

两自由度分段线性振动系统的亚谐波解*

陈予恕 金志胜

(天津大学, 1985年1月15日收到)

摘 要

本论文研究了两个自由度分段线性振动系统的亚谐波解, 其理论结果证明系统可能存在各种类型的亚谐波解[(1.31)~(1.34)], 如1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, ...亚谐波共振解在模拟计算机的计算结果以及现场实验的结果中得到了部分证实. 在一定的系统参数的情况下, 模拟计算机的结果有混沌现象发生.

在多种类型的机械中, 其振动原理即可简化为两个自由度分段线性的非线性系统. 大型双质量非线性共振筛是这类机械的典型实例. 在论文[1]中, 我们给出了该系统的定常解的一种求解方法; 在论文[2]中, 研究了非线性共振筛和其能源相互联系条件下的解以及物料对振动体的规律的影响; 在论文[3]中, 给出了双质量非线性模型共振筛和生产用筛现场实验研究的主要结果. 以上的主要内容, 曾在国内外学术会议上报告过. 本论文研究了该系统的亚谐波共振解, 其部分理论结果如1/2, 1/3, 1/5, 1/6, 1/7, 1/12亚谐波共振解等在模拟计算机上得到了证实, 其中1/2亚谐波共振现象在生产用筛现场实验时已经观察到. 更有兴趣的是, 在一定的系统参数情况下, 有混沌现象发生, 即干扰力虽是单频正弦的, 而其响应的功率谱图是连续的. 这种混沌现象, 在我们所研究的系统中, 因干扰力频率改变在两个可能存在的周期解之间都将发生. 对这一复杂的振动现象, 无论从理论或实验方面都需进一步深入的研究.

一、亚 谐 解

两个自由度分段线性系统的振动方程为

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^4 \alpha_{s\beta} x_\beta + f_s(\omega t) + \varepsilon F_s(x) \quad (s=1, 2, 3, 4) \quad (1.1)$$

其中

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{12}, \quad x_2 = \dot{y}_{12}, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = \dot{y}_2 \\ f_2(\omega t) &= \frac{c_0}{m_1} (y_0 + \mu_0 \dot{y}_0) = \bar{c} \cos(\omega t + \alpha_2) \end{aligned}$$

* 周恒推荐. 本文为中国科学院基金资助的课题.

$$\left. \begin{aligned} f_4(\omega t) &= -\frac{c_0}{m_2}(y_0 + \mu_0 \dot{y}_0) = \bar{c}_1 \cos(\omega t + \alpha_2) \\ f_1(\omega t) &= f_3(\omega t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$F_s(x)$ 为包括分段线性函数在内的非线性函数, ϵ 为小参数, y_{12} 为上筛箱质心对下筛箱的相对位移, y_2 为下筛箱质心的绝对位移。

方程组(1.1)的演化系统为

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^4 a_{s\beta} x_\beta + f_s(\omega t) \quad (1.3)$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a'_1 & 0 & a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & 0 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

而 a'_1, a'_2, b_1, a_2 和 k 为与系统参数有关的常数。

设(1.3)的特解为

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= G_1 \cos(\omega t + r), & x_2^* &= G_2 \sin(\omega t + r) \\ x_3^* &= G_3 \cos(\omega t + r), & x_4^* &= G_4 \sin(\omega t + r) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

将(1.5)代入(1.3), 则

$$\begin{pmatrix} \omega & 1 & 0 & 0 \\ a'_1 & \omega & -a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 1 \\ -b_1 & 0 & a_2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{c} \\ 0 \\ \bar{c}_1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

{G}有唯一解的条件是

$$\begin{vmatrix} \omega & 1 & 0 & 0 \\ a'_1 & \omega & -a'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 1 \\ -b_1 & 0 & a_2 & \omega \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.7)$$

由(1.7)知此条件满足, 故可以从(1.6)式确定 G_s 。

对方程组(1.1)采用变换

$$x_s = \sum_{h=1}^2 A_h \varphi_{sh}(\psi_h) + x_s^*(\varphi)$$

其中 $\varphi_{sh}(\psi_h)$ 为(1.3)的齐次部分的基解系, 且

$$\frac{d\psi_h}{dt} = \lambda_h, \quad \psi_1 = \lambda_1 t + \theta_1^*, \quad \psi_2 = \lambda_2 t + \theta_2^*, \quad \varphi = \omega t + \theta^* \quad (1.8)$$

λ_2 为演化系统的第二阶固有频率, ω 为干扰力频率。

在求出(1.3)的齐次部分共轭方程的基解后, 根据基解系之间的正交关系, 可得到标准方程组。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} &= \varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta_2'} \sum_{s=1}^4 F_s \psi_{s2}(\psi_2) = \varepsilon \phi_2(A, \psi, \varphi) \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \lambda_2 - \varepsilon \cdot \frac{1}{\Delta_2' A_2} \sum_{s=1}^4 F_s \psi_{s2}^*(\psi_2) = \lambda_2 - \varepsilon \phi_2^*(A, \psi, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_3 = 0 \\ F_2 &= -(1+k)[f_3(x_1) + f_2(x_2)] - \frac{\mu_1 c_1}{m_1} x_2 + \left(\frac{\mu_2 c_2}{m_2} - \frac{\mu_1 c_1}{m_1} \right) x_4 \\ F_4 &= k[f_3(x_1) + f_2(x_2)] - \frac{\mu_2 c_2}{m_2} x_4 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

我们在工作[5]中曾经给出固有频率域的概念,就是说,共振发生在一个频率区间,而不是一个点. 设 λ_2^0 为在 λ_2 共振区中的一个点,它可以在该域内变动,且满足共振关系

$$m\lambda_2^0 + n\omega = 0 \quad (1.11)$$

同时不要求 $\lambda_2 - \lambda_2^0$ 为与 ε 同阶的小量. 当 $n > m$ 时称为超谐共振, $m > n$ 时称为亚谐共振.

对标准方程组(1.9), 采用 KB 变换

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= y_2 + \varepsilon U_2(t, y, \vartheta) \\ \psi_2 &= \lambda_2^0 t + \vartheta_2 + \varepsilon V_2(t, y, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

并要求新变量的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= \varepsilon Y_2(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Y_2^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \lambda_2 - \lambda_2^0 + \varepsilon Z_2(y, \vartheta) + \varepsilon^2 Z_2^*(t, y, \vartheta, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

其中 Y_2, Z_2 不显含 t , 而 U_2, V_2, Y_2^* 和 Z_2^* 为 ϑ 的以 2π 为周期的周期函数.

将(1.12)代入(1.9), 并考虑(1.13), 令 ε 一次方的系数相等, 则

$$\left. \begin{aligned} Y_2 + \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta_2} (\lambda_2 - \lambda_2^0) &= \phi_2, (\varepsilon=0) \\ Z_2 + \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta_2} (\lambda_2 - \lambda_2^0) &= -\phi_2^*, (\varepsilon=0) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

因要求 Y_2, Z_2 不显含 t , 故

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi_2 dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_2 d\psi \\ Z_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T -\phi_2^* dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_2^* d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{1}{\Delta_2'} \sum_{s=1}^4 F_s \psi_{s2}(\psi) \\ &= \frac{1}{\Delta_2' \lambda_2} \left\{ \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} k(a_1' - \lambda_2^2) \\ b_1 \end{bmatrix} - (1+k) \right\} \cdot \left(\frac{c_0 r}{2} [\cos \vartheta_2 \right. \\ &\quad \left. - \cos(2\omega t + \vartheta_2) + \mu_0 \omega \sin(2\omega t + \vartheta_2) + \mu_0 \omega \sin \vartheta_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -f_3(A, \psi, \varphi) \sin \psi_2 - f_2(A, \psi, \varphi) \sin \psi_2) + \frac{\mu_1 c_1}{m_1} \left[-\lambda_1 A_1 \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_1^2}{a_2'} \right) \right. \\
 & \cdot \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \lambda_2 A_2 \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_2'} \right) \sin^2 \psi_2 \left. \right] + \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) \frac{\mu_2 c_2}{m_2} \\
 & \cdot \left. \left(\frac{\lambda_1}{a_2'} (\lambda_1^2 - a_1') A_1 [\cos(\psi_2 - \psi_1) - \cos(\psi_2 + \psi_1)] + \frac{\lambda_2 A_2}{a_2'} (\lambda_2^2 - a_2') \sin^2 \psi_2 \right) \right\} \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

其中

$$f_3(x_1) = \begin{cases} (c_1' - c_1'') x_1 & (-e \leq x_1 \leq e) \\ (c_1' - c_1'') e & (x_1 \geq e) \\ -(c_1' - c_1'') e & (x_1 \leq -e) \end{cases}$$

取

$$x_1 = A_2 \cos \psi + G_1 \cos \varphi$$

e 为分段簧之间的间隙, 为已知数, 由(1.8)可知该函数可展成 ψ, φ 的二重傅氏级数:

$$\begin{aligned}
 f_3(A, \psi, \varphi) &= \frac{1}{2} a_{0,1} \cos \varphi + \frac{1}{2} a_{1,0} \cos \psi \\
 &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{2m,2n+1} \cos 2m\psi \cdot \cos(2n+1)\varphi \\
 &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{2m+1,2n} \cos(2m+1)\psi \cos 2n\varphi \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

而 $a_{0,1}, \dots$ 为傅氏级数的系数, 不难确定

$$a_{0,1} = \frac{4(c_1' - c_1'')}{\pi^2} [2e\psi_0 \sin \varphi_0 + \frac{1}{2} H(\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) \cdot (\pi - 2\psi_0)] \quad (1.18)$$

$$a_{1,0} = \frac{4(c_1' - c_1'')}{\pi^2} [2e\varphi_0 \sin \psi_0 + \frac{1}{2} A_2(\pi - 2\psi_0 - \sin 2\psi_0) \cdot (\pi - 2\varphi_0)] \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
 a_{2m,2n+1} &= \frac{2(c_1' - c_1'')}{m\pi^2} \sin 2m\psi_0 \left[\frac{2e}{2n+1} \sin(2n+1)\varphi_0 \right. \\
 &+ \left. \frac{H}{n+1} \sin 2(n+1)\varphi_0 + \frac{1}{n} H \sin 2n\varphi_0 \right] \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2m+1,2n} &= \frac{2(c_1' - c_1'')}{n\pi^2} \sin 2n\varphi_0 \left[\frac{2e}{2m+1} \sin(2m+1)\psi_0 \right. \\
 &+ \left. \frac{H}{m+1} \sin 2(m+1)\psi_0 + \frac{H}{m} \sin 2m\psi_0 \right] \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

上式中的 ψ_0 与 φ_0 满足

$$e = A_2 \cos \psi_0 + G_1 \cos \varphi_0 \quad (1.22)$$

当满足共振关系(1.11)时, 不难从(1.22)式确定 ψ_0 和 φ_0 .

而

$$f_2(A, \psi, \varphi) = \begin{cases} h_1' x_2 = -h_1' (A_2 \lambda_2 \sin \psi + G_2 \sin \varphi) & (-e \leq x_1 \leq e) \\ h_1'' x_2 = -h_1'' (A_2 \lambda_2 \sin \psi + G_2 \sin \varphi) & (x_1 \geq e) \\ h_1''' x_2 = -h_1''' (A_2 \lambda_2 \sin \psi + G_2 \sin \varphi) & (x_1 \leq -e) \end{cases}$$

也可展成 ψ, φ 的二重傅氏级数

$$f_2(A, \psi, \varphi) = D_1 \sin \psi + D_2 \sin \varphi + \sum_{m, n=1}^{\infty} d_{2m+1, 2n+1} \sin(2m+1)\psi \sin(2n+1)\varphi \quad (1.23)$$

其中 D_1, \dots 为傅氏级数系数, 不难确定

$$D_1 = \frac{4}{\pi^2} \left\{ 2h_1' \left[-\frac{A_2 \lambda_2}{4} (\sin 2\psi_0 - 2\psi_0) \varphi_0 + G_2 (\cos \psi_0 - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (\cos \varphi_0 - 1) + h_1' \left[\frac{A_2 \lambda_2}{2} (\sin 2\psi_0 + \pi - 2\psi_0) \cdot (\pi - 2\varphi_0) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 4G_2 \cos \psi_0 \cos \varphi_0 \right] \right\} \quad (1.24)$$

$$D_2 = \frac{4}{\pi^2} \left\{ 2h_1'' \left[A_2 \lambda_2 (\cos \psi_0 - 1) (\cos \varphi_0 - 1) + \frac{G_2 \psi_0}{2} \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right) \right] \right. \\ \left. + h_1' \left[2\lambda_2 A_2 \cos \varphi_0 \cos \psi_0 + \frac{G_2}{2} \cdot (\pi - 2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0) (\pi - 2\psi_0) \right] \right\} \quad (1.25)$$

$$d_{2m+1, 2n+1} = \frac{4}{\pi^2} \left\{ 2h_1' \left(\frac{A_2 \lambda_2}{2(2n+1)} \left[\frac{1}{2(m+1)} \sin 2(m+1)\psi_0 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2m} \sin 2m\psi_0 \right] \cdot [\cos(2n+1)\varphi_0 - 1] + \frac{G_2}{2m+1} [\cos(2m+1)\psi_0 - 1] \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left[\frac{1}{2(n+1)} \sin 2(n+1)\varphi_0 - \frac{1}{2n} \sin 2n\varphi_0 \right] \right) + h_1' \cdot \left(-\frac{A_2 \lambda_2}{m(2n+1)} \sin 2m\psi_0 \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \cos(2n+1)\varphi_0 + \frac{2G_2}{2m+1} \cdot \cos(2m+1)\psi_0 \cdot \left[\frac{1}{2(n+1)} \sin 2(n+1)\varphi_0 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2n} \sin 2n\varphi_0 \right] \right) \right\} \quad (1.26)$$

将 $f_2(A, \psi, \varphi)$ 和 $f_3(A, \psi, \varphi)$ 代入 (1.16) 式, 利用 (1.15) 式, 求得主共振情况 [在 (1.11) 式中 $m=1, n=-1$] 下的 Y_2, Z_2 表达式:

$$Y_2 = \frac{1}{A_2' \lambda_2} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left(\frac{c_0 r}{2} (\cos \vartheta_2 + \mu_0 \omega \sin \vartheta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} A_2 \lambda_2 h_1' [\alpha - \mathcal{H}(\alpha, Z)] - \frac{\mu_1 c_1 A_2 \lambda_2}{2m_1} \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_1'} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_2 c_2 A_2 \lambda_2}{2a_1' m_2} (\lambda_2^2 - a_1') \cdot \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) \right\} \quad (1.27)$$

$$Z_2 = \frac{1}{m_1 A_2' A_2 \lambda_2} \left\{ \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left(-\frac{c_0 r}{2} (\sin \vartheta_2 - \mu_0 \omega \cos \vartheta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_1' A_2}{2} [\mathcal{H}(\beta, Z) + 1 - \beta] \right) \right\} \quad (1.28)$$

在亚谐波共振情况 [即满足关系式 (1.11)] 下, 则

$$\begin{aligned}
 Y_2 = & \frac{1}{A_1' \lambda_2} \left\{ \frac{1}{m_1} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \left(\frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{4} \sum_{m, n=1}^{\infty} d_{2m+1, 2n+1} \right) \right. \\
 & \cdot \{ \sin[2(m+1)\psi - (2n+1)\varphi] - \sin[2m\psi - (2n+1)\varphi] \} \\
 & \left. - \frac{\mu_1 c_1 A_2 \lambda_2}{2m_1} \left(1 + \frac{a_1' - \lambda_2^2}{a_1'} \right) + \frac{\mu_2 c_2 A_2 \lambda_2}{2m_2 a_2'} (\lambda_2^2 - a_1') \cdot \left(\frac{a_1' - \lambda_2^2}{b_1} - 1 \right) \right\} \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2 = & \frac{1}{m_1 A_1' A_2 \lambda_2} \left[\frac{k(a_1' - \lambda_2^2)}{b_1} - (1+k) \right] \cdot \left\{ \frac{a_{1,0}}{4} + \frac{1}{4} \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{2m, 2n+1} \right. \\
 & \left. \cdot (\cos[(2m+1)\psi - (2n+1)\varphi] + \cos[(2m-1)\psi - (2n+1)\varphi]) \right\} \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

从(1.29)式和(1.30)式知，在下列条件下有可能产生亚谐共振：

$$\psi = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2(m+1)} \varphi \quad (1.31)$$

$$\psi = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2m} \varphi \quad (1.32)$$

$$\psi = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2m+1} \varphi \quad (1.33)$$

$$\psi = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2m-1} \varphi \quad (1.34)$$

其中可能有下列共振情况发生

主共振 $\psi = \varphi$

超谐共振 $\psi = 3\varphi, 5\varphi, 7\varphi, \dots$

亚谐共振 $\psi = (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \dots)\varphi$

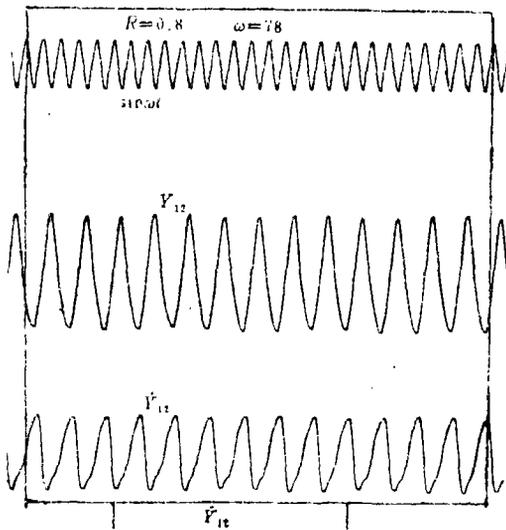


图1 1/2亚谐解的波形图

如给系统以不同的参数，可利用模拟计算机求亚谐共振解。在一组参数的情况下，已证实存在有1/2, 1/3, 1/5, 1/6, 1/12等亚谐共振解。下面给出模拟机解的部分结果：

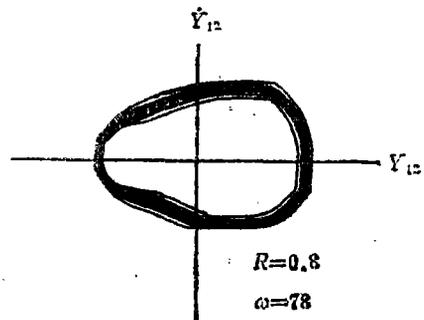


图2 1/2亚谐解的相平面图

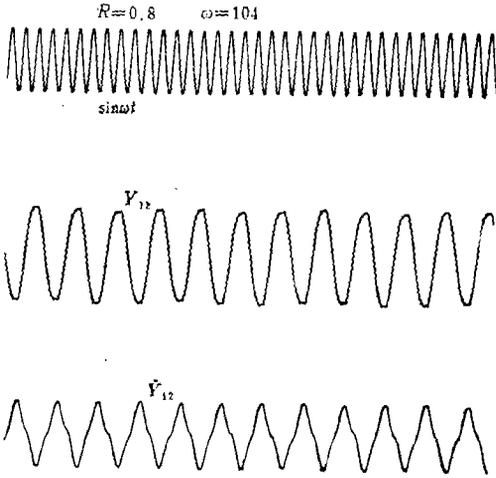


图3 1/3亚谐解的波形图

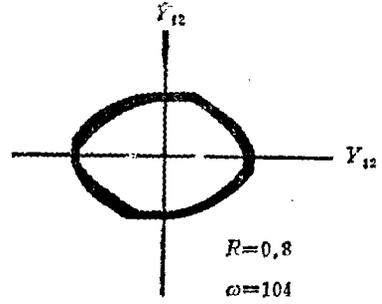


图4 1/3亚谐解的相平面图

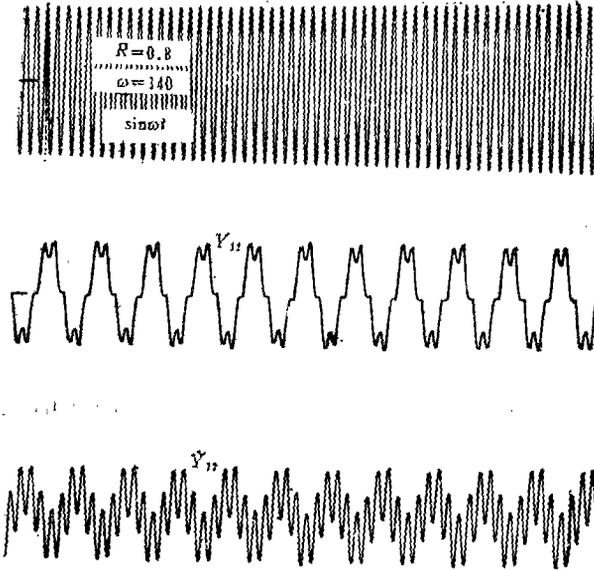


图5 1/5亚谐解的波形图

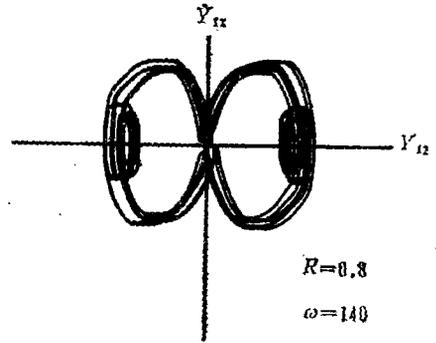


图6 1/5亚谐解的相平面图

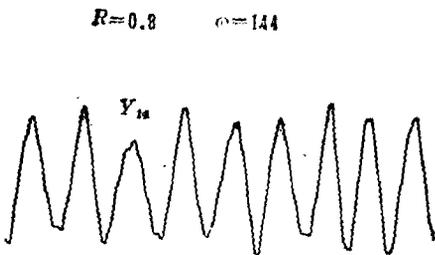


图7 1/6亚谐解的波形图

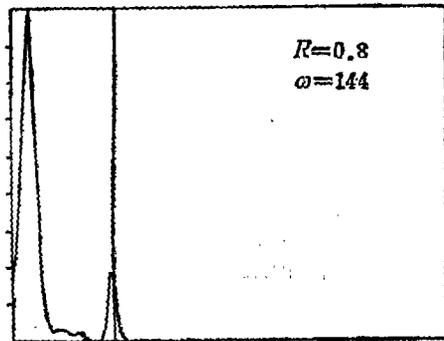


图8 1/6功率谱密度图

从以上计算结果知，尽管弹性力的非线性函数 $f_3(x)$ 对 x_1 来说是奇函数，而在各类 $(1/n)$ 亚谱共振解中， n 不但可为奇数，也可为偶数。对 $1/2$ 亚谱共振，非线性固有频率域的中心近似地可取为

$$\lambda_2^0 = (\lambda_2^1 + \lambda_2) / 2$$

从图 9 知，在 $1/n$ 亚谱共振解中，随着 n 的上升，固有频率域的中心值将减小。频率域重合说明在同一干扰力频率时有可能产生不同类型的亚谱解。

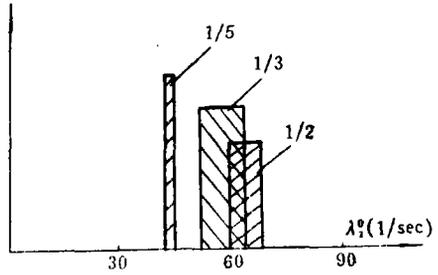


图 9 亚谱共振的固有频率域分布图

各阶亚谱共振解的存在区间，需分别研究存在性来解决，各阶亚谱共振解的稳定条件，可利用 [4] 的方法给出。

二、浑 沌 现 象

两个自由度分段线性的非线性系统在一定系统参数的情况下都有可能存在怪引子，发生混沌现象。

系统在单频简谐干扰力作用下，其响应不呈现任何规律性，且振幅值有界，我们认为此时的响应为混沌。混沌现象的功率谱图是连续的，反之，如果振动位移的时间历程，其功率谱图不是连续的，而是离散的，则该响应不是混沌。

在一定的系统参数的情况下，当有单频干扰力存在时，在系统可能连续存在的两个周期解之间（在主共振和 $1/2$ 亚谱共振之间， $1/2$ 与 $1/3$ 亚谱共振之间；或对另一系统参数为主共振与 $1/3$ 亚谱共振之间，...）将出现混沌，如图 10，图 11，图 12 所示，该混沌是在主共振与 $1/2$ 亚谱共振之间发生的，图 12 的分析结果证实了其混沌的性质。

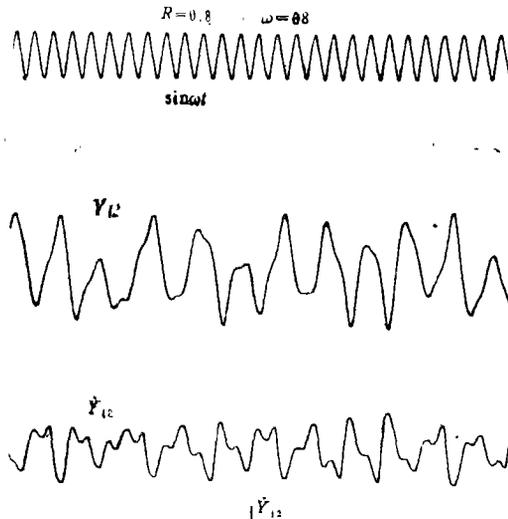


图 10 波形图

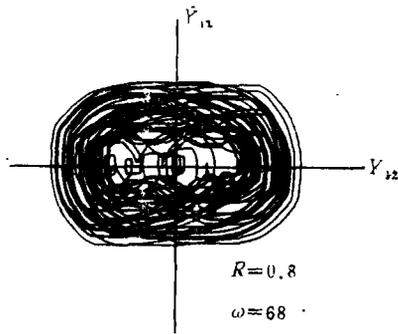


图11 相平面图

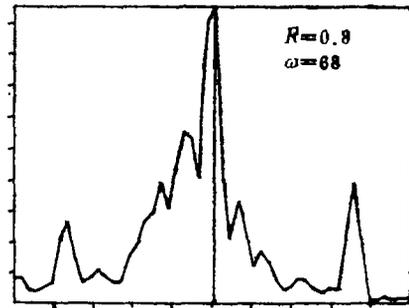


图12 功率谱密度图

参 考 文 献

- [1] 陈予恕, 两自由度分段线性振动系统的一种解法, 《固体力学学报》, 1 (1982).
- [2] Чэнь Юй-шу, Динь Зин-шэнь и Уань Дий-цунь, Некоторые нелинейные задачи крупного двухмассового нелинейного гирота, *The 9th International Conference on Nonlinear Oscillations*, 1 (1984).
- [3] 陈予恕、霍拳忠等, 大型双质量非线性共振箱振动实验研究, 振动与冲击, 4 (1982).
- [4] 陈予恕, 《非线性振动》, 天津科技出版社 (1983).
- [5] Chen Yu-shu and Li Shi-hai, The sub/super harmonic resonance solution of nonlinear vibration equations, *CJVIC* (1984).

Subharmonic Solution of a Piecewise Linear Oscillator with Two Degrees of Freedom

Chen Yu-shu Jin Zhi-sheng

(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

In the present paper subharmonic resonance solution of a piecewise linear oscillator with two degrees of freedom is studied. It is shown that in this system there exist a series of subharmonic resonance solutions, among them there are $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, ... subharmonic resonance solutions. The calculated results by the analogy computer and the field experiments in the factory partly verify this theory. Under certain circumstances, the generation of chaotic states of the oscillation is observed in analogy computer solutions.