应用数学和力学，第7卷第3期（1986年3月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

处理一类非线性与线性组合结构的混合边界条件方法

陈山林 张立英

（重庆建筑工程学院）（重庆交通学院）

（叶开沅推荐，1985年9月1日收到）

摘 要

本文处理边界与线弹性结构连接的扁壳轴对称大挠度问题。提出了处理此类问题的混合边界条件方法，将组合问题转化为独立结构问题。给出了问题的积分方程组，用摄动法求得了解答。计算了扁球壳与柱壳组合问题的算例。

一、引 言

考虑图1所示一类壳体组合结构，其中扁壳部分为轴对称大挠度变形，边界结构（柱壳、锥壳、球壳等）为小挠度变形。这是一个能比较真实地反映许多实际结构的组合结构问题。

我们假定，对于边界结构，其边界位移仅与边界力及其荷载有关，且具有线性关系

$$\begin{bmatrix}u\\ \varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\ k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\ M\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1'\\ k_2'\end{bmatrix}Q+\begin{bmatrix}k_3'\\ k_4'\end{bmatrix}q' \tag{1.1}$$

式中，u，φ——边界结构的边界水平位移和转角，N，M，Q——边界水平力，弯矩，剪力，q'——边界结构荷载参数，k_{ij}，k_i'称为边界约束系数，可由求解边界结构小变形问题得到，视为已知。其中Q和q'与变形无关，设可以表示为

$$\left.\begin{aligned}k_1'Q+k_3'q'=k_1^*q_0\\ k_2'Q+k_4'q'=k_2^*q_0\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

式中，q_0——扁壳荷载参数。

对于边界$r=a$，有连接条件

$$\left.\begin{aligned}u_r=u,\quad \frac{dw}{dr}=\varphi\\ N_r=N,\quad M_r=M\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

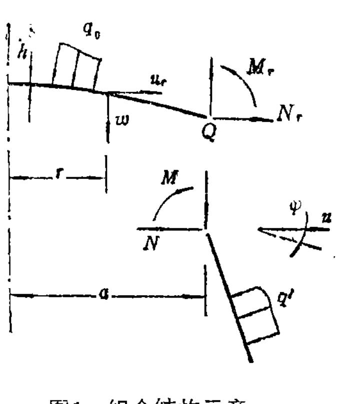

图1 组合结构示意

式中，u_r，w——扁壳径向位移和挠度，N_r，M_r——扁壳径向力和径向弯矩。将（1.3）和（1.2）代入（1.1），可得，当$r=a$时

$$\begin{bmatrix} u_r \\ \dfrac{dw}{dr} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_r \\ M_r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1^* \\ k_2^* \end{bmatrix}q_0 \tag{1.4}$$

注意到[1]

$$\left.\begin{aligned} u_r&=\frac{r}{Eh}\left[\frac{d(rN_r)}{dr}-\nu N_r\right] \\ M_r&=-D\left[\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right] \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

式中，E，ν——弹性常数，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$。将 (1.5) 代入 (1.4)，可得

当 $r=a$ 时

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2w}{dr^2}+\left(\frac{\nu}{a}+\frac{1}{Dk_{22}}\right)\frac{dw}{dr}=\frac{1}{D}\frac{k_{21}}{k_{22}}N_r+\frac{k_2^*}{Dk_{22}}q_0 \\ &\frac{d(rN_r)}{dr}-\left[\nu+\frac{Eh}{a}\left(k_{11}-\frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\right)\right]N_r \\ &\quad=\frac{Eh}{a}\left[\frac{k_{12}}{k_{22}}\frac{dw}{dr}+\left(k_1^*-\frac{k_2^*k_{12}}{k_{22}}\right)q_0\right] \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

我们将在混合边界条件 (1.6) 下求解扁壳部分的大挠度变形。这样，我们就将边界条件与连接条件结合了起来，将组合结构问题转化为单一结构的混合边值问题。(1.4)或(1.6)式中，由 k_{ij}，k_i^* 的特别取值可以给出普通边界条件。比如，令 $k_i^*=0$，$k_{12}=k_{21}=0$，给出普通弹性支撑；对于 k_{11}，k_{22} 的特定取值可以给出固定、铰支、简支等各种常见边界。因此，本文解答也包括普通边界条件的结果。

二、基 本 方 程

引入无量纲量

$$\left.\begin{aligned} &x=r/a,\ \ W=\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{w}{h},\ \ V=\frac{dW}{dx} \\ &S_r=-12(1-\nu^2)\frac{a^2}{Eh^3}xN_r,\ \ k=\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{a\overline{V}_0}{h} \\ &p=[12(1-\nu^2)]^{3/2}\frac{a^4}{Eh^4}q_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

式中，r——向径，a——底面半径，h——壳厚，$\overline{V}_0$——壳体形状参数。则弹性扁壳轴对称大挠度问题的基本方程可写做[1]

$$\left.\begin{aligned} &x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xV)=pp_0(x)-kf(x)S_r-S_rV \\ &x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xS_r)=kf(x)V+\frac{1}{2}V^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

式中

$p_0(x)$——荷载分布函数，$f(x)$——扁壳形状函数。

边界条件（1.6）可写做，当 $x=1$ 时

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV}{dx}+\nu_1 V=\nu_3 S_r+\nu_5 p\\&\frac{dS_r}{dx}-\nu_2 S_r=\nu_4 V+\nu_6 p\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\nu_1=\nu+\frac{a}{Dk_{22}},\qquad \nu_2=\nu+\frac{Eh}{a}\left(k_{11}-\frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\right)\\&\nu_3=-\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{k_{21}}{hk_{22}},\quad \nu_4=-\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{k_{12}}{hk_{22}}\\&\nu_5=\frac{k_2^*}{a^2k_{22}},\qquad \nu_6=-Eh^2\sqrt{12(1-\nu^2)}\left(k_1^*-\frac{k_2^*k_{12}}{k_{22}}\right)/a^3\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

以及 $x=0$ 点条件

$$V=0,\quad S_r=0\tag{2.5}$$

混合边值问题（2.2）、（2.3）和（2.5）可以化为积分方程．直接积分（2.2）式，并用（2.3）和（2.5）式确定积分常数，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&V=pV_0+\int_0^1 K_1F_1dy-f_2x\int_0^1 F_2ydy\\&S_r=pS_0+\int_0^1 K_2F_2dy-f_2'x\int_0^1 F_1ydy\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}&V_0=\int_0^1 K_1p_0(y)dy+f_3x\\&S_0=-f_2'x\int_0^1 p_0(y)ydy+f_3'x\\&F_1=-kfS_r-S_rV,\quad F_2=kfV+V^2/2\\&K_1=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(xy^{-1}+f_1xy) & (x\leqslant y\leqslant 1)\\[2ex]-\dfrac{1}{2}(x^{-1}y+f_1xy) & (0\leqslant y\leqslant x)\end{cases}\\&K_2=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(xy^{-1}+f_1'xy) & (x\leqslant y\leqslant 1)\\[2ex]-\dfrac{1}{2}(x^{-1}y+f_1'xy) & (0\leqslant y\leqslant x)\end{cases}\\&f_1=\frac{(1-\nu_1)(1-\nu_2)+\nu_3\nu_4}{(1+\nu_1)(1-\nu_2)-\nu_3\nu_4},\quad f_1'=\frac{(1+\nu_1)(1+\nu_2)+\nu_3\nu_4}{(1+\nu_1)(1-\nu_2)-\nu_3\nu_4}\\&f_2=\frac{\nu_3}{(1+\nu_1)(1-\nu_2)-\nu_3\nu_4},\quad f_2'=\frac{\nu_4}{(1+\nu_1)(1-\nu_2)-\nu_3\nu_4}\\&f_3=\frac{\nu_5(1-\nu_2)+\nu_3\nu_6}{(1+\nu_1)(1-\nu_2)-\nu_3\nu_4},\quad f_3'=\frac{\nu_6(1+\nu_1)+\nu_4\nu_5}{(1-\nu_2)(1+\nu_1)-\nu_3\nu_4}\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

非线性积分方程（2.6）与边值问题（2.2）、（2.3）、（2.5）等价，其中积分核K_1、K_2是对称连续核。

三、摄 动 解

扁壳无量纲中心挠度

$$W_0=\int_1^0 V dx \tag{3.1}$$

将（2.6）式代入上式，得

$$W_0=e_0 p+\int_0^1 G_1 F_1 dy+\frac{f_2}{2}\int_0^1 F_2 y dy \tag{3.2}$$

式中

$$e_0=-\frac{f_3}{2}+\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1+f_1}{4}x\right)p_0 dx$$

$$G_1=-y\ln y/2+y(1+f_1)/4$$

我们将用正规摄动方法求解方程组（2.6），取W_0为摄动参数。设

$$p=\sum_{n=1}^{N}e_n W_0^n,\quad V=\sum_{n=1}^{N}V_n W_0^n,\quad S_r=\sum_{n=1}^{N}S_{rn}W_0^n \tag{3.3}$$

式中，e_n，V_n，S_{rn}待定，N为摄动次数。将（3.3）式代入方程组（2.6），比较W_0同次幂的系数，可得

$$\left.\begin{aligned}
V_1&=e_1V_0-k\int_0^1 K_1 S_{r1}ydy-kf_2x\int_0^1 V_1 y^2 dy\\
S_{r1}&=e_1S_0+k\int_0^1 K_2 V_1 ydy+kf_2'x\int_0^1 S_{r1}y^2 dy\\
V_n&=e_nV_0-k\int_0^1 K_1 S_{rn}ydy-kf_2x\int_0^1 V_n y^2 dy\\
&\quad-\int_0^1 K_1 F_{1n}dy-\frac{f_2}{2}x\int_0^1 F_{2n}ydy\\
S_{rn}&=e_nS_0+k\int_0^1 K_2 V_n ydy+kf_2'x\int_0^1 S_{rn}y^2 dy\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^1 K_2 F_{2n}dy+f_2'x\int_0^1 F_{1n}ydy\\
&\qquad(n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

将（3.3）代入（3.2）式，比较W_0同次幂系数，可得确定e_n的方程组

$$\left.\begin{aligned}
1&=e_0e_1-k\int_0^1 G_1 S_{r1}ydy+\frac{k}{2}f_2\int_0^1 V_1 y^2 dy\\
0&=e_0e_n-k\int_0^1 G_1 S_{rn}ydy+\frac{k}{2}f_2\int_0^1 V_n y^2 dy\\
&\quad-\int_0^1 G_1 F_{1n}dy+\frac{f_2}{4}\int_0^1 F_{2n}ydy\\
&\qquad(n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

由（3.4）和（3.5）可以逐次计算e_n，V_n和S_{rn}，计算步骤如下，令

$$
\left.
\begin{aligned}
&V_1^*=V_0-k\int_0^1 K_1S_{r1}^*ydy-kf_2x\int_0^1 V_1^*y^2dy\\
&S_{r1}^*=S_0+k\int_0^1 K_2V_1^*ydy+kf_2'x\int_0^1 S_{r1}^*y^2dy\\
&V_n^*=-k\int_0^1 K_1S_{rn}^*ydy-kf_2x\int_0^1 V_n^*y^2dy\\
&\qquad -\int_0^1 K_1F_{1n}dy-\frac{f_2}{2}x\int_0^1 F_{2n}ydy\\
&S_{rn}^*=k\int_0^1 K_2V_n^*ydy+kf_2'x\int_0^1 S_{rn}^*y^2dy\\
&\qquad +\frac{1}{2}\int_0^1 K_2F_{2n}dy+f_2'x\int_0^1 F_{1n}ydy\\
&\qquad\qquad (n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.6}
$$

则有

$$
\left.
\begin{aligned}
&V_1=e_1V_1^*, &&S_{r1}=e_1S_{r1}^*\\
&V_n=e_nV_1^*+V_n^*, &&S_{rn}=e_nS_{r1}^*+S_{rn}^*
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.7}
$$

以及

$$
\left.
\begin{aligned}
&e_1=\left(e_0-k\int_0^1 G_1S_{r1}^*ydy+\frac{f_2}{2}k\int_0^1 V_1^*y^2dy\right)^{-1}\\
&e_n=e_1\Big(k\int_0^1 G_1S_{rn}^*ydy-\frac{k}{2}f_2\int_0^1 V_n^*y^2dy\\
&\qquad +\int_0^1 G_1F_{1n}dy-\frac{f_2}{4}\int_0^1 F_{2n}ydy\Big)\\
&\qquad\qquad (n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.8}
$$

(3.6)～(3.8)构成逐次计算e_n，V_n，S_{rn}的线性积分方程组，便于数值计算。

四、内　　力

引入无量纲量

$$
m_r=-\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{a^2}{Dh}M_r,\quad m_t=-\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{a^2}{Dh}M_t,\quad S_t=-\frac{a^2N_t}{D}
\tag{4.1}
$$

式中，M_t——环向弯矩，N_t——环向薄膜力．则有[1]

$$
m_r=dV/dx+\nu V/x,\quad m_t=V/x+\nu dV/dx,\quad S_t=dS_r/dx
\tag{4.2}
$$

设m_r，m_t，S_t可展为

$$
m_r=\sum_{n=1}^N m_{rn}W_0^n,\quad m_t=\sum_{n=1}^N m_{tn}W_0^n,\quad S_t=\sum_{n=1}^N S_{tn}W_0^n
\tag{4.3}
$$

由（3.3），（3.4），（4.2）和（4.3）可计算得

$$\left.\begin{aligned}
m_{r1}&=e_1m_{r0}-k\int_0^1 L_1S_{r1}ydy-kf_2(1+\nu)\int_0^1 V_1y^2dy\\
m_{t1}&=e_1m_{t0}-k\int_0^1 L_2S_{r1}ydy-kf_2(1+\nu)\int_0^1 V_1y^2dy\\
S_{t1}&=e_1S_{t0}+k\int_0^1 L_3V_1ydy+kf_2'\int_0^1 S_{r1}y^2dy\\
m_{rn}&=e_nm_{r0}-k\int_0^1 L_1S_{rn}ydy-kf_2(1+\nu)\int_0^1 V_ny^2dy\\
&\quad-\int_0^1 L_1F_{1n}dy-\frac{1+\nu}{2}f_2\int_0^1 F_{2n}ydy\\
m_{tn}&=e_nm_{t0}-k\int_0^1 L_2S_{rn}ydy-k(1+\nu)f_2\int_0^1 V_ny^2dy\\
&\quad-\int_0^1 L_2F_{1n}dy-\frac{1+\nu}{2}f_2\int_0^1 F_{2n}ydy\\
S_{tn}&=e_nS_{t0}+k\int_0^1 L_3V_nydy+f_2'k\int_0^1 S_{rn}y^2dy\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^1 L_3F_{2n}dy+f_2'\int_0^1 F_{1n}ydy\\
&\qquad\qquad(n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)
\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
m_{r0}&=\int_0^1 L_1p_0(y)dy+f_3(1+\nu)\\
m_{t0}&=\int_0^1 L_2p_0(y)dy+f_3(1+\nu)\\
S_{t0}&=-f_2'\int_0^1 p_0(y)ydy+f_2'\\
L_1&=\begin{cases}-\dfrac{1+\nu}{2}(y^{-1}+f_1y) & (x\leqslant y\leqslant 1)\\[2mm] -\dfrac{1+\nu}{2}\left(\dfrac{1-\nu}{1+\nu}yx^{-2}+f_1y\right) & (0\leqslant y\leqslant x)\end{cases}\\
L_2&=\begin{cases}-\dfrac{1+\nu}{2}(y^{-1}+f_1y) & (x\leqslant y\leqslant 1)\\[2mm] -\dfrac{1+\nu}{2}\left(\dfrac{1-\nu}{1+\nu}x^{-2}y+f_1y\right) & (0\leqslant y\leqslant x)\end{cases}\\
L_3&=\begin{cases}-(y^{-1}+f_1'y)/2 & (x\leqslant y\leqslant 1)\\ -(-yx^{-2}+f_1'y)/2 & (0\leqslant y\leqslant x)\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

如果解（3.3）已求得，则可按上述诸式计算内力。

五、误差估计

我们直接采用方程组（2.6）和方程（3.2）的残数作为解（3.3）的准确度的度量。定义残数

$$\left.\begin{aligned} R_V&=V-pV_0-\int_0^1 K_1F_1dy+f_2x\int_0^1 F_2y\,dy\\ R_S&=S_r-pS_0-\int_0^1 K_2F_2dy+f_2'x\int_0^1 F_1y\,dy\\ R_W&=W_0-\varrho_0p-\int_0^1 G_1F_1dy-\frac{f_2}{2}\int_0^1 F_2y\,dy \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

将（3.3）代入（5.1），并注意到（3.4）和（3.5）式，我们得到

$$\left.\begin{aligned} R_V=&-\int_0^1 K_1\Big(\sum_{i+j=N+1}^{2N} V_iS_{rj}W_0^{i+j}\Big)dy\\ &-\frac{f_2}{2}x\int_0^1\Big(\sum_{i+j=N+1}^{2N} V_iV_jW_0^{i+j}\Big)ydy\\ R_S=&\frac{1}{2}\int_0^1 K_2\Big(\sum_{i+j=N+1}^{2N} V_iV_jW_0^{i+j}\Big)dy\\ &+f_2'x\int_0^1\Big(\sum_{i+j=N+1}^{2N} V_iS_{rj}W_0^{i+j}\Big)ydy\\ R_W=&-\int_0^1 G_1\Big(\sum_{i+j=N+1}^{2N} V_iS_{rj}W_0^{i+j}\Big)dy\\ &+\frac{f_2}{4}\int_0^1\Big(\sum_{i+j=N+1}^{2N} V_iV_jW_1^{i+j}\Big)ydy \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

为应用上方便，可取R_V，R_S的某一种平均值或某种适当组合作为解的误差估计[2,3]。特别是R_W可以用作弹性特征的误差估计。

六、算 例

作为本文结果的应用，考虑扁球壳和圆柱壳组合问题的一个算例。荷载为内压，即q_0为常数，并设柱壳与球壳有相同的E，ν和h。此时，（2.2）式中

$$p_0(x)=-x^2/2,\qquad f(x)=x \tag{6.1}$$

（2.1）式中

$$\overline{V}_0=a/R \tag{6.2}$$

式中，R——球壳半径。

容易算得（1.4）式约束系数值为[4]

$$\left.\begin{aligned}
&k_{11}=-2[3(1-\nu)]^{1/4}\left(\frac{a}{h}\right)^{3/2}/E\\
&k_{12}=-k_{21}=\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh}\left(\frac{a}{h}\right)\\
&k_{22}=\frac{4[3(1-\nu^2)]^{3/4}}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^{1/2}\\
&k_1^*=\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{a^2}{Eh},\quad k_2^*=0
\end{aligned}\right\}\tag{6.3}$$

代入（2.4）式，得

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_1=\nu+[3(1-\nu^2)]^{1/4}(a/h)^{1/2}\\
&\nu_2=\nu-[3(1-\nu^2)]^{1/4}(a/h)^{1/2}\\
&\nu_3=-\nu_4=[3(1-\nu^2)]^{1/4}(a/h)^{1/2}\\
&\nu_5=0,\quad \nu_6=(\nu-2)[3(1-\nu^2)]^{1/2}a/h
\end{aligned}\right\}\tag{6.4}$$

取摄动次数$N=5$, $a/h=0.01$, $a/R=1/4$, $\nu=1/3$在表1～5中分别列出了e_n, S_{rn}, S_{tn}, m_{rn}, m_{tn}的计算结果。根据这些结果，由（3.3）和（4.3）式便可计算出一定荷载下的W_0和内力值。这些结果可进一步用于强度及稳定性问题研究。

表 1 系 数 e_n

n	1	2	3	4	5
e_n	0.41246×10^3	-0.64490	-0.82414×10^{-2}	-0.15784×10^{-3}	-0.37996×10^{-5}

表 2 系 数 S_{rn}

x	0.047	0.231	0.500	0.769	0.953
$n=1$	0.13972	0.64690	0.12569×10	0.17098×10	0.86482
$n=2$	0.88400×10^{-5}	0.46560×10^{-4}	0.53617×10^{-3}	0.57408×10^{-2}	-0.40604×10^{-2}
$n=3$	-0.43400×10^{-5}	-0.19590×10^{-4}	-0.25090×10^{-4}	0.93470×10^{-4}	-0.52550×10^{-4}
$n=4$	-0.12000×10^{-6}	-0.53000×10^{-6}	-0.70000×10^{-6}	0.19000×10^{-5}	-0.95000×10^{-6}
$n=5$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 3　　系　数 S_{tn}

x	0.047	0.231	0.500	0.769	0.953
$n=1$	0.29784×10	0.27834×10	0.23596×10	0.17967×10	-0.40086×10
$n=2$	0.12316×10^{-1}	0.12330×10^{-1}	0.13671×10^{-1}	0.28941×10^{-1}	-0.35945×10^{-1}
$n=3$	0.46012×10^{-4}	0.54230×10^{-4}	0.10707×10^{-3}	0.51122×10^{-3}	-0.57686×10^{-3}
$n=4$	0.20332×10^{-7}	0.21397×10^{-6}	0.15575×10^{-5}	0.10612×10^{-4}	-0.11496×10^{-4}
$n=5$	-0.12660×10^{-8}	0.31876×10^{-8}	0.39158×10^{-7}	0.24081×10^{-6}	-0.26045×10^{-6}

表 4　　系　数 m_{rn}

x	0.047	0.231	0.500	0.769	0.953
$n=1$	-0.20706×10	0.13966×10	0.90074×10	0.15317×10^{2}	0.14565×10^{2}
$n=2$	-0.39646×10^{-2}	-0.15855×10^{-2}	-0.10915×10^{-1}	-0.46630×10^{-1}	-0.17921×10^{-1}
$n=3$	0.10349×10^{-4}	-0.18673×10^{-5}	-0.95844×10^{-4}	-0.74565×10^{-3}	0.11375×10^{-4}
$n=4$	0.12347×10^{-3}	0.10587×10^{-6}	-0.16205×10^{-3}	-0.15444×10^{-4}	0.26289×10^{-5}
$n=5$	0.42346×10^{-7}	0.36505×10^{-8}	-0.44748×10^{-7}	-0.36665×10^{-6}	0.69251×10^{-7}

表 5　　系　数 m_{tn}

x	0.047	0.231	0.500	0.769	0.953
$n=1$	-0.21462×10	-0.39663	0.22144×10	0.39618×10	0.37030×10
$n=2$	-0.38463×10^{-2}	0.90248×10^{-3}	-0.87985×10^{-3}	-0.20164×10^{-1}	-0.80472×10^{-2}
$n=3$	0.11860×10^{-4}	0.31653×10^{-4}	0.28036×10^{-4}	-0.34226×10^{-3}	-0.61146×10^{-3}
$n=4$	0.12637×10^{-5}	0.78412×10^{-6}	0.74841×10^{-6}	-0.72395×10^{-5}	0.89061×10^{-6}
$n=5$	0.43043×10^{-7}	0.20443×10^{-7}	0.13729×10^{-7}	-0.17217×10^{-6}	0.24756×10^{-7}

按 $\Delta=|R_W/W_0|$ 估计了弹性特征误差，R_W 按(5.2)计算，并取 $W_0=5$ ($W_0/h=1.53$)，结果是 $\Delta=0.27\times10^{-2}$ 精度是足够的。

本文计算是在 COROMEMCO SYSTEM-Ⅱ型微机上完成的。

参 考 文 献

[1] Феодосьев В. И., *Упругие Элементы Точного Приборостроения*, Оборонгиз(1949).
[2] 陈山林，圆板大挠度的钱伟长解及其渐近特性，应用数学和力学，3，4 (1982)，513—518.
[3] 陈山林，板和扁壳大挠度问题摄动参数的最小二乘法选择，上海国际非线性力学会议论文集，上海，(1985).
[4] 刘人怀、陈山林，椭球封头中心开孔接管的强度问题，兰州大学科技专刊，1 (1973)，14—28.

The Method of Mixed Boundary Condition for a Kind of Linear and Nonlinear Composite Structure

Chen Shan-lin

(Chongqing Institute of Architecture and Engr., Chongqing)

Zhang Li-ying

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing)

Abstract

This paper deals with the axisymmetrical deformation of shallow shells in large deflection, which are in conjunction with linear elastic structures at the boundary. A method of mixed boundary condition for this problem is introduced, then the problem of a composite structure is transformed into a problem of a single structure and the integral equations are given. The perturbation method is used to obtain the solutions and an example of composite structure consisting of a shallow spherical and a cylindrical shell is presented.