应用数学和力学，第7卷第3期（1986年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

变换函数Φ及KUR空间存在固定点的条件*

谷 安 海

（郑洲铝厂，1984年10月5日收到）

摘 要

近年来，在研究外延Banach空间性质上取得了进展的有：1979年Suillivan讨论实$L^p(x)$空间性质并采用二维子空间的一致状态，定义了KUR空间的概念；1980年Huff讨论用序列定义的广义一致凸性，引用了NUC空间的概念；1982年俞鑫泰断言：KUR空间就是NUC空间的证明[1]。

而值得注意的是Suillivan 及Huff又分别提出了十分有趣的问题如下：是否每一个上自反空间都存在一个不动点[2]？及在什么条件下$L^p(x)$空间是NUC空间[3]？

本文旨在研究变换函数的性质[4]及其与上述两个问题的关系。

一、引 言

在研究变换函数的性质并用其求解实际问题，如给定两个方程：

$$f''(x)+f(x)=\sigma(x)f(x) \tag{1.1a}$$

$$f(x)=\cos(x-a)+\int_a^x \sin(x-t)\sigma(t)f(t)\,dt \qquad (a\leqslant t\leqslant x\leqslant b) \tag{1.1b}$$

在闭区间上的初始条件是$f(a)=1$及$f'(a)=0$且$\sigma(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，则(1.1a)及(1.1b)有公共的全解。于是知二阶微分方程的求解变换为积分方程的求值是可能的，但其积分运算是困难的。若用$u(x)=\cos(x-a)$及$k(x,t)=\sin(x-t)\sigma(t)$替换(1.1b)中的对应项，则得

$$f(x)=u(x)+\int_a^x k(x,t)f(t)\,dt \tag{1.2}$$

显然，上式为著名的Volterra第二类积分方程。若给定连续函数u及k（积分核），则积分运算是不难的。

若设$Kf=\int_a^x k(x,t)f(t)\,dt$，则(1.2)简化为代数型

$$f=u+Kf \tag{1.3}$$

*钱伟长推荐.

式中K为算子。故知(1.3)的代数运算等价于(1.1a)的求解。

若给定一个原始函数f_0，由(1.3)知，当f_0乘上K加上u后可出现两种情况：(i)得原始函数本身，即$u+Kf_0=f_0$；(ii)得不同于原始函数的另一函数f_1，即$u+Kf_0=f_1$。后者由f_1可得$u+Kf_1=f_2$。继续这一过程可导出一个序列空间$\{f_n\}$，其为连续函数的一切子序列的集。它的一般项为

$$f_n=u+Kf_{n-1}=u+Ku+\cdots+K^{n-1}u+K^nf_0 \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.4}$$

若$f_n\to f_{(n\to\infty)}$，则上式表明：对于任一个f_n来说，f_n较f_{n-1}更为接近于(1.1a)的真解。

若记$\|u(x)\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|$，$|Ku|\leqslant M\|u\|$，则有$|Ku|=\int_a^x|\sin(x-t)\sigma(t)\cos(x-t)|dt$ $\leqslant\|\sigma\|\ (b-a)\ \sin^2\ (x-a)/2$ 时，可导出$|K^nu|\leqslant\|\sigma\|^n\ (b-a)^n\ \sin^n\ (x-a)/n!$，就知：$\sum\limits_1^\infty\|K^nu\|=\exp[\|\sigma\|(b-a)\sin(x-a)]\leqslant M\exp[\sin(x-a)]<\infty$成立。如上述无疑，则其含意即：若$f(x)$为柯西子序列，则$\{f_n\}$就是一致收敛（几乎处处）的序列空间，因而(1.1a)及(1.1b)的全解存在[5]。

二、记 号 和 定 理

设$X+Y$及$X-Y$分别表示一切$x+y$的和集及一切$x-y$的差集（$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$）[6]。Conv (E)表示E的凸生成基，其定义为一切有限和$\sum a_ix_i$的集（每一个$a_i\geqslant0$且$\sum a_i=1$，$\forall x_i\in E$）[6]。X为实可析Banach空间，而X中的Borel集代数是Banach空间的同时又是一个Banach代数[5]。这些记号出现后可带有相应的上、下标。

引理 1 若Y为Banach空间，对任意的X（不一定是Banach空间），则$B(X,Y)$就是Banach空间。

证 见[5]的定理1.2。

引理 2 设X为度量空间，$f(x)$是X上的可测函数，若记$f^+=d(f,x)=\sup\limits_{x\in X}|f-x|$及$f^-=d(-f,x)=\sup\limits_{x\in X}|f+x|$，则$F(f)=\{(f^++f^-):\forall x\in X\}$为$X$上的拓扑。

证 取$x=0$不失一般意义（因x的任意性），显然f^+、f^-分别为f的正、负部份。由于X满足正则T_1空间，故存在开集f^+及f^-。若$f^+\ni x>0$，$f^-\ni x<0$，有$f^+\cap f^-=$空集，则直和$f^++f^-=f$成立。

另一方面，由Borel集代数及De Morgan公式知：若$2X-(f^++f^-)=(X-f^+)+(X-f^-)=(f^+)^c+(f^-)^c$为闭，亦即$(f^++f^-)^c$为闭，则$f^+\cap f^-=f^++f^-=f$为开。

命题1 设有序偶(X,Y)为满足第二可数公理的正则T_1空间，Conv (E)为X的一个可数基底。若Φ为X到Y的双射映射，则Φ是可数的。

证 因X正则T_1空间，故存在开集Φ及Φ^*满足$\Phi\cap\Phi^*=$空集。若$f:x\to y$为单射的，且其初始值为$x_0=f_0\neq0$，则存在$\Phi(f):X\Rightarrow Y$的双射映射的构造为：

$$Y_1=d(x,x_0)=x+\Phi f_0$$
$$Y_2=d(x,Y_1)=x+\Phi Y_1=x+\Phi x+\Phi^2f_0$$

$$\vdots$$

$$Y_n=d(x,Y_{n-1})=x+\Phi Y_{n-1}=x+\Phi x+\cdots+\Phi^{n-1}x+\Phi^n f_0 \quad (2.1)$$

式中，若$\Phi^n=\Phi(\Phi^{n-1})$，有 $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}=\{\Phi_n^{(1)},\ \Phi_n^{(2)},\ \cdots,\ \Phi_n^{(m)},\ \cdots\}$，即知

$$\Phi(f)=\delta_n^{(m)}=\begin{cases}0 & (m>n)\\ \Phi^n & (m\leqslant n)\end{cases}\quad (m,n=1,2,\cdots).$$

另一方面，若$\Phi(-f)=-\Phi(f)$且记$\Phi^*=(-\Phi)$(其中$\Phi>0$)，同理知$Y_n^*=x-\Phi Y_{n-1}^*=x+\Phi^* Y_{n-1}^*$，亦即知$\Phi^*=-\delta_n^{(m)}$，显然，$\Phi\vee\Phi^*$可数。

定理1 设X为Banach空间，X^*及X^{**}分别为X的第一及第二对偶（或共轭）空间，若f及g分别表示$X\Rightarrow X^*$及$X^*\Rightarrow\tilde{X}$的线性同构($\tilde{X}\subset X^{**}$)，则积gf就表示$X\Rightarrow\tilde{X}$的线性同构。若令$\Phi=gf$，当且仅当$\tilde{X}=X^{**}=X=$自反，则$\Phi=1/2$。 (2.2)

证 若$f:x\to x^*$，$g:x^*\to\tilde{x}$及$\Phi:X\Rightarrow\tilde{X}$（其中$\forall x,\tilde{x}\in X$、$\forall x^*\in X^*$），则存在线性泛函族$B(X,X^*)\ni f$，$B(X^*,\tilde{X})\ni g$及$B(X,\tilde{X})\ni\Phi$。

设$X^*=R(x,y\in R)$不失一般性（因R为实Banach空间），则存在连续线性泛函族$B(X,\tilde{X})\ni g:x,\ y\Rightarrow u,\ v$的构造为：$g(x+y)=u$及$g(x-y)=v$。由代数运算得：$u+v=2gx$及$u-v=2gy$。

另一方面，若记$2g=f^{-1}$，则有逆运算的连续线性泛函族$B'(X,R)\ni f:u,v\Rightarrow x,y$的构造为：$f(u+v)=x$，$f(u-v)=y$。当且仅当$\tilde{X}=X^{**}=X=$自反，即$\Phi$为满的，则$B=B'$。于是定理证完。

定理2 设X及H分别表示Banach及Hilbert空间，若Φ为H到X的双射，则变换函数Φ可解。

证 不妨设X为复Banach空间，而子序列$\{x_n\}_{n\geq 1}$、$\{y_n\}_{n\geq 1}$为弱紧集的充要条件是$x_n\xrightarrow{W}x$、$y_n\xrightarrow{W}y(\|x\|,\|y\|<1)$[1,3]，则由复代数运算知：若$\{x_n+iy_n\}=\{u_n\}\xrightarrow{W}u$、$\{x_n-iy_n\}=\{v_n\}\xrightarrow{W}v(\|u\|,\ \|v\|<1)$，就知$x+y=u$，$x-y=v$。显然$u$，$v$是$H$的一双共轭子空间。

另一方面、因$X\Leftrightarrow H=$上自反，Φ为满的，由代数运算立即知

$$\{\|u\|^2+\|v\|^2\}/2=\|x\|^2+\|y\|^2 \quad (2.3)$$

上式显然是Hilbert空间上著名的Neuman几何特征[2]，其推证见[4]，其初等证明及其在力学上的应用见[7]。令

$$e^2=\|v\|^2/\|u\|^2、\varphi=2/(e^2+1)及\psi=2e^2/(e^2+1) \quad (2.4a)$$

且分别称e为形角系数，称$\varphi\vee\psi$为变换函数[4,7]。又知：

$$\varphi(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|v\|^2,\ \psi(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|u\|^2 \quad (2.4b)$$

于是知$\Phi(\varphi\vee\psi)$可解。

例 考虑一般仿射坐标生成基底空间的半单模（或称A^n上的篱笆拓扑[8]），并求半单模的值。

解 若$\mathrm{Conv}(E)=\sum a_i x_i$ ($\sum a_i=1$，$x_i\in E$)为仿射坐标生成基，当初始值$d_0=x_0\neq 0$时。由命题1及定理2知：

$$d_1=|x+d_0|=\{\psi_1\ (x^2+x_0^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2=|x+d_1|=\{\psi_2\ (x^2+d_1^2)\}^{\frac{1}{2}}=\{\psi_2x^2+\psi_2\psi_1(x^2+x_0^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_n=|x+d_{n-1}|=\{\psi_n\ (x^2+d_{n-1}^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\{\psi_nx^2+\psi_n\psi_{n-1}x^2+\cdots+\prod_1^n\ \psi_n\ (x^2+x_0^2)\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

显然，对于n维欧氏空间，当$e=1$，$\psi_\lambda=\{1\}_{\lambda\in I}$时，则$n$维欧氏正交基矢量的半单模为$d_n=n^{\frac{1}{2}}$。那么平面正交基为$d_2=\sqrt{2}$，空间正交基为$d_3=\sqrt{3}$。

定理3 设X为KUR空间，λ及Φ分别表示压缩系数及X上的压缩映射，则KUR空间存在固定点的条件为$\lambda=(f_0-z)/f_0$。

证明 唯一性。取$0<\lambda\leqslant1$且$\forall z^*,z\in X$，则存在$d(\Phi(z^*),\ \Phi(z))\leqslant\lambda d(z^*,z)$。若$\Phi$至少有两个不动点$z^*$及$z$，则由$d(z^*,z)=d(\Phi(z^*),\Phi(z))\leqslant\lambda d(z^*,z)$知$d(z^*,z)=0$，即$z^*=z$。显然不动点是唯一的。

存在性．当$\{z_n\}_{n\geqslant1}\in X$且$z_0=f_0\neq0$时，由命题1知：$z_1=z+\lambda f_0$，$z_2=\Phi(z_1)=z+\lambda z+\lambda^2f_0$，$\cdots z_n=\Phi(z_{n-1})=z+\lambda z+\lambda^2z+\cdots+\lambda^{n-1}z+\lambda^nf_0$，若$m>n\geqslant N$，有dist $(z_m,z_n)=\sup\limits_{m,n>N}|z_m-z_n|=(\lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}+\cdots+\lambda^{n+1}+\lambda^n)\ z+(\lambda^m-\lambda^n)f_0=(\lambda^n-\lambda^m)z/(1-\lambda)-(\lambda^n-\lambda^m)f_0$，就知$\{z_n\}_{n\geqslant1}$为收敛子序列。由弱紧空间等矩映射的条件$z_n\xrightarrow{W}z^*$，知$\Phi(z_n)\xrightarrow{W}\Phi(z)^*$，有$z_{n+1}\xrightarrow{W}\Phi(z^*)$。因此，当$n\to\infty$时，$d(z_{n+1},z_n)=d(\Phi(z^*),z^*)=0$，亦即$\Phi(z^*)=z^*$，显然$z^*$为不动点。

必要性（$\Rightarrow$）。必要性是显然的，因KUR空间为上自反，即(UC)$\Rightarrow$(IUR)$\Rightarrow\cdots\Rightarrow$(KUR)$\Rightarrow$($K+1$)UR$\Rightarrow$上自反，对每个$K$成立[1,2]。

充分性（$\Leftarrow$）．当且仅当$\lambda=(f_0-z)/f_0$时，(UC)$\Leftarrow$(IUR)$\Leftarrow\cdots\Leftarrow$(KUR)$\Leftarrow$($K+1$)UR$\Leftarrow$上自反，亦成立。若不然KUR空间非自反，知$z_{n+1}$与$z_n$互不蕴含，亦即$z_{n+1}$及$z_n$为非等价类。即：

$$d\ (z_{n+1},z_n)=\sup|z_{n+1}-z_n|>\varepsilon>0,\ \text{亦即}\ \lambda\neq(f_0-z)/f_0.$$

另一方面，由存在性的证明知：$d(z_{n+1},z_n)=\lambda^nz+\lambda^{n+1}f_0-\lambda^nf_0=\lambda^n(z+\lambda f_0-f_0)=0$，但$\lambda\neq0$，必有$z+\lambda f_0-f_0=0$，这就产生了矛盾。因此（$\Leftarrow$）亦成立。

参 考 文 献

[1] 俞鑫泰，科学通报，24 (1982)，1473-1475.

[2] Suillivan, F. Can., *J. Math.*, 31,3 (1979), 628—636.

[3] Huff, R., Rocky Motain, *J. Math.*, 10, 4 (1980), 743—479.

[4] 谷安海，东北工学院学报，3 (1983),15—20.

[5] Schechter, M., *Principles of functional Analysis*, Academic Press, New York and London, p4-57,208—209.

[6] James, R. C. Isral, *I. Math.*, 2 (1964),101—119.

[7] 谷安海，力学与实践，2 (1984),27—31.

[8] Harlshore, R., *Algebraic Geometry*, Spring-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1977), 1—2.

The Transformation Function Φ and the Condition Needed for KUR Space Having the Fixed Point

Gu An-hai

(Zhengzhou Aluminum Plant, Zhengzhou)

Abstract

In the last several years some progress has been made in the study of the properties of the extent of Banach space; In 1979, for example, when Suillivan discussed a related characterization of real $L^p(x)$space, he used uniform behavior of all two-dimensional subspace and defined this concept of a KUR space; In 1980 Huff used the concept of an NUC space when he discussed the property of generalizing uniform convexity which was defined in terms of sequence; And in 1980 Yu Xin-tai(俞鑫泰)stated certainly and proved that the RKU space is equal to the NUC space[1].

However, the following quite interesting questions raised by Suillivan and Huff merit attention; Does every super-reflexive space have the fixed point property?and what conditions are needed for an $L^p(x)$ space to be NUC space[3]? respectively.

The purpose of this paper is to study the characterization of transformation function[4] and relationships between transformation function and the two questions above.