应用数学和力学，第7卷第3期（1986年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性地基上双曲率扁壳的优化设计问题

成 祥 生

（同济大学，1983年4月28收到）

摘 要

本文讨论位于弹性地基上的双曲率扁壳优化设计的一个方法。其实质是取扁壳的初始挠曲函数作为待求的控制函数或设计变量，以载荷的势能作为判定双曲率扁壳优化设计的质量准则，故势能泛函即为目标函数，而优化条件及等周条件均作为约束条件，从而得到本问题优化设计的必要条件。同时引入一共轭函数，最后将问题归结为求解共轭函数的微分方程及初始挠曲函数两个边值问题。

一、方 法

有关结构的优化设计在文献[1]～[5]，[9]中已有较多阐述。今讨论在弹性地基上的双曲率扁壳优化设计的一个方法。设有一位于弹性地基上的等厚双曲率扁壳，矩形底，四边简支，底面取作坐标平面xOy，z轴向下，该壳体受横向载荷$Z(x,y)$作用而弯曲，设弹性地基的基床系数为k。若预先给壳体一个初始挠曲，其挠曲形状用函数$f(x,y)$表示，它是在没有外载荷和地基反力的作用之下壳体的初始挠曲函数。又设$w(x,y)$是壳体在外载荷及地基反力作用之下其中曲面的法向位移。设它从初始挠曲面算起，于是壳体的总挠度应为$w(x,y)+f(x,y)$，而对应的地基总反力应是$k[w+f]$。因此，对四边简支的预弯双曲率扁壳的基本方程和边界条件是[6][7]

$$\left.\begin{aligned} &Lw=D\nabla^4w=\nabla_K^2\phi+Z-k(w+f)\\ &L\phi=D\nabla^4\phi=-EtD\nabla_K^2w\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

$$\phi=\nabla^2\phi=0,\ w=\nabla^2w=0\qquad(\text{在周边上})\tag{1.2}$$

其中L为由上式所定义的线性微分算子，∇^4为双谐算子，$\nabla_K^2=K_y\partial^2/\partial x^2+K_x\partial^2/\partial y^2$，而$K_x$，$K_y$为壳体沿$x$、$y$方向的主曲率，设它为常数，$\phi$为内力函数，$E$为弹性模量，$t$为壳厚，$D$为弯曲刚度，$\nabla^2$为拉普拉斯算子。

设扁壳预弯后中曲面的面积为A，可由初始挠曲函数$f(x,y)$来表示，构成所谓等周条件

$$\int_0^a\int_0^b\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy=A$$

其中a、b为扁壳底边沿x、y轴方向的长度，因此底面积为ab，若考虑到变形微小，将上

* 钱伟长推荐。

式根号展为泰勒级数，略去二阶及二阶以上的微量，则上式可简化为

$$\int_0^a\int_0^b (f_x^2+f_y^2)\,dxdy=2(A-ab) \tag{1.3}$$

$f(x,y)$ 既是中曲面的初始挠曲函数，它应满足如下的边界条件

$$f(x,y)=0 \qquad (\text{在周边上}) \tag{1.4}$$

由上述可知，初始挠曲函数$f(x,y)$必须满足等周条件 (1.3) 及边界条件 (1.4)，我们将$f(x,y)$作为待求的所谓控制函数或设计变量。

本文所论的弹性地基上的双曲率扁壳的优化设计问题，就是找满足(1.3)，(1.4)的控制函数$f(x,y)$及解边界值问题(1.1)、(1.2)，从而求出挠度函数$w(x,y)$及内力函数$\phi(x,y)$，但必须满足如下的积分式

$$I=\int_0^a\int_0^b Z(x,y)\,w(x,y)\,dxdy \tag{1.5}$$

取极小值，该积分在数量上等于载荷的势能。我们将 (1.5) 作为判定双曲率扁壳优化设计质量的准则，故势能泛函即为目标函数，从而可得到优化条件。为此，先将上式极小化泛函进行一阶变分，于是有

$$\delta I=\int_0^a\int_0^b Z(x,y)\,\delta w(x,y)\,dxdy \tag{1.6}$$

进一步将出现在上式中的挠度函数w的变分δw用控制函数f的变分 δf 来表示，为此，先将基本方程 (1.1) 写成变分形式

$$\left.\begin{aligned}&L\delta w-\nabla_K^2(\delta\phi)+k\delta w+k\delta f=0\\&L\delta\phi+EtD\nabla_K^2(\delta w)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

然后再引入一个与w的边值问题共轭的函数 $\psi(x,y)$[8]，设它也满足边界条件 (1.2)。将$\psi(x,y)$与$\phi(x,y)$分别乘到(1.7) 的左边，并在全部底面积的区域内进行积分，即

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b \psi(x,y)[L\delta w-\nabla_K^2(\delta\phi)+k\delta w+k\delta f]dxdy=0\\&\int_0^a\int_0^b \phi(x,y)[L\delta\phi+EtD\nabla_K^2(\delta w)]dxdy=0\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

将上两式进行分部积分，同时考虑到函数$w(x,y)$，$\phi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 都具有同样的边界条件(1.2)，这样，可以得到

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b (L\psi+k\psi)\,\delta w dxdy-\int_0^a\int_0^b \nabla_K^2\psi\delta\phi dxdy+\int_0^a\int_0^b k\psi\delta f dxdy=0\\&\frac{1}{EtD}\int_0^a\int_0^b L\phi\delta\phi dxdy+\int_0^a\int_0^b \nabla_K^2\phi\delta w dxdy=0\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

将上两式相减，得到

$$\int_0^a\int_0^b (L\psi-\nabla_K^2\phi+k\psi)\,\delta w dxdy-\frac{1}{EtD}\int_0^a\int_0^b (L\phi$$

$$+EtD\nabla_K^2\psi)\,\delta\phi dxdy+\int_0^a\int_0^b k\psi\delta f dxdy=0 \tag{1.10}$$

对于(1.6)的δI，当考虑到(1.10)之后，可写成如下的和式

$$\delta I=\int_0^a\int_0^b (L\psi-\nabla_K^2\phi+k\psi+Z)\,\delta w dxdy-\frac{1}{EtD}\int_0^a\int_0^b (L\phi$$

$$+EtD\nabla_K^2\psi)\,\delta\phi dxdy+\int_0^a\int_0^b k\psi\delta f dxdy \tag{1.11}$$

对于求解共轭函数$\psi(x,y)$而言，它和解下列边界值问题

$$\left.\begin{aligned}&L\psi-\nabla_K^2\phi+k\psi=-Z\\&L\phi+EtD\nabla_K^2\psi=0\\&\psi=\Delta\psi=0,\ \phi=\Delta\phi=0\quad(\text{在周边上})\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

是一样的。

其中L为仍由(1.1)所定义的线性微分算子。

对于(1.11)，当考虑到(1.12)之后，则(1.11)的前两个积分为零。于是我们得到用控制函数$f(x,y)$的变分来表示的极小化泛函I的一阶变分式

$$\delta I=\int_0^a\int_0^b k\psi\delta f dxdy \tag{1.13}$$

出现在上式中的控制函数f的一阶变分δf可通过等周条件(1.3)得到应满足如下的条件

$$\int_0^a\int_0^b (f_x\delta f_x+f_y\delta f_y)\,dxdy=0 \tag{1.14}$$

上式经分部积分，并利用$f(x,y)$所应满足的边界条件(1.4)可得到

$$\int_0^a\int_0^b \nabla^2 f\delta f dxdy=0 \tag{1.15}$$

由于泛函I取极小值的必要条件是

$$\delta I=0 \tag{1.16}$$

将(1.13)代入上式，并利用拉格朗日乘子将(1.15)与(1.16)联系起来，可得到下列优化条件

$$\nabla^2 f=\lambda\psi \tag{1.17}$$

上式中的乘子λ可由等周条件(1.3)求出，(1.3)式中的k已包含在λ之内。

综上所述，可知对于求预弯双曲率扁壳的初始挠曲函数$f(x,y)$归结为求两组边值问题。第一组边值问题就是求(1.12)的共轭函数$\psi(x,y)$及内力函数$\phi(x,y)$。第二组边值问题是在边界条件(1.4)之下求(1.17)的控制函数$f(x,y)$的解。

实际上，我们所述的双曲率扁壳优化设计问题的第一组边值问题，是在没有初始挠曲，即$f(x,y)=0$的情形下，而壳体只是在受到负向横向载荷$(-Z)$作用时，求位于弹性地基上的双曲率扁壳的解答。而第二组边值问题是相当于在边界条件(1.4)之下求二维的泊松方程(1.17)的狄里赫莱问题的解答。

二、算　例

下面我们用例子来说明弹性地基上双曲率扁壳的优化设计问题。设有一等厚双曲率扁壳，矩形底，四边简支，沿x、y轴的底边长分别是a和b，受均布载荷q_0作用。现在先讨论第一组边值问题，即求对应于(1.12)的共轭函数ψ。该微分方程在对应的边界条件之下的解答是

$$\psi(x,y)=\sum_m\sum_n\psi_{mn}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y \tag{2.1}$$

其中

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a},\quad \beta_n=\frac{n\pi}{b},\quad \psi_{mn}=-\frac{16q_0}{\pi^2}\tilde{\psi}_{mn} \tag{2.2}$$

$$\tilde{\psi}_{mn}=\frac{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}{mn(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2[D(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2+k]+Et(K_y\alpha_m^2+K_x\beta_n^2)^2} \tag{2.3}$$

$$(m,\ n=1,\ 3,\ 5,\cdots)$$

再讨论第二组边值问题，即求对应于方程(1.17)及边界条件(1.4)的控制函数$f(x,y)$的解。为此，先将既求出的$\psi(x,y)$代入(1.17)，并考虑到边界条件(1.4)。设$f(x,y)$的解取下列形式

$$f(x,y)=\sum_m\sum_n f_{mn}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y \tag{2.4}$$

在(1.17)中的λ可利用等周条件(1.3)求出，然后可求出对应的系数

$$f_{mn}=-\frac{2\sqrt{2}(A-ab)\psi_{mn}}{\sqrt{ab}(\alpha_m^2+\beta_n^2)\sqrt{\sum\limits_m\sum\limits_n\frac{\psi_{mn}^2}{\alpha_m^2+\beta_n^2}}} \tag{2.5}$$

$$(m,\ n=1,\ 3,\ 5,\cdots)$$

弹性地基上双曲率扁壳的挠度函数$w(x,y)$及内力函数$\phi(x,y)$可由解基本方程(1.1)、(1.2)而得，其解答为

$$\left.\begin{aligned}w(x,y)&=\sum_m\sum_n w_{mn}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y\\ \phi(x,y)&=\sum_m\sum_n \phi_{mn}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

其中

$$w_{mn}=\left(\frac{16q_0}{\pi^2 mn}-kf_{mn}\right)mn\tilde{\psi}_{mn} \tag{2.7}$$

$$\phi_{mn}=Et\left(\frac{16q_0}{\pi^2 mn}-kf_{mn}\right)\frac{K_y\alpha_m^2+K_x\beta_n^2}{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}mn\tilde{\psi}_{mn} \tag{2.8}$$

$$(m,\ n=1,\ 3,\ 5,\cdots)$$

而$\tilde{\psi}_{mn}$及f_{mn}由(2.3)及(2.5)确定。

对应的泛函是

$$I=\frac{4ab}{\pi^2}q_0\sum_m\sum_n\frac{w_{mn}}{mn}\qquad(m,\ n=1,\ 3,\ 5,\cdots) \tag{2.9}$$

上面已对弹性地基上的双曲率扁壳的优化设计问题获得了双三角级数的解答，从已得的结果可看出：优化泛函I是载荷q_0的二次函数，故对载荷而言，I必有一极小值，在本问题中，当载荷取值

$$q_0=\frac{\pi^2}{32}k\frac{\sum\limits_m\sum\limits_n f_{mn}\widetilde{\psi}_{mn}}{\sum\limits_m\sum\limits_n(\widetilde{\psi}_{mn}/mn)}\qquad(m,\ n=1,\ 3,\ 5,\cdots)\tag{2.10}$$

时，I将具有一极小值。由于在上式中f_{mn}内包含了参数A，于是由(2.10)便建立了载荷q_0与A的依从关系，这样我们便可以从已给定的载荷去求出包含在等周条件(1.3)中的参数A。由于I取极小值，故所设计的弹性地基上的双曲率扁壳将具有最大的刚性。

参 考 文 献

[1] Haug, E. J. and J. S. Arora, *Applied Optimal Design*, New York, John Wiley (1979).

[2] Баничук Н. В., Оптимизация форм упругих тел, М. Наука (1980).

[3] Niordson, F. I. and P. Pedersen, A review of optimal structural design, *The Technical University of Denmark, DCAMM, Report*, 31 (1972).

[4] 钱令希等, *Selected Papers on Structural Optimization*, (1979).

[5] Sheu, C. Y. and W. Prager, Recent developments in optimal structural design, *Appl. Mech. Revs.*, **21**, 10 (1968).

[6] 杨炳乾,《薄壳理论》，中国铁道出版社 (1981).

[7] Власов В. З., *Общая Теория Оболочек и её Приложения в Технике*, Гостехиздат (1949).

[8] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., «Наука» (1976).

[9] Баничук Н. В. и А. Д. Ларичев, *МТТ*, 4 (1981), 134—139.

On Problems of Optimal Design of Shallow Shell with Double Curvature on Elastic Foundation

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

The present paper discusses a method of optimal design of the shallow shell with double curvature on the elastic foundation. Substantially we take the initial flexural function as the control function or design variable which will be found and the potential energy of the external loads as the criterion of quality of the optimal design of the shallow shell with double curvature, therefore the functional of the potential energy will be aim function. The optimal conditions and the isoperimetric conditions belong to the constrained conditions, thus we obtain the necessary conditions of the optimal design for the given problems, at the same time the conjugate function is introduced, then the problems are reduced to the solutions of two boundary value problems for the differential equation of conjugate function and the initial flexural function.