应用数学和力学, 第 25 卷 第 10 期(2004 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 10_1007_07

自由 Fisher 信息量与合并自由*

孟 彬, 郭懋正, 曹小红

(北京大学 数学科学学院 数学与应用数学实验室, 北京 100871)

(我刊编委郭懋正来稿)

摘要: 在算子值非交换概率空间中引入算子值自由 Fisher 信息量的概念, 这一定义是对 D. Voiculescu 在有迹的 von Neumann 代数上定义的自由 Fisher 信息量的推广• 证明了算子值自由 Fisher 信息量与合并自由性是密切相关的, 即证明了若干个算子值随机变量的自由 Fisher 信息量的可加性等价于这些随机变量的合并自由性• 并且也类似地得到了 Cramer_Rao 不等式•

关 键 词: Hilbert C^* _模; 算子值随机变量; 自由 Fisher 信息量
中图分类号: O177.1 文献标识码: A

引 言

自由概率论是近 20 年来发展起来的算子代数领域的一个新方向, 它的主要创立者是 D. Voiculescu, 这一理论很快成为研究算子代数的强有力工具• 特别是利用其中的随机矩阵和自由熵理论解决了 von Neumann 代数中的一些本质性问题• Voiculescu 用了两种方法来定义自由熵: 矩阵微观态方法和极小微观态方法• 这两种方法定义的自由熵是否相等的问题目前尚未完全解决• 利用矩阵微观态自由熵 Voiculescu[1]证明了自由群因子没有 Cartan 子代数; Ge[2]证明了自由群因子是素的• 但是人们在试图证明有关矩阵微观态的一些重要性质时遇到了极大的困难, 因此 Voiculescu 又定义了极小微观态自由熵• 这种自由熵是通过自由 Fisher 信息量来给出的, 事实上在大多数情形下只要研究自由 Fisher 信息量就可以了[3, 4]•

本文将引入算子值自由 Fisher 信息量的概念• Voiculescu 最初是在有迹的 W^* _代数$\mathcal{A}$(即存在 $\mathcal{A}$ 上的忠实正常迹态 τ) 中定义 Fisher 信息量的• 现在我们要把这一概念推广到算子值非交换概率空间中去, 即用一个从 $\mathcal{A}$ 到$\mathcal{D}$ 上的条件期望 $E_{\mathcal{D}}$ 来代替 τ• 这一推广是受 A. Nica, R. Speicher 等的一个公开问题的启发: 我们记 $X_1, \cdots, X_n$ 相对于$\mathcal{B}$ 的自由 Fisher 信息量为 $\Phi^*(X_1, \cdots, X_n : \mathcal{B})$(按 Voiculescu 的定义), Voiculescu 证明了: 如果 $\Phi^*(X_1, \cdots, X_n : \mathcal{B}) = \Phi^*(X_1, \cdots, X_n : \mathbf{C}) < \infty$ 那么$\left\{X_1, \cdots, X_n\right\}$与$\mathcal{B}$ 是自由的; 反过来, 如果$\left\{X_1, \cdots, X_n\right\}$和$\mathcal{B}$ 是自由的, 那么 $\Phi^*(X_1, \cdots, X_n : \mathcal{B}) = \Phi^*(X_1, \cdots, X_n : \mathbf{C})$• 在算子值的的框架下, 一个自然的问题是: 在算子值概率空间中, Φ^* 是如何变化的呢? 我们是否能用 Φ^* 来刻划算子值自由(即合并自由性) 呢? 对于一般的子代数 $\mathcal{D}$, 这仍是一个公开问题• 但是用本文定义的 Fisher 信息量 Φ^{**},

* 收稿日期: 2003_06_15; 修订日期: 2004_06_15
作者简介: 孟彬(1976—), 男, 山东泰安人, 博士(E_mail: b.meng@pku.edu.cn);
郭懋正, 男, 教授, 博士生导师(联系人.Tel: +86_10_62752163; E_mail: maguo@pku.edu.cn).

就可以刻划合并自由• 也就是说 $\Phi^{**}(X_1, \dots, X_n)$ 的可加性等价于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 在 $\mathscr{D}$ 上的合并自由性• 我们还将证明 Φ^{**} 与 Φ^* 有许多相似的性质包括Cramer_Rao不等式• 但在证明方法上我们不能仿照Voiculescu在[2]、[3]中的方法,因为 $E_{\mathscr{D}}$ 一般不是迹的,幸运的是R. Speicher的组合论给我们提供了一个有效的方法•

1 Hilbert C^*_模和共轭变量

$\mathscr{M}$ 是von Neumann代数,$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{M}$ 的von Neumann子代数,$E_{\mathscr{D}}$ 是从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{D}$ 上的条件期望,那么 $(\mathscr{M}, E_{\mathscr{D}}, \mathscr{D})$ 称为一个算子值(或 $\mathscr{D}$ 值)的非交换概率空间• 在本文中我们总假设条件期望是忠实的• 有关非交换概率空间的基本概念和性质可参见[5]• 我们在这里仅重述一下合并自由的定义•

定义 1.1[5] $(\mathscr{M}, E_{\mathscr{D}}, \mathscr{D})$ 同上,设 $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}_i \subset \mathscr{M}$, $(i \in \mathbf{I})$ 是 $\mathscr{M}$ 的一族子代数,称 $(\mathscr{A}_i)_{i \in \mathbf{I}}$ 是 $\mathscr{D}$_自由的(或在 $\mathscr{D}$ 上是合并自由的),若满足以下条件:

$$E_{\mathscr{D}}(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0,$$

其中 $\forall a_j \in \mathscr{A}_{i_j}$, $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$ 并且 $E_{\mathscr{D}}(a_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant n$; $a_i \in \mathscr{M}$, $(i \in \mathbf{I})$ 称为 $\mathscr{D}$_自由的,如果由 $\left(\mathscr{D} \cup \left\{a_i\right\}\right)_{i \in \mathbf{I}}$ 生成的子代数是 $\mathscr{D}$_自由的•

注记 1.2 在某些情形下我们可以很自然地选取 $E_{\mathscr{D}}$• 例如,令 τ 是 $\mathscr{M}$ 上的忠实正常态满足 $\sigma_t^{\tau}(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$, $\forall t \in \mathbf{R}$,其中 σ_t^{τ} 是模算子• 由[6,命题2.6.6]知存在一个 τ_相容的从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{D}$ 上的条件期望 E• 显然 E 是忠实的•

给定 $(\mathscr{M}, E_{\mathscr{D}}, \mathscr{D})$ 如上,我们可以定义 $\mathscr{M}$ 上的 $\mathscr{D}$ 值内积:$\langle x, y\rangle_{\mathscr{D}} := E_{\mathscr{D}}(x^* y)$ 并把它在Hilbert C^*_模范数下的完备化记作 $L^2_{\mathscr{D}}(\mathscr{M})$•

经典的Fisher信息量来源于统计参数估计理论,它的定义由R. A. Fisher给出• 设 f 是有界实随机变量并且它的分布是Lebesgue绝对连续的,记它的密度函数为 p• 那么Fisher信息量 $\Phi(f)$ 定义为

$$\Phi(f) = \int \frac{(p'(t))^2}{p(t)} \mathrm{d}t•$$

另一种得到 Φ 的方法是考虑 $L^2(\mathbf{R}, p\,\mathrm{d}x)$ 上的导子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$• 若1在 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^*$ 的定义域内,那么

$$\Phi(f) = \left\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^* 1 \right\|^2•$$

有关Fisher信息量的更多细节可参考[7]•

类似于经典的情形,Voiculescu在有迹的 W^* 代数中给出了若干个自伴随机变量的自由Fisher信息[3],[4]• 本文中我们将考虑的是算子值概率空间中的信息量,我们首先引进共轭变量的定义•

定义 1.3 $\mathscr{M}, E_{\mathscr{D}}, \mathscr{D}$ 同上,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{M}$ 的von Neumann子代数且 $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}$• $X = X^* \in \mathscr{M}$, $\mathscr{D}[X]$ 和 $\mathscr{B}$ 代数自由的(模 $\mathscr{D}$)(即 $\mathscr{D}[X] *_{\mathscr{D}} \mathscr{B} \to \mathscr{D}[X] \vee \mathscr{B}$ 的典则同态具有平凡核)• 定义导子:

$$\partial: \mathscr{B}[X] \to \mathscr{B}[X] \otimes_{\mathscr{D}} \mathscr{B}[X],$$

$$\partial(b_0 X \cdots X b_n) = \sum_{j=1}^{n} (b_0 X \cdots X b_{j-1}) \otimes_{\mathscr{D}} (b_j X \cdots X b_n)•$$

把 ∂ 的定义延拓到 $L^2_{\mathscr{D}}[\mathscr{B}[X]]$ 上,若 $\partial^*(1 \otimes 1) \in L^2_{\mathscr{D}}[\mathscr{B}[X]]$,我们就称它为 X 相对于 $\mathscr{B}$ 的 $\mathscr{D}$_

值共轭变量,记作$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})$. 也即它满足:$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})\in L^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}[X])$ 且

$$E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})b_0X\cdots Xb_n)=\sum_{j=1}^{n}E_{\mathcal{D}}(b_0X\cdots b_{j-1})E_{\mathcal{D}}(b_jX\cdots Xb_n). \tag{1}$$

命题 1.4

(i) $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})$ 是唯一的;

(ii) $E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})e)=E_{\mathcal{D}}(e\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})^*),\quad \forall e\in L^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}[X])$.

证明 (i) 是显然的,因为 $E_{\mathcal{D}}$ 是忠实的.

(ii) 由(1)式我们有:

$$E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})b_0X\cdots Xb_n)=(E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})(b_0X\cdots Xb_n)^*))^*=$$
$$E_{\mathcal{D}}((b_0X\cdots Xb_n)\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})^*),$$

$\forall b_0, b_1\cdots b_n\in\mathcal{B}$.

下面的定理说明共轭变量与合并自由是有关系的.

定理 1.5 令$\mathcal{D}$ 是$\mathcal{A}$ 的子代数$\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$ 并设$X\in\mathcal{A}$ 是自伴元的. 设$\mathcal{D}[X]$ 和$\mathcal{C}$ 在$(\mathcal{A}, E_{\mathcal{D}})$ 中是 $\mathcal{D}$_ 自由的,那么$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})=\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{C})$.

要证明这个定理,我们需要作一些准备工作. 先来介绍 R. Speicher 的累积函数技术[8].

我们称一列函数 $\widehat{E_{\mathcal{D}}}=(E^{(n)}_{\mathcal{D}})_{n\geqslant 1}$ 是由 $E_{\mathcal{D}}$ 诱导的矩函数,其中

$$E^{(n)}_{\mathcal{D}}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n):=E_{\mathcal{D}}(a_1\cdots a_n)\qquad(n\in\mathbf{N},\ a_1,\cdots,a_n\in\mathcal{M}).$$

由 $E_{\mathcal{D}}$ 诱导的累积函数我们记作 $\widehat{k_{\mathcal{D}}}=(k^{(n)}_{\mathcal{D}})_{n\geqslant 1}$ 它由下面的递归公式来决定(我们规定 $E^{(0)}_{\mathcal{D}}:=1$)

$$\begin{aligned}E^{(n)}_{\mathcal{D}}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=&\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{1<i(1)<i(2)\cdots<i(r)\leqslant n}k^{(r+1)}_{\mathcal{D}}(a_1E^{(i(1)-2)}_{\mathcal{D}}(a_2\otimes\\&\cdots\otimes a_{i(1)-1})\otimes a_{i(1)}E^{(i(2)-i(1)-1)}_{\mathcal{D}}(a_{i(1)+1}\otimes\cdots\otimes a_{i(2)-1})\otimes\\&a_{i(2)}\cdots\otimes a_{i(r)}E^{(n-i(r))}_{\mathcal{D}}(a_{i(r)+1}\otimes\cdots\otimes a_n)),\end{aligned}\tag{2}$$

$\forall n\in\mathbf{N}, a_1,\cdots,a_n\in\mathcal{M}$. 容易看出$\widehat{E_{\mathcal{D}}}$ 和$\widehat{k_{\mathcal{D}}}$ 是互相决定的. 矩函数和累积函数都是可乘函数([8, 定义 2.1.1]).

由于矩函数和累积函数可以相互唯一决定,所以我们可用累积函数来描述合并自由.

引理 1.6[8] 设$\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B},\mathcal{C}\subseteq\mathcal{M}$ 是两个子代数. 它们是 $\mathcal{D}$_ 自由的当且仅当下面的等式成立

$$k^{(n)}_{\mathcal{D}}(a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n)=\begin{cases}k^{(n)}_{\mathcal{D}}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n), & \text{若 } a_1,\cdots,a_n\in\mathcal{B},\\ k^{(n)}_{\mathcal{D}}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n), & \text{若 } a_1,\cdots,a_n\in\mathcal{C},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\tag{3}$$

其中 $a_1, a_2,\cdots,a_n\in\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$.

引理 1.7[9] $\mathcal{B}$ 和$\mathcal{C}$ 是$\mathcal{D}$_ 自由的当且仅当

$$k_{\mathcal{B}}(c_1\otimes c_2b_2\otimes c_nb_n)=k_{\mathcal{D}}(c_1\otimes c_2E_{\mathcal{D}}(b_2)\otimes c_nE_{\mathcal{D}}(b_n)).$$

同样我们也用累积函数来描述共轭变量.

引理 1.8 记号同上. 令$E_{\mathcal{B}}$ 是$\mathcal{A}$ 到$\mathcal{B}$ 上的忠实正常条件期望,使得$E_{\mathcal{D}}=E_{\mathcal{D}}E_{\mathcal{B}}$. $\xi\in L^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}, E_{\mathcal{D}})$ 是 X 的相对于$\mathcal{B}$ 的共轭元当且仅当$\xi\in L^2_D(\mathcal{B}\vee X)$ 且满足下面的等式:

$$\begin{cases} k_{\mathcal{B}}^{(1)}(\xi b) = 0, & \forall\, b \in \mathcal{B}, \\ k_{\mathcal{B}}^{(2)}(\xi \otimes ba) = \delta_{aX} E_{\mathcal{D}}(b), & \forall\, b \in \mathcal{B},\ a \in \{X\} \cup \mathcal{B}, \\ k_{\mathcal{B}}^{(m+1)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes \cdots \otimes b_m a_m) = 0, & \forall\, b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B};\ m \geqslant 2, \end{cases}$$

其中 $a_1, \ldots, a_m \in \{X\} \cup \mathcal{B}$, $k_{\mathcal{B}}$ 是由 $E_{\mathcal{B}}$ 诱导的累积函数.

证明　由于 $E_{\mathcal{D}}$ 是忠实的且 $E_{\mathcal{D}} = E_{\mathcal{D}} E_{\mathcal{B}}$ 我们得到: 等式(1)等价于

$$E_{\mathcal{B}}(\xi b_0 X \cdots X b_n) = \sum_{j=1}^{n} E_{\mathcal{D}}(b_0 X \cdots b_{j-1}) E_{\mathcal{B}}(b_j X \cdots X b_n). \tag{4}$$

设 ξ 是 X 的共轭元.

$$k_{\mathcal{B}}^{(1)}(\xi b) = E_{\mathcal{B}}^{(1)}(\xi b) = 0, \qquad \forall\, b \in \mathcal{B},$$

且

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{B}}^{(2)}(\xi \otimes ba) &= E_{\mathcal{B}}^{(2)}(\xi \otimes ba) - k_{\mathcal{B}}^{(1)}(\xi E_{\mathcal{B}}(ba)) = \\ &E_{\mathcal{B}}(\xi ba) = \delta_{aX} E_{\mathcal{D}}(b). \end{aligned}$$

要证明第3个等式我们对 $m \geqslant 2$ 进行归纳.

当 $m = 2$, 我们有:

$$\begin{aligned} &E_{\mathcal{B}}^{(3)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes b_2 a_2) = \\ &\quad k_{\mathcal{B}}^{(1)}(\xi E_{\mathcal{B}}^{(2)}(b_1 a_1 \otimes b_2 a_2)) + k_{\mathcal{B}}^{(2)}(\xi \otimes b_1 a_1 E_{\mathcal{B}}(b_2 a_2)) + \\ &\quad k_{\mathcal{B}}^{(2)}(\xi E_{\mathcal{B}}(b_1 a_1) \otimes b_2 a_2) + k_{\mathcal{B}}^{(3)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes b_2 a_2) = \\ &\quad \delta_{a_1 X} E_{\mathcal{D}}(b_1) E_{\mathcal{B}}(b_2 a_2) + \delta_{a_2 X} E_{\mathcal{D}}(b_1 a_1) E_{\mathcal{B}}(b_2) + \\ &\quad k_{\mathcal{B}}^{(3)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes b_2 a_2). \end{aligned}$$

注意到 ξ 是共轭元, 故有

$$k_{\mathcal{B}}^{(3)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes b_2 a_2) = 0.$$

现在假设等式对于 $\leqslant m-1$ 的数成立, 那么

$$\begin{aligned} &E_{\mathcal{B}}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes \cdots \otimes b_m a_m) = \\ &\quad \sum_{1 \leqslant j \leqslant m+1} k_{\mathcal{B}}^{(2)}(\xi E_{\mathcal{B}}^{(j-1)}(b_1 a_1 \otimes \cdots \otimes b_{j-1} a_{j-1}) \otimes \\ &\quad b_j a_j E_{\mathcal{B}}^{(m-j)}(b_{j+1} a_{j+1} \otimes \cdots \otimes b_m a_m)) + k_{\mathcal{B}}^{(m+1)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes \cdots \otimes b_m a_m). \end{aligned}$$

由于 ξ 是 X 的共轭元, 并由(4), 知:

$$k_{\mathcal{B}}^{(m+1)}(\xi \otimes b_1 a_1 \otimes \cdots \otimes b_m a_m) = 0.$$

易见上述过程是可逆的, 故它的逆命题也成立.

现在我们来证明定理.

定理1.5的证明　由于 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})$ 是 X 相对于 $\mathcal{D}$ 的共轭元, 并且 $\mathcal{D}[X]$ 与 $\mathcal{C}$ 是自由的, 故 $\forall\, c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{D}}(E_{\mathcal{C}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})c)) &= E_{\mathcal{D}} E_{\mathcal{C}}^{(2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) \otimes c) = \\ &E_{\mathcal{D}}(k_{\mathcal{C}}^{(2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) \otimes c) + k_{\mathcal{C}}^{(1)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})c)) = \\ &E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})c) \overset{\text{由[6, 定理3.6]}}{=} 0, \end{aligned} \tag{5}$$

且由 $E_{\mathcal{D}}$ 是忠实的, 故 $k_{\mathcal{C}}^{(1)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})) = 0$.

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{C}}^{(2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) \otimes eX) &= k_{\mathcal{C}}^{(3)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{C}) \otimes e \otimes X) + \\ &k_{\mathcal{C}}^{(2)}(k_{\mathcal{C}}^{(2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) \otimes e) k_{\mathcal{C}}(X)) + k_{\mathcal{C}}^{(2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) k_{\mathcal{C}}(e) \otimes X) = \end{aligned}$$

$$k_{\mathcal{D}}^{(2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})E_{\mathcal{D}}(e)\otimes X)=E_{\mathcal{D}}(e), \tag{6}$$

其中 $e\in\mathcal{C}$• 第一个等号成立是因为 $k_{\mathcal{C}}$ 满足累积性质(参见[8, Definiton3. 2. 1]), 第二个等号是由于引理1. 7• $\forall m\geqslant 2$ 我们有:

$$\begin{aligned}&k_{\mathcal{C}}^{(m+1)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})\otimes e_1a_1\otimes\cdots\otimes e_ma_m)=\\&\quad k_{\mathcal{C}}^{(m+2)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})\otimes e_1\otimes a_1\otimes e_2a_2\otimes\cdots\otimes e_ma_m)+\\&\quad\sum_{\substack{\pi\in NC(m+2)\\|\pi|=2\\2\sim_\pi 3}}\widehat{k_{\mathcal{C}}}(\pi)(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})\otimes e_1\otimes a_1\otimes e_2a_2\otimes e_ma_m),\end{aligned}$$

其中 $e_1,\ \cdots,\ e_m\in\mathcal{C};\ a_1,\ \cdots,\ a_m\in\{X\}\cup(\mathcal{C})$, 其中的符号同[8, Definition 3. 2. 1]• 再次利用累积性质和定义2. 2拆分每个 e_ia_i 最终得到:

$$k_{\mathcal{C}}^{(m+1)}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})\otimes e_1a_1\otimes\cdots\otimes e_ma_m)=0 \tag{7}$$

由(5)、(6)、(7)式和引理2. 3得 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})$ 是 X 的相对于 $\mathcal{C}$ 的共轭元• 又因为共轭元是唯一的, 故 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})=\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{C})$•

下面我们将找到标准半圆元的共轭变量• 一个自伴元 S 称为标准半圆元若它的典则形式是 $\lambda^*(1)+\lambda(1)$, 也即 S 满足 $k_{\mathcal{D}}^{(1)}(S)=0;\ k_{\mathcal{D}}^{(2)}(S\otimes dS)=d;\ k_{\mathcal{D}}^{(m+1)}(S\otimes d_1S\otimes\cdots\otimes d_mS)=0,\ m\geqslant 2$, 其中 $d,\ d_1,\ \cdots,\ d_m\in\mathcal{D}$[4],[8]• 这样不难看出有以下命题•

命题1. 9 令 $S=S^*$ 是 $\mathcal{D}$_值随机变量• 它是标准半圆元当且仅当 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(S:\mathcal{D})=S$•

证明 由引理1. 8立即可得•

2 算子值自由Fisher信息量

定义2. 1 $(\mathcal{M},E_{\mathcal{D}},\mathcal{D}),\mathcal{B}$ 同上, $X_j=X_j^*\in\mathcal{M},\ 1\leqslant j\leqslant n$, 定义 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ 相对于 $\mathcal{B}$ 的 $\mathcal{D}$_值自由Fisher信息量为

$$\begin{aligned}&\Phi^{**}(X_1,\ \cdots,\ X_n:\mathcal{B}):=\\&\quad\sum_{1\leqslant j\leqslant n}E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X_j:\mathcal{B}[X_1,\ \cdots,\ \widehat{X_j},\ \cdots,\ X_n])\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X_j:\mathcal{B}[X_1,\ \cdots,\ \widehat{X_j},\ \cdots,\ X_n])^*),\end{aligned}$$

若 $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ 存在, 其中 $\widehat{X_j}$ 表示把 X_j 从列中去掉•

命题2. 2 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}[X]$ 在 $(\mathcal{M},E_{\mathcal{D}})$ 中是 $\mathcal{D}$_自由的, 那么

$$\Phi^{**}(X:\mathcal{C})=\Phi^{**}(X:\mathcal{D})•$$

证明 直接由定理1. 5得到•

推论2. 3 设 X 和 Y 在 $(\mathcal{M},E_{\mathcal{D}})$ 中是 $\mathcal{D}$_自由的, 那么

$$\Phi^{**}(X,\ Y:\mathcal{D})=\Phi^{**}(X:\mathcal{D})+\Phi^{**}(Y:\mathcal{D})•$$

下面我们将证明命题2. 2和推论2. 3的逆也是成立的• 我们首先推广Voiculescu自由梯度的概念(见[9])•

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是von Neumann子代数且是代数自由的(模 $\mathcal{D}$), 定义导子 $\delta_{\mathcal{A},\mathcal{B}}:\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\to(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\otimes(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ 如下

$$\delta_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(a)=\begin{cases}a\otimes_{\mathcal{D}}1-1\otimes_{\mathcal{D}}a, & \text{若 } a\in\mathcal{A},\\0, & \text{若 } a\in\mathcal{B}•\end{cases}$$

定义2. 4 $\xi\in L_{\mathcal{D}}^2(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ 称为 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的自由梯度, 若它满足:

$$E_{\mathcal{D}}(\xi m)=(E_{\mathcal{D}}\otimes E_{\mathcal{D}})(\delta_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}m),$$

$\forall m \in (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, 把它记为$j_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}:\mathcal{B})$•

容易看出$j_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}:\mathcal{B}) \perp \mathcal{A}$ 其中内积是由$E_{\mathcal{D}}$ 诱导的•

引理 2.5　若$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})$ 存在, 那么$j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}[X]:\mathcal{B}) = [\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B}), X]$•

证明　类似于[3]中命题 5.10的证明•

引理 2.6[9]　以下叙述等价:

1) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是$\mathcal{D}$ 自由的;

2) $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}:\mathcal{B}) = 0$•

证明　由引理 1.7•

下面的命题与命题 2.2, 推论 2.3一起描述了合并自由•

定理 2.7　$X = X^* \in \mathcal{M}$, $Y = Y^* \in \mathcal{M}$, 那么:

(i) 若 $\Phi^{**}(X:\mathcal{B}) = \Phi^{**}(X:\mathcal{D})$ 存在, 则X 和$\mathcal{B}$ 是$\mathcal{D}$_自由的;

(ii) 若 $\Phi^{**}(X, Y:\mathcal{D}) = \Phi^{**}(X:\mathcal{D}) + \Phi^{**}(Y:\mathcal{D})$ 并且都存在, 那么X 和Y是$\mathcal{D}$_自由的•

证明　(i) 由于

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) = E_{\mathcal{D}}\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B}),$$

及 $\Phi^{**}(X:\mathcal{B}) = \Phi^{**}(X:\mathcal{D})$, 我们有:

$$E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})^* \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D})) = E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})^* \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})),$$

且$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}) = \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B})$, 由[5, 命题 2.6.4] 并注意到 $E_{\mathcal{D}}$ 是忠实的•

于是

$$j(X:\mathcal{B}) = [\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{B}), X] = [\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X:\mathcal{D}), X] \in L^2_{\mathcal{D}}(W^*(X) \vee \mathcal{D}),$$

因此有$j(\mathcal{D}[X]:\mathcal{B}) \perp \mathcal{D}[X]$, $j(\mathcal{D}[X]:\mathcal{B}) \in L^2_{\mathcal{D}}(W^*(X) \vee \mathcal{D})$ 且$j(\mathcal{D}[X]:\mathcal{B}) = 0$, 再由引理2.6即得结论•

(ii) 令$\mathcal{A} := \mathcal{D}[X]$, $\mathcal{B} := \mathcal{D}[Y]$, 就有

$$\Phi^{**}(X, Y:\mathcal{D}) = \Phi^{**}(X:\mathcal{B}) + \Phi^{**}(Y:\mathcal{A}) = \Phi^{**}(X:\mathcal{D}) + \Phi^{**}(Y:\mathcal{D})•$$

又因为

$$\Phi^{**}(X:\mathcal{B}) \geqslant \Phi^{**}(X:\mathcal{D}) \qquad (\text{作为}\mathcal{D}\text{ 中的正元}),$$
$$\Phi^{**}(Y:\mathcal{A}) \geqslant \Phi^{**}(Y:\mathcal{D}),$$

故

$$\Phi^{**}(X:\mathcal{B}) = \Phi^{**}(X:\mathcal{D}),$$
$$\Phi^{**}(Y:\mathcal{A}) = \Phi^{**}(Y:\mathcal{D})•$$

再由(i)结论得证•

命题 2.8　令$X_1, \dots, X_n \in (\mathcal{M}, E_{\mathcal{D}}, \mathcal{D})$ 是自伴的, 那么

$$\Phi^{**}(X_1, \dots, X_n:\mathcal{B}) \sum_{j=1}^{n} \| E_{\mathcal{D}}(X_j^2) \| \geqslant n^2 I• \tag{8}$$

当 X_j 都具有典则形式 $\lambda^*(1) + \lambda(1)$, 且 $\mathcal{B}, \{X_1\}, \dots, \{X_n\}$是$\mathcal{D}$_自由时上式等号成立•

证明　用 $\mathcal{B}_j$ 来记$\mathcal{B}[X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n]$, 我们有:

$$\sum_{i=1}^{n} E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}(X_i:\mathcal{B}_i)\mathcal{J}(X_i:\mathcal{B}_i)^*) \sum_{j=1}^{n} \| E_{\mathcal{D}}(X_j^2) \| =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}(X_i:\mathcal{B}_i)\mathcal{J}(X_i:\mathcal{B}_i)^*)\ \| E_{\mathcal{D}}(X_j^2)\| \geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X_i:\mathcal{B}_i))\sum_{j=1}^{n} E_{\mathcal{D}}(\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(X_j:\mathcal{B}_i))^* \geqslant n^2 I.$$

第二个结论可由命题 2.6 推出. 事实上由 $\mathcal{B},\left\{X_1\right\},\ \cdots,\left\{X_n\right\}$ 是$\mathcal{D}$_自由的知 $\Phi^{**}(X_1,\ \cdots, X_n: \mathcal{B}) = \Phi^{**}(X_1,\ \cdots, X_n: \mathcal{D})$.

[参 考 文 献]

[1] Voiculescu D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory—III: the absence of Cartan subalgebras[J]. Geometric and Functional Analysis, 1996, **6**(1): 172—199.

[2] Ge L. Applications of free entropy to finite von Neumann algebras II[J]. Annals of Mathematics, 1998, **147**(2): 143—157.

[3] Voiculescu D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory—V: Noncommutative Hilbert transforms[J]. Inventiones Mathematicae, 1998, **132**(1): 189—227.

[4] Voiculescu D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory—VI: liberation and mutual free information[J]. Advances in Mathematics, 1999, **146**(1): 101—166.

[5] Voiculescu D. Operations on certain non_commutative operator_valued random variables [J]. Ast risque, 1995, **232**(1): 243—275.

[6] Sunder V S. An Invitation to von Neumann Algebras[M]. New York: Springer_Verlag, 1987.

[7] Cover T M, Thomas J A. Elements of Information Theory[M]. Chichester: John Wiley & Sons, Inc, 1976.

[8] Speicher R. Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator_valued free probability theory[J]. Memoirs of AMS, 1998, (627): 1—88.

[9] Nica A, Shlyakhtenko D, Speicher R. Operator_valued distributions—1: characterizations of freeness [J]. International Mathematics Research Notices, 2002, (29): 1509—1538.

Free Fisher Information and Amalgamated Freeness

MENG Bin, GUO Mao_zheng, CAO Xiao_hong

(LMAM, School of Mathematical Science, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract: The notion of operator_valued free Fisher information was introduced. It is a generalization of free Fisher information which was defined by D. Voiculescu on tracial von Neumann algebras. It is proved that the operator_valued free Fisher information is closely related to amalgamated freeness, i.e. the operator_valued free Fisher information of some random variables is additive if and only if these random variables are a free family with amalgamation over a subalgebra. Cramer_Rao inequality in operator_valued settings is also obtained.

Key words: Hilbert C^*_module; operator_valued random variable; free Fisher information