应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

在不变的拉伸载荷作用下非老化材料连续损伤参数表示式的确定*

程沅生

（上海市应用数学和力学研究所，1985年6月6日收到）

摘　要

在不变的拉伸截荷P作用下，非老化脆性材料连续损伤参数可表示为

$$\omega\left(\frac{P}{A_0}\right)=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+f_1\left(\frac{P}{A_0}\right)f_2(t)$$

其中$g(P/A_0)$表示式的确定方法已由[4]指出了，而$f_1(P/A_0)$和$f_2(t)$表示式的确定方法迄今没有人给出过．现在本文解决了这个问题，本文指出，$f_1(P/A_0)f_2(t)=\Phi(P/A_0)t$，并且给出了确定$\Phi(P/A_0)$表示式的具体方法．

一、引　言

伴随着断裂力学的发展，出现了固体力学的一个新分支——损伤力学．对于没有宏观裂纹但是出现了大量微观缺陷的结构，它的强度和寿命可以用损伤力学的方法来研究．这里假设材料的缺陷是连续分布在整个体积之内的．材料的损伤可以用一个连续场量即连续损伤参数来描述．对于损伤参数现在有几种不同的定义方法．本文采用[1～5]的定义：对于一根受拉伸载荷的等截面直杆，未受载荷以前初始横截面面积为A_0，负载一段时间以后，由于空穴的形成和发展，有效承载面积逐渐减小，将有效横截面面积记为A_e，则损伤参数ω为

$$\omega=\frac{A_0-A_e}{A_0} \tag{1.1}$$

根据这个定义，我们得到

$$\omega=1-\frac{\sigma}{S} \tag{1.2}$$

其中$\sigma=P/A_0$为名义应力，$S=P/A_e$为真实应力，而P为拉伸载．显然

$$S=\frac{\sigma}{1-\omega} \tag{1.3}$$

* 潘立宙推荐．本文由在1984年12月4日～10日于印度新德里召开的第六届国际断裂会议（ICF6）的Poster Sessions上介绍的论文扩充写成的．

对于工程设计人员来讲，掌握了$S(t)$和$\omega(\sigma,t)$的变化规律就能知道构件的安全程度，预测结构物的寿命。为此，人们需要研究损伤参数ω的变化规律。

对于非老化脆性材料[4,5]

$$\omega=\omega(\sigma,t) \tag{1.4}$$

它可以分解成

$$\omega(\sigma,t)=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+\varphi\left(\frac{P}{A_0},t\right) \tag{1.5}$$

$g(P/A_0)$称为瞬时损伤，$\varphi(P/A_0,t)$ 称为持续损伤。

Piechnik 和 Pachla[4]指出了如何确定 $g(P/A_0)$ 表示式的具体方法，并且提出，在$P\equiv$ const 条件下，持续损伤$\varphi(P/A_0,t)$ 可表示为

$$\varphi\left(\frac{P}{A_0},t\right)=f_1\left(\frac{P}{A_0}\right)f_2(t) \tag{1.6}$$

从而

$$\omega(\sigma,t)=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+f_1\left(\frac{P}{A_0}\right)f_2(t) \tag{1.7}$$

但是$f_1(P/A_0)$和$f_2(t)$表示式如何确定，这个问题还没有人解决过。

程沅生在理论上给出了在任意载荷谱 $P(t)$作用下 $\omega[P(t)/A_0,t]$ 的表示式[5]。现在我们利用[5]的结论来研究 $f_1(P/A_0)$和$f_2(t)$的性质，我们发现，$f_2(t)$ 是个线性函数，我们还给出了确定 $\varphi(P/A_0,t)=f_1(P/A_0)f_2(t)$表示式的具体方法。这就是本文所要解决的问题。

二、表示式的确定

在P为t的非下降函数时，程沅生导出[5]

$$\omega\left(\frac{P}{A_0},t\right)=g\left[\frac{P(t)}{A_0}\right]+f_2'(0)\int_0^t f_1\left[\frac{P(\tau)}{A_0}\right]d\tau \tag{2.1}$$

当 $P\equiv$const时由上式得到

$$\omega\left(\frac{P}{A_0},t\right)=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+f_2'(0)f_1\left(\frac{P}{A_0}\right)t \tag{2.2}$$

比较 (1.7) 式和 (2.2) 式，我们得到

$$f_2(t)=f_2'(0)t \tag{2.3}$$

这表明$f_2(t)$是时间t的线性函数。这个结论可以通过实验来验证。

实验可以这样做：首先将横截面面积为A_0的未受损伤的试样加载到P^* (P^*是较小的不引起试样损伤的载荷值)，测出伸长率ε_1

$$\frac{P^*}{A_0}=E\varepsilon_1 \tag{2.4}$$

其中E为材料的杨氏模量。然后将试样加载到$P_0(P_0>P^*)$，这是一个可以产生损伤(即引起横截面实际承载面积减小) 的载荷值。加载 $t_i(i=1,2,\cdots)$ 时间后卸载，由于空穴的产生横截面实际承载面积已变为$A_e(P_0,t_i)$，再加载到P^*值[参见图1(b)、(c)、(d)、(e)]，测出它们的伸长率$\varepsilon_2(P_0,t_i)$。由于

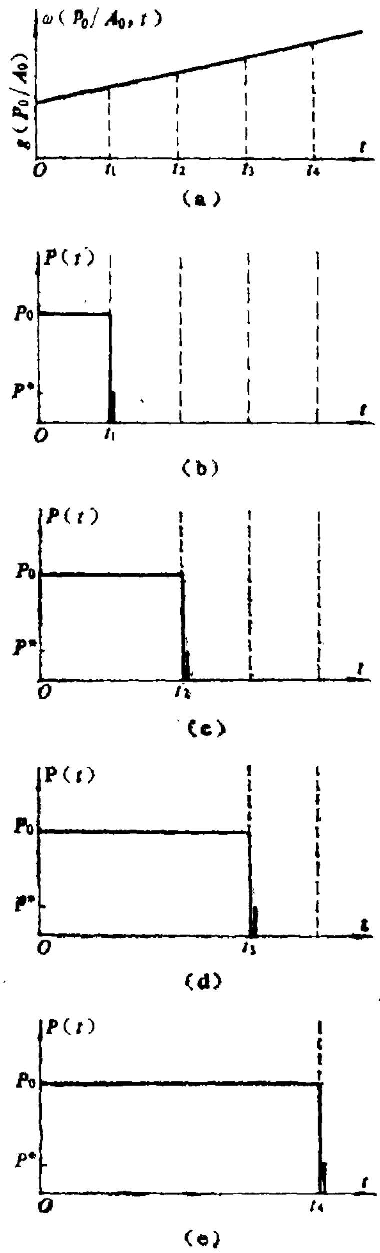

图 1

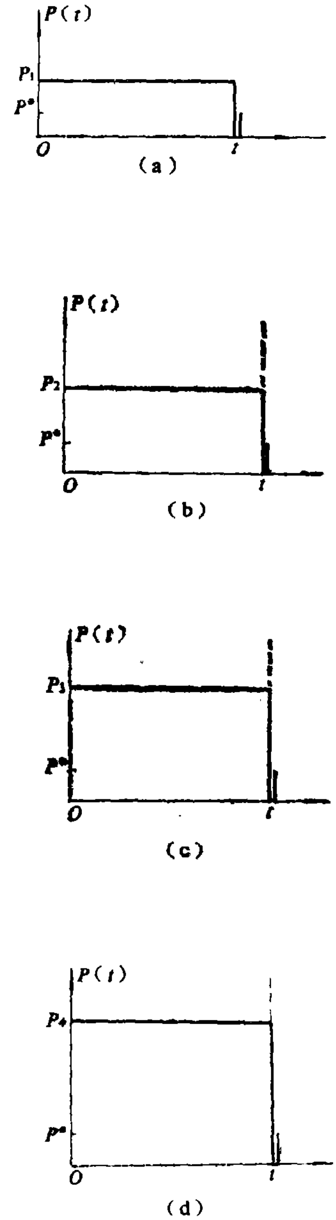

图 2

$$\frac{P^*}{A_e(P_0,t_i)}=E\varepsilon_2(P_0,t_i) \tag{2.5}$$

我们得到

$$\omega\left(\frac{P_0}{A_0},t_i\right)=1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2(P_0,t_i)} \tag{2.6}$$

绘出$\omega(t)$与t的实验曲线。实验曲线应为在ω轴上截距为$g(P_0/A_0)$的直线[见图1(a)]。载荷P_0值愈大，图 1(a)中直线在ω轴上的截距越大，直线的斜率也越大。

下面再来看$f_2(P/A_0)$的表示式。即然$f_2(t)=f_2'(0)t$，于是

$$\varphi\left(\frac{P}{A_0},t\right)=f_2'(0)f_1\left(\frac{P}{A_0}\right)t \tag{2.7}$$

记

$$\Phi\left(\frac{P}{A_0}\right)=f_2'(0)f_1\left(\frac{P}{A_0}\right) \tag{2.8}$$

由（1.7）式、（2.7）式和（2.8）式得到

$$\Phi\left(\frac{P}{A_0}\right)=\frac{\omega\left(\frac{P}{A_0},t\right)-g\left(\frac{P}{A_0}\right)}{t} \tag{2.9}$$

因为$\Phi(P/A_0)$与时间t无关，所以我们可以任选一个时刻t，对于不同的载荷值$P_i(i=1,2,\cdots)$，测出$\varepsilon_2(P_i,t)$。根据

$$\omega=1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2(P_i,t)} \tag{2.10}$$

得到$\omega(P_i/A_0,t)$值。而$g(P_i/A_0)$的确定方法已由[4]指出，从而由(2.9)式我们就可以得到$\Phi(P_i/A_0)$的值。将测出的$\Phi(P_i/A_0)$值标在$\Phi\sim P/P_b$的坐标系中（其中P_b为试样的极限载荷），绘出实验曲线（参见图3）。由这条实验曲线我们就可以确定出函数$\Phi(P/A_0)$的表示式。于是，在$P\equiv$const 条件下，持续损伤$\varphi(P/A_0,t)$表示式问题就得到了解决。

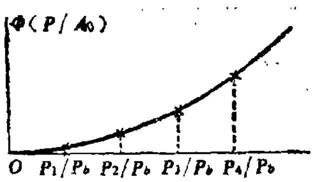

图 3

如果$\Phi(P/A_0)$的实验曲线可表示为幂函数形式

$$\Phi\left(\frac{P}{A_0}\right)=a\left(\frac{P}{P_b}\right)^n \tag{2.11}$$

其中a、n可由实验确定出。

记

$$\frac{a}{\sigma_b^n}=\alpha$$

其中σ_b是抗拉强度。(2.11) 式可写成

$$\Phi\left(\frac{P}{A_0}\right)=\alpha\sigma^n \tag{2.12}$$

则损伤参数可表示成这样的形式

$$\omega\left(\frac{P}{A_0},t\right)=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+\alpha\left(\frac{P}{A_0}\right)^n t \tag{2.13}$$

三、结　论

对于非老化脆性材料来讲，在拉伸载荷作用下，瞬时损伤$g(P/A_0)$表示式的具体确定方法由Piechnik和Pachla 指出了[4]。当$P\equiv$const 时，持续损伤$\varphi(P/A_0,t)$表示式的具体确定方法则由本文解决了。它可以表示为

$$\varphi\left(\frac{P}{A_0},t\right)=\Phi\left(\frac{P}{A_0}\right)t \tag{3.1}$$

从而

$$\omega=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+\Phi\left(\frac{P}{A_0}\right)t \tag{3.2}$$

在任意载荷谱 $P(t)$ 作用下，损伤参数ω的表示式问题由程沅生解决了[5]。

于是，非老化脆性材料在拉伸载荷作用下连续损伤参数变化规律表示式问题，在理论上和具体方法上由[4]、[5]和本文基本上解决了。下面的问题是如何将这些理论和方法应用于工程材料和结构的实际问题中去。

参 考 文 献

[1] Kachanov, L. M., On failure time under conditions of creep, (in Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 8 (1958), 26—31.

[2] Odqvist, F. K. G. and J. Hult, Some aspect of creep rupture, *Arkiv for Fysik*., 19, 4 (1961), 379—382.

[3] Broberg, H., A new criterion for brittle creep rupture, *J. Appl. Mech*., 41 (1974), 809—811.

[4] Piechnik, S. and H. Pachla, Law of continuous damage parameter for non-ageing materials, *Engng Fracture Mech*., 12, 2 (1979), 199—209.

[5] Cheng Yuan-sheng, A review on the law of continuous damage parameter for non-ageing materials, *Engng Fracture Mech*., 17, 3 (1983), 211—217.

Determination of Expression of Continuous Damage Parameter for Non-Ageing Materials Under Constant Tensije Load

Cheng Yuan-sheng

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

Under constant uniaxial tensile load continuous damage parameter for non-ageing brittle materials may be expressed as

$$\omega\left(\frac{P}{A_0},t\right)=g\left(\frac{P}{A_0}\right)+f_1\left(\frac{P}{A_0}\right)f_2(t)$$

The determination of the expression for $g(P/A_0)$ had been pointed out by[4]. But how to determine the expressions for $f_1(P/A_0)$ and $f_2(t)$, the solution to this problem is not yet in sight. Now the solution to this problem is given by the present paper. This paper points out $f_1(P/A_0)f_2(t)=\Phi(P/A_0)t$ and the method of the determination of the expression for $\Phi(P/A_0)$.