=1}^{n}D_{1i})$$

**定义2** 向量函数$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$在$[a,b]$中称为$\mathrm{I}_n$-稳定，如果$u_i(a)\leqslant A_i$，$u_i(b)\leqslant B_i$和如果存在$n$个正常数$m_1,\cdots,m_n$使得

$$\frac{\partial^j f_i}{\partial y_i^j}(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)\geqslant 0$$

$$(1\leqslant j\leqslant n-1,\quad i=1,\cdots,n;\ (t,y_j,\varepsilon)\in[a,b]\times[0,\varepsilon_1]\times D_{2j},\quad j\neq i)$$

且

$$\frac{\partial^n f_i}{\partial y_i^n}(t,y_1,\cdots,y_n,\varepsilon)\geqslant m_i>0$$

$$(i=1,\cdots,n;\ (t,\mathbf{y},\varepsilon)\in[a,b]\times[0,\varepsilon_1]\times\prod_{i=1}^{n}D_{2i})$$

我们有如下结果：

下列定理是文[4]中的定理1的一般化。

**定理1** 假设退化系统$\mathbf{f}(t,\mathbf{u},0)=0$有一个$C^{(2)}[a,b]$类的$\mathrm{I}_q$-稳定的解$\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$，则存在一个$\varepsilon_0>0$使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，边值问题(1.1)在$[a,b]$中有一个解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)=(y_1(t,\varepsilon),\cdots,y_n(t,\varepsilon))$，满足

$$|y_i(t,\varepsilon)-u_i(t)|\leqslant L_{1i}(t,\varepsilon)+R_{1i}(t,\varepsilon)+C_{1i}\varepsilon^{\frac{1}{2q+1}}$$

其中$i=1,\cdots,n$；$C_{2i}$某一正常数；

$$L_{1i}(t,\varepsilon)=\begin{cases}|A_i-u_i(a)|\exp[-(m_i\varepsilon^{-1})^{1/2}(t-a)] & (\text{若 } q=0)\\ |A_i-u_i(a)|[1+\sigma_{1i}\varepsilon^{-1/2}(t-a)]^{-q^{-1}} & (\text{若 } q\geqslant 1)\end{cases}$$

$$R_{1i}(t,\varepsilon)=\begin{cases}|B_i-u_i(b)|\exp[-(m_i\varepsilon^{-1})^{1/2}(b-t)] & (\text{若 } q=0)\\ |B_i-u_i(b)|[1+\sigma_{2i}\varepsilon^{-1/2}(b-t)]^{-q^{-1}} & (\text{若 } q\geqslant 1)\end{cases}$$

$$\sigma_{1i}=m_i^{1/2}[(q+1)(2q+1)!]^{-1/2}q|A_i-u_i(a)|^q$$

$$\sigma_{2i}=m_i^{1/2}[(q+1)(2q+1)!]^{-1/2}q|B_i-u_i(b)|^q$$

注 对于$q=0$，在两个端点处的边界层是指数型的，对于$q\geqslant 1$，边界层是代数型的。

**证明** 如果我们通过构造能够显示出上下界定函数对$(\alpha_i(t,\varepsilon),\beta_i(t,\varepsilon))$，它们具有(2.2a)～(2.2c)所要求的性质，且用$\alpha_i(t,\varepsilon)$、$\beta_i(t,\varepsilon)$分别代替$\alpha_i(t)$、$\beta_i(t)$和用$f_i\varepsilon^{-1}$代替$h_i$，则从引理1可得出定理1。

事实上，函数$L_{1i}(t,\varepsilon)$是非负的和是微分方程

$$\varepsilon L''_{1i}=\frac{m_i}{(2q+1)!}L_{1i}^{2q+1} \tag{3.1}$$

的解，满足

$$L_{1i}(a,\varepsilon)=|A_i-u_i(a)|$$

和

$$L'_{1i}(a,\varepsilon)=-\left(\frac{m_i}{\varepsilon(q+1)(2q+1)!}\right)^{1/2}|A_i-u_i(a)|^{q+1}$$

这个解向右递减。类似地，函数 $R_{1i}(t,\varepsilon)\geqslant 0$ 是(3.1)的解，满足

$$R_{1i}(b,\varepsilon)=|B_i-u_i(b)|$$

和

$$R'_{1i}(b,\varepsilon)=\left(\frac{m_i}{\varepsilon(q+1)(2q+1)!}\right)^{1/2}|B_i-u_i(b)|^{q+1}$$

且向左递减。

现在我们对于 $t$ 在 $[a,b]$ 中和 $\varepsilon>0$ 定义所要求的下函数和上函数：

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_i(t)-L_{1i}(t,\varepsilon)-R_{1i}(t,\varepsilon)-\Gamma_{1i}(\varepsilon)$$
$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_i(t)+L_{1i}(t,\varepsilon)+R_{1i}(t,\varepsilon)+\Gamma_{1i}(\varepsilon)$$

其中

$$\Gamma_{1i}(\varepsilon)=\left[\frac{\varepsilon r_i}{m_i}\right]^{1/(2q+1)}$$

这里的每一个 $r_i$ 是选定的如此之大的常数：

$$r_i\geqslant M_i(2q+1)!$$

其中 $M_i=\max\limits_{[a,b]}\{|u''_i(t)|\}$。

类似于文[4]中定理 1 的证明，容易验证 $\alpha_i$ 和 $\beta_i$ 满足所要求的性质(2.2a)～(2.2c)。因此，由引理 1 可得出定理1。

下面定理是文[5]中定理 1 的特殊情况。

**定理2**　假设退化方程有一个 $C^{(2)}[a,b]$ 类的 $\mathrm{II}_n$- 稳定的解 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$，使得 $f_i(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)=0$，$u_i(a)\leqslant A_i$，$u_i(b)\leqslant B_i$ 和在 $(a,b)$ 中 $u''_i>0$，则存在一个 $\varepsilon_0>0$ 使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时问题(1.1)在 $[a,b]$ 中有一个解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t,\varepsilon)$ 满足

$$0\leqslant y_i(t,\varepsilon)-u_i(t)\leqslant L_{2i}(t,\varepsilon)+R_{2i}(t,\varepsilon)+C_{2i}\varepsilon^{1/n}$$

其中

$$L_{2i}(t,\varepsilon)=(A_i-u_i(a))\left[1+\sigma_i(A_i-u_i(a))^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(t-a)\right]^{-\frac{2}{n-1}}$$

和

$$R_{2i}(t,\varepsilon)=(B_i-u_i(b))\left[1+\sigma_i(B_i-u_i(b))^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(b-t)\right]^{-\frac{2}{n-1}}$$

这里

$$\sigma_i=(n-1)(m_i/2(n+1)!)^{1/2}$$

和 $C_{2i}$ 是某一个正的常数。

**证明**　定理 2 的证明在很多方面跟上述定理的证明相同，只要我们注意 $L_{2i}>0$ 是微分方程 $\varepsilon L''_{2i}=m_i L^n_{2i}/n!$ 的解，它满足 $L_{2i}(a,\varepsilon)=A_i-u_i(a)$ 和 $L'_{2i}(a,\varepsilon)=-(2m_i/\varepsilon(n+1)!)^{1/2}\cdot(A_i-u_i(a))^{\frac{n+1}{2}}$，并且注意 $R_{2i}>0$ 是满足 $R_{2i}(b,\varepsilon)=B_i-u_i(b)$ 和 $R'_{2i}(b,\varepsilon)=(2m_i/\varepsilon(n+1)!)^{1/2}\cdot(B_i-u_i(b))^{\frac{n+1}{2}}$ 的解。于是对于 $r_i\geqslant|u''_i|n!$，我们定义

$$\alpha_i(t,\varepsilon) = u_i(t)$$

$$B_i(t,\varepsilon) = u_i(t) + L_{2i}(t,\varepsilon) + R_{2i}(t,\varepsilon) + (\varepsilon r_i m_i^{-1})^{1/n}$$

且推证如上述，我们略去细节，除了注意 $u_i$ 的凸性蕴涵着 $\varepsilon\alpha_i'' - f_i(t, y_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, y_n, \varepsilon) = \varepsilon u_i'' - f_i(t, y_1, \cdots, u_i, \cdots, y_n, \varepsilon) = \varepsilon u_i'' \geqslant 0$。

我们现在转到下列的情况：

假设退化方程 $\mathbf{f}(t,\mathbf{u},0)=0$ 有一对 $C^2$ 类解 $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_1(t)$ 和 $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2(t)$，它们在区间 $(a,b)$ 中的某一内点 $t=T$ 相交，也就是说，$\mathbf{u}_1(T)=\mathbf{u}_2(T)$，但 $\mathbf{u}_1'(T)\neq\mathbf{u}_2'(T)$，或者我们通过

$$\mathbf{u}(t)=\begin{cases} \mathbf{u}_1(t) & (a\leqslant t\leqslant T) \\ \mathbf{u}_2(t) & (T\leqslant t\leqslant b) \end{cases}$$

来定义退化解 $\mathbf{u}(t)$，则 $\mathbf{u}'(T^-)\neq\mathbf{u}'(T^+)$。因而，这种情况的实质特征是退化解在 $(a,b)$ 中没有一阶连续导数，但在某一内点有一个"角"。

假如在适当稳定性假设下类似于定理 1、2 的结果能得到，我们希望去解决退化解 $\mathbf{u}(t)$ 的这种类型。考虑到退化解 $\mathbf{u}(t)$ 的角或角形的性质，我们料想到界定函数将比前面研究过的定理 1、2 中的更加复杂。而且，原来解的每一分量，一般说来，可预料到在不同的内点呈现角形或角层，同时在端点也呈现边界层性质。

**定理3** 假设

（1） 分别在 $[a,T_i]$ 和 $[T_i,b]$ 上存在 $C^{(2)}$ 类的伴有 $u_{ji}(t)$ $(j=1,2)$ 的函数 $\mathbf{u}_1=(u_{11}(t),\cdots,u_{1n}(t))$ 和 $\mathbf{u}_2=(u_{21}(t),\cdots,u_{2n}(t))$，对于 $t\in[a,b]$ 和 $y_k$ 在 $D_{jk}$ 中，$k\neq i$，$j=1,2$ 满足

$$f_i(t, y_1, \cdots, u_{ji}, \cdots, y_n, \varepsilon)=0$$

而且 $u_{1i}(T_i)=u_{2i}(T_i)$ 和 $u_{1i}'(T_i)\neq u_{2i}'(T_i)$，$T_i$ 在 $(a,b)$ 中，此外，$|u_i''(T_i^{\pm})|<\infty$ 和在 $[a,T_i]\cup[T_i,b]$ 中 $u_i''\geqslant 0$。

（2） 对于非负整数 $s$，函数 $\mathbf{f}$ 在 $(t,\mathbf{y},\varepsilon)$ 中是连续的和在 $D_{ji}(j=1,2)$ 中关于 $y_i$ 是 $C^{(s)}$ 类，$s=2q+1$ 或 $n$。

（3） $\mathbf{u}_1(t)$ 在 $[a,T_i]$ 中是 $\mathrm{I}_q$-稳定，和 $u_2(t)$ 在 $[T_i,b]$ 中是 $\mathrm{II}_n$-稳定，且 $u_i(a)\leqslant A_i$，$u_i(b)\leqslant B_i$。则存在一个 $\varepsilon_0>0$ 使得对于每一个 $\varepsilon$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，存在 (1.1) 的一个解 $\mathbf{y}(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon),\cdots,y_n(t,\varepsilon))$ 并且对于 $t$ 在 $[a,b]$ 中，

$$0<y_i(t,\varepsilon)-u_i(t)\leqslant L_{1i}(t,\varepsilon)+R_{2i}(t,\varepsilon)+V_s(t,\varepsilon)+\Gamma_s(\varepsilon)$$

这里的 $L_{1i}(t,\varepsilon)$ 如同定理一中给定的一样。$R_{2i}(t,\varepsilon)$ 如同定理 2 中给定的一样。而

$$V_s(t,\varepsilon)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\varepsilon m_i^{-1})^{1/2}|u_i'(T_i^+)-u_i'(T_i^-)|\exp[-(m_i\varepsilon^{-1})^{1/2}|t-T_i|] & (\text{若}\, q=0,\ s=1) \\ \sigma_{3i}[1+q\,(\varepsilon(2q+2)!/2m_i)^{-\frac{1}{2}}\sigma_{3i}\,|t-T_i|]^{-\frac{1}{q}} & (\text{若}\, q\geqslant 1,\ s=2q+1) \\ \frac{1}{2}\sigma_{4i}\left[1+\frac{1}{2}(n-1)(\varepsilon(n+1)!/2m_i)^{-\frac{1}{2}}\sigma_{4i}^{\frac{n-1}{2}}|t-T_i|\right]^{-\frac{2}{n-1}} & (\text{若}\, s=n) \end{cases}$$

$$\Gamma_s(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon r_{si}}{m_i}\right)^{\frac{1}{s}},\quad \sigma_{3i}^{q+1}=\frac{1}{2}|u_i'(T_i^+)-u_i'(T_i^-)|\left[\frac{\varepsilon(2q+2)!}{2m_i}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_{4i}^{n+1}=|u_i'(T_i^+)-u_i'(T_i^-)|^2\varepsilon(n+1)!/2m_i$$

**证明** 对于 $t$ 在 $[a,b]$ 中和 $\varepsilon>0$ 我们定义：

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_i(t)$$

$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_i(t)+L_{1i}(t,\varepsilon)+R_{2i}(t,\varepsilon)+V_s(t,\varepsilon)+\Gamma_s(\varepsilon)$$

显然，$\alpha_i$和$\beta_i$满足(2.2a)和(2.2b)所要求的性质。余下的是要验证用$f_i\varepsilon^{-1}$代替$h_i$性质(2.2c)也成立。我们注意到函数$\alpha_i$在点$t=T_i$是不可微的；事实上，$\alpha_i'(T_i^-)<\alpha_i'(T_i^+)$。然而，我们能够证明在$(a,T_i)\cup(T_i,b)$中$\varepsilon\alpha_i''\geqslant f_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n,\varepsilon)$，即$\alpha_i$是一个下解。对于函数$\beta_i$我们注意到$V_s$是$\varepsilon V''=m_iV^s/s!$在$(a,T_i)\cup(T_i,b)$中的解，满足

$$V_s'(T_i^-,\varepsilon)=-V_s'(T_i^+,\varepsilon)=|u_i'(T_i^+)-u_i'(T_i^-)|/2$$

$$V_s(T_i^-,\varepsilon)=V_s(T_i^+,\varepsilon)=\sigma_l$$

这里

$$\sigma_l=\begin{cases}\sigma_{3i}, & 若\ s=2q+1\\ \sigma_{4i}, & 若\ s=n\end{cases}$$

利用这个函数$V_s$，我们看到$\beta_i$在点$t=T_i$是可微的。事实上，

$$\beta_i'(T_i^-,\varepsilon)=\beta_i'(T_i^+,\varepsilon)=|u_i'(T_i^+)+u_i'(T_i^-)|/2$$
$$+L_{1i}'(T_i,\varepsilon)\pm R_{2i}'(T_i,\varepsilon)$$

现在我们转到证明不等式$\varepsilon\beta_i''\leqslant f_i(t,y_1,\cdots\beta_i,\cdots,y_n,\varepsilon)$成立。

1)　若$s=2q+1$，我们有

$$f_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n,\varepsilon)-\varepsilon\beta_i''=f_i(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)$$
$$+\sum_{k=1}^{2q}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f_i}{\partial y_i^k}(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)(\beta_i-u_i)^k$$
$$+\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}f_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,u_i^*,\cdots,y_n,\varepsilon)(\beta_i-u_i)^{2q+1}-\varepsilon\beta_i''$$
$$=\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}f_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,u_i^*,\cdots,y_n,\varepsilon)(\beta_i-u_i)^{2q+1}-\varepsilon\beta_i''$$
$$\geqslant\frac{m_i}{(2q+1)!}[L_{1i}^{2q+1}+R_{2i}^{2q+1}+V_{2q+1}^{2q+1}+\Gamma_{2q+1}^{2q+1}(\varepsilon)]$$
$$-\varepsilon u_i''-\varepsilon L_{1i}''-\varepsilon R_{2i}''-\varepsilon V_{2q+1}''$$
$$=\frac{m_i}{(2q+1)!}R_{2i}^{2q+1}+\frac{\varepsilon r_{2q+1,i}}{(2q+1)!}-\varepsilon|u_i''|-\varepsilon R_{2i}''$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon r_{2q+1,i}}{(2q+1)!}-\varepsilon|u_i''|-\varepsilon R_{2i}''>0$$

这里$n=2q$，$u_i^*$是$\beta_i$和$u_i$之间的某一中间点和$r_{2q+1,i}$是一个正的常数选取如此之大

$$r_{2q+1,i}\geqslant(2q+1)![|u_i''|+R_{2i}'']$$

若$n=2q+1$，则我们只要选取$r_{2q+1,i}\geqslant(2q+1)!|u_i''|$。因此，我们有$\varepsilon\beta_i''\leqslant f_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n,\varepsilon)$。

2)　若$s=n$，我们有

$$f_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n,\varepsilon)-\varepsilon\beta_i''=f_i(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f_i}{\partial y_i^k}(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n,\varepsilon)(\beta_i-u_i)^k$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f_i}{\partial y_i^n}(t,y_1,\cdots,u_i^{**},\cdots,y_n,\varepsilon)(\beta_i-u_i)^n-\varepsilon\beta_i''$$

$$\geqslant\frac{m_i}{n!}[L_{1i}^n+R_{2i}^n+V_{ni}^n+(\Gamma_n(\varepsilon))^n]-\varepsilon u_i''-\varepsilon L_{1i}''-\varepsilon R_{2i}''-\varepsilon V_n''$$

$$=\frac{\varepsilon r_{ni}}{n!}-\varepsilon u_i''+\frac{m_i}{n!}L_{1i}^n-\varepsilon L_{1i}''\geqslant\frac{\varepsilon r_{ni}}{n!}-\varepsilon_i''-\varepsilon L_{1i}''$$

$$=\frac{\varepsilon r_{ni}}{n!}-\varepsilon u_i''-\frac{m_i}{(2q+1)!}L_{1i}^{2q+1}$$

$$=\frac{\varepsilon r_{ni}}{n!}-\varepsilon u_i''-\frac{m_i}{(2q+1)!}|A_i-u_i(a)|^{2q+1}[\sqrt{\varepsilon}+\sigma_{1i}(t-a)]^{-\frac{(2q+1)}{q}}\cdot\varepsilon^{\frac{2q+1}{2q}}$$

$$\geqslant\varepsilon\left\{\frac{r_{ni}}{n!}-|u_i''|-\frac{m_i}{(2q+1)!}[A_i-u_i(a)]^{2q+1}\cdot(\sigma_{1i}(t-a)]^{-\frac{2q+1}{q}}\cdot\varepsilon_0^{\frac{1}{2q}}\right\}\geqslant 0$$

这里 $n=2q$ 和 $r_{ni}$ 是一个正常数选取如此之大

$$r_{ni}\geqslant n!\left\{|u_i''|+\frac{m_i}{(2q+1)!}|A_i-u_i(a)|^{2q+1}[\sigma_{1i}\cdot(t-a)]^{-\frac{2q+1}{q}}\cdot\varepsilon_0^{\frac{1}{2q}}\right\}$$

$\varepsilon_0$是一个固定的正常数，$u_i^{**}$是 $\beta_i$和 $u_i$之间的某一中间点，若 $n=2q+1$,则我们只要选取 $r_{ni}\geqslant n!|u_i''|$因此，我们有

$$f_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n,\varepsilon)-\varepsilon\beta_i''\geqslant 0$$

即

$$\varepsilon\beta_i''\leqslant f_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n,\varepsilon)$$

因此，从引理 2 可得定理3。

注 以上的结果能够推广到三个分支的退化轨道

$$u_0(t)=\begin{cases}u_L(t) & (a\leqslant t\leqslant t_1)\\ u(t) & (t_1\leqslant t\leqslant t_2)\\ u_R(t) & (t_2\leqslant t\leqslant b)\end{cases}$$

其中解 $u_L$, $u_R$和退化系统$f(t,u(t),0)=0$的中间解$u(t)$相交，使得$u_L(t_1)=u(t_1)$, $u_L'(t_1)\neq u'(t_1)$, $u(t_2)=u_R(t_2)$以及$u'(t_2)\neq u_R'(t_2)$。当 $t_1=t_2$时，这就变成了以上的退化轨道 $u_0(t)$。

## 参 考 文 献


[1] Chang, K.W. and F.A. Howes, *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena*, Springer-Verlag Pub. (in press).

[2] Bernfeld, S. and V. Lakshmikantham, *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, Academic Press, New York (1974).

[3] Hebets, P. and M. Laloy, E'tude de problèms aux limites par la méthod des sur-et sous-solution, Lecture notes, Catholic University of Louvain (1974).

[4] Chang, K.W. and G.X. Liu, Boundary and angular layer behavior in singularly perturbed semilinear systems, *Appl. Math. and Mech.* 5, 3 (1984), 1309——1316.

[5] 林宗池，一类半线性系统奇摄动边值问题解的估计（待发表）。

# Interior Layer Phenomena of Semilinear Systems

Lin Zong-chi

(*Fujian Normal University, Fuzhou*)

Lin Su-rong

(*Fujian Broadcasted TV University, Fuzhou*)

**Abstract**

In this paper, we study the interior layer phenomena of singular perturbation boundary value problems for semilinear systems:

$$\varepsilon \mathbf{y} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \varepsilon) \qquad (a < t < b)$$

$$\mathbf{y}(a, \varepsilon) = A(\varepsilon), \quad \mathbf{y}(b, \varepsilon) = \mathbf{B}(\varepsilon)$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, **y**, **f**, **A** and **B** are n-dimensional vector functions. This vector boundary value problem does not appear to have been studied, although the scalar boundary problem has been treated extensively. Under appropriate assumptions we obtain existence of solution as in the scalar problem and the estimate of this solution in terms of appropriate inequalities as well.