应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

轴对称载荷下旋转壳弹性小应变的轴向任意大挠度问题*

黄　黔

（上海工业大学，1984年10月1日收到）

摘　要

本文建议以径向位移u，轴向位移w，子午线切线转角χ，径向内力H和经向弯矩M_φ作为描述轴对称载荷下旋转壳弹性小应变的轴向任意大挠度问题的状态变量．在此基础上，本文建立了整体坐标下的一阶非线性微分方方程．进而用权余法得到该问题的最小位能原理．又用引入拉格朗日乘子并加以识别的方法，得到这一问题的广义变分原理．

本文还提出了以载荷参数为尺度的变特征无量纲化方法，可以有效地提高非线性计算的成功率．所得到的无量纲微分方程和无量纲位能原理，可以作为轴对称壳任意大挠度问题数值计算的理论基础．

一、引　言

在工程上，有一些变形特别大，精度比较高，重复性很好的弹性敏感元件．它们由承受轴对称载荷的旋转壳构成，在未发生失稳屈曲和塑性屈服的弹性小应变阶段，可以有很大的轴向位移，我们称之为轴对称壳任意大挠度问题．通常，它们具有以下特点：

1．在弹性小应变范围内，可出现有限的转角，产生很大的轴向位移．挠度可达壳体厚度的二十倍以上．转角可达0.3弧度．

2．初始余纬度角变化范围大，因而子午线切向的位移也可能是大位移．

3．虽然外径远大于厚度，但局部曲率半径与厚度之比可能并不很大．

4．旋转壳母线可能由多段曲线衔接而成，衔接处子午线曲率和切线方向都可能发生突变．

5．壳体厚度沿母线有变化．

6．曲率半径沿母线有变化．

E．Reissner[1,3,12]采用整体坐标，并以余纬度角φ和径向内力的函数rH为基本变量，给出混合法的两个二阶微分方程，可以适应旋转壳在轴对称载荷下，在弹性小应变范围内的轴向大位移和子午线切线的有限转角，可以适应大范围的初始余纬度角，消除了用剪力的函数r_2Q_φ作基本变量时方程在法线与旋转轴平行处的奇异性，为轴对称壳任意大挠度问题奠定

* 钱伟长推荐．

了理论基础。R. Schmidt[2] (1977)提出以径向位移 u 和余纬度角 φ 为基本变量的位移法的两个二阶微分方程。Л. Е. Андреева[13] (1981)给出的方程和 Reissner 方程相近，她用差分法对一批弹性元件做了计算。

本文选取 u, w, χ, H, M_φ 作为状态变量，建立的一阶微分方程组和 Reissner 方程所依据的一阶微分关系是一致的。在子午线曲率突变和切线方向突变处这组状态变量仍保持连续，突变点可以不再作为边界，计算可以连续进行。在一阶方程组中，沿母线变化的厚度和曲率半径以其本身的形式存在，不需要引入导数，这都给计算带来方便。

钱伟长教授提出引入拉格朗日乘子并加以识别的方法[5~9] (1964, 1979, 1983)，并在跨度远小于曲率半径(扁壳)的假设下给出了薄壳大挠度广义变分原理[7] (1980)。鹫津久一郎[10] (1968, 1975)给出了壳体线性问题的位能表达式，并进而对应变位移关系式中某些项进行了非线性讨论。本文从整体坐标下一阶非线性微分关系出发，用权余法建立了轴对称壳任意大挠度问题的最小位能原理。又用引入拉格朗日乘子并加以识别的方法给出了该问题的广义变分原理。

本文提出变特征无量纲化方法，用载荷参数作为无量纲化因子的分母，当载荷趋近于零，出现奇异性。本文证明，在这一奇异点无量纲解趋于一个有穷极限。这一极限正是原方程线性简化解的无量纲形式，因而载荷为零这一点是可去奇点。

利用变特征无量纲化方法，摄动法所得到的轴向挠度的有效值超过壳体厚度的二十倍，打破了摄动法只能计算壳体厚度四倍以内有限挠度的传统说法。应当指出，挠度有效范围，除了受所采用的数学方法的限制以外，还受问题物理本质的限制。深波纹的弹性敏感元件具有一个很大的拟线性变形范围。

二、基 本 方 程

R. Schmidt[2] (1977) 把 E. Reissner 在文[1, 3]中建立的关系式归结为：

$$r=r(\psi),\quad z=z(\psi),\quad \frac{1}{A}\frac{dr}{d\psi}=\cos\varphi_0,\quad \frac{1}{A}\frac{dz}{d\psi}=\sin\varphi_0 \tag{2.1}$$

$$k_{\varphi_0}=\frac{1}{A}\frac{d\varphi_0}{d\psi},\ k_{\theta_0}=\sin\varphi_0/r,\ \varphi=\varphi_0+\chi,\ k_\varphi=\frac{1}{A}\frac{d\varphi}{d\psi}\Big/(1+\varepsilon_\varphi),\ k_\theta=\sin\varphi/r(1+\varepsilon_\theta) \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{A}\frac{du}{d\psi}=\varepsilon_\varphi\cos\varphi+\cos\varphi-\cos\varphi_0 \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dw}{d\psi}=-(\varepsilon_\varphi\sin\varphi+\sin\varphi-\sin\varphi_0) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_\varphi=\left(\frac{1}{A}\frac{du}{d\psi}+\cos\varphi_0\right)\Big/\cos\varphi-1,\quad \varepsilon_\theta=u/r \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{A}\frac{d(r\varepsilon_\theta)}{d\psi}=\varepsilon_\varphi\cos\varphi+\cos\varphi-\cos\varphi_0 \tag{2.6}$$

$$N_\varphi=\frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_\theta),\quad N_\theta=\frac{Et}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_\varphi+\varepsilon_\theta) \tag{2.7}$$

$$M_\varphi=-\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{A}\frac{d\chi}{d\psi}+\nu(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r\right] \tag{2.8}$$

$$M_\theta=-\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\nu}{A}\frac{d\chi}{d\psi}+(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r\right] \tag{2.9}$$

$$N_\varphi=H\cos\varphi+V\sin\varphi,\quad Q_\varphi=-H\sin\varphi+V\cos\varphi \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{A}\frac{d(rH)}{d\psi}-N_\theta+r\bar{p}_r=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{A}\frac{d(rV)}{d\psi}-r\bar{p}_z=0 \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{A}\frac{d(rM_\varphi)}{d\psi}-M_\theta\cos\varphi-rQ_\varphi(1+\varepsilon_\varphi)=0 \tag{2.13}$$

其中ψ——描述各变量沿旋转壳母线分布规律的基本过程参数；$Ad\psi$——子午线微弧元；r，θ，z——变形前壳体中面上一点的整体柱坐标；φ_0——初始余纬度角；φ——变形后余纬度角；k_{φ_0}，k_{θ_0}——变形前壳体中面的主曲率；k_φ，k_θ——变形后壳体中面的主曲率；u，w——壳体中面上一点的径向和轴向位移；ε_φ，ε_θ——壳体中曲面的经向和环向应变；χ——子午线切线转角；N_φ，N_θ，H，V——经向、环向、径向和轴向内力；Q_φ——剪力；M_φ，M_θ——经向、环向弯矩；$\bar{p}_r$，$\bar{p}_z$——径向、轴向均布压力；E——杨氏模量；ν——泊松比；t——壳体厚度。位移、内力的方向符号规定如图1所示。

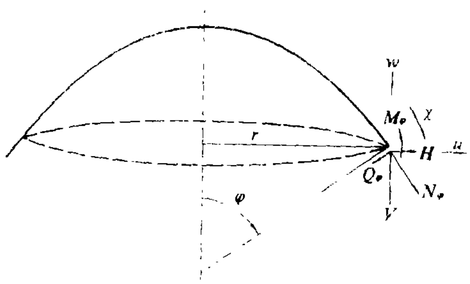

图　1

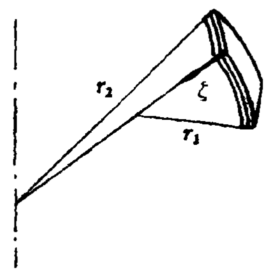

图　2

应当指出，上述关系式是在 Kirchhoff-Love 假设下得到的，即忽略横向剪切变形和法向挤压变形。下面的讨论，将继续在这一假设下进行。为了适应局部曲率半径可能较小的情况，有必要考虑中面曲率对内力-应变关系的影响。壳体中任意一点的应变：

$$e_\varphi=\frac{\varepsilon_\varphi-\zeta x_\varphi}{1-\zeta/r_1},\quad e_\theta=\frac{\varepsilon_\theta-\zeta x_\theta}{1-\zeta/r_2} \tag{2.14}$$

式中ε_φ，ε_θ如前所述是壳体中面应变；ζ为局部法向坐标，$\zeta\in[-t/2,\ t/2]$，如图2所示；r_1，r_2为壳体中面主曲率半径；x_φ，x_θ为中面挠率。取

$$r_1=1/k_{\varphi_0},\quad r_2=1/k_{\theta_0},\quad x_\varphi=\frac{1}{A}\frac{d\chi}{d\psi},\quad x_\theta=(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r \tag{2.15}$$

由虎克定律

$$\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\nu^2}(e_\varphi+\nu e_\theta),\quad \sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(e_\theta+\nu e_\varphi) \tag{2.16}$$

壳体中面内力和弯矩为

$$N_\varphi=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_\varphi(1-\zeta/r_2)d\zeta,\quad N_\theta=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_\theta(1-\zeta/r_1)d\zeta \tag{2.17}$$

$$M_\varphi=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_\varphi\zeta(1-\zeta/r_2)d\zeta,\ M_\theta=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_\theta\zeta(1-\zeta/r_1)d\zeta \tag{2.18}$$

积分前忽略高于ζ^2的各项，可得

$$N_\varphi=\frac{Et}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_\theta+\frac{t^2}{12}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{\varepsilon_\varphi}{r_1}-\chi_\varphi\right)\right] \tag{2.19}$$

$$N_\theta=\frac{Et}{1-\nu^2}\left[\nu\varepsilon_\varphi+\varepsilon_\theta+\frac{t^2}{12}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{\varepsilon_\theta}{r_2}-\chi_\theta\right)\right] \tag{2.20}$$

$$M_\varphi=\frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\chi_\varphi+\nu\chi_\theta-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\varepsilon_\varphi\right] \tag{2.21}$$

$$M_\theta=-\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\nu\chi_\varphi+\chi_\theta-\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\varepsilon_\theta\right] \tag{2.22}$$

我们用(2.19～2.22)式代替(2.7～2.9)式，作为轴对称壳任意大挠度问题的内力-应变关系。记

$$\Gamma=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),\ \omega_1=1+\frac{t^2}{12}\Gamma/r_1,\ \omega_2=1-\frac{t^2}{12}\Gamma/r_2 \tag{2.23}$$

$$\{N_\varphi,\ N_\theta,\ -M_\varphi,\ -M_\theta\}^T=\mathbf{D}\{\varepsilon_\varphi,\ \varepsilon_\theta,\ \chi_\varphi,\ \chi_\theta\}^T \tag{2.24}$$

$$\mathbf{D}=\frac{Et}{1-\nu^2}\begin{vmatrix}\omega_1 & \nu & -\frac{t^2}{12}\Gamma & 0\\ \nu & \omega_2 & 0 & \frac{t^2}{12}\Gamma\\ -\frac{t^2}{12}\Gamma & 0 & \frac{t^2}{12} & \frac{t^2}{12}\nu\\ 0 & \frac{t^2}{12}\Gamma & \frac{t^2}{12}\nu & \frac{t^2}{12}\end{vmatrix} \tag{2.25}$$

假设旋转壳受到集中力P^*（作用在中心或内缘），壳壁受到法向均布压力q^*，考虑挠角χ对平衡的影响，可以得到如下平衡方程

$$\frac{1}{A}\frac{d(rH)}{d\psi}-N_\theta+q^*r\sin\varphi=0 \tag{2.26}$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{P^*}{\pi r}+q^*r\right) \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{A}\frac{d(rM_\varphi)}{d\psi}-M_\theta\cos\varphi-rQ_\varphi(1+\varepsilon_\varphi)=0 \tag{2.28}$$

E. Reissner[1,3]选φ，rH为基本变量，给出二阶微分方程组，方程要求φ，rH满足C^1连续。R. Schmit[2]选u，φ为基本变量，给出二阶微分方程，方程要求u，φ满足C^1连续。在求解 Reissner 方程或 Schmidt 方程之后，还要根据独立的微分关系(2.4)式，才能确定挠度w。因此可以认为 Reissner 解法的状态变量是$\{\varphi,\ d\varphi/d\psi,\ rH,\ drH/d\psi,\ w\}$，Schmidt 解法的状态变量是$\{u,\ du/d\psi,\ \varphi,\ d\varphi/d\psi,\ w\}$。在旋转壳子午线发生曲率突变或切向突变处 Reissner 或 Schmidt 解法的状态变量不能都保持连续，所以必须作为边界处理，建立适当的连接条件。当厚度和曲率半径沿母线变化时，Reissner 或 Schmidt 方程中出现厚度和曲率半径的一阶导数，这也使问题复杂化，应当指出，这种间断和复杂化，是在

建立二阶微分方程组时人为造成的，只要恰当选取状态变量，并对各变量的方向符号作统一的规定，一阶微分方程组在子午线曲率突变和切向突变点可以不发生间断，方程中也不出现厚度和曲率半径的导数，从而降低对函数光滑性的要求，使分析和计算更为简便，也更为准确。在 Reissner 所建立的关系式(2.1～2.13)的基础上，并进一步考虑用 (2.19～2.22) 式作为内力-应变关系，用(2.26～2.28)式作为平衡方程，我们可以选取 $\{u,\ w,\ \chi,\ H,\ M_\varphi\}$ 作为状态变量，给出一阶微分方程组：

$$\frac{1}{A}\frac{du}{d\psi}=\varepsilon_\varphi\cos\varphi+\cos\varphi-\cos\varphi_0 \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dw}{d\psi}=-\varepsilon_\varphi\sin\varphi-(\sin\varphi-\sin\varphi_0) \tag{2.30}$$

$$\frac{1}{A}\frac{d\chi}{d\psi}=-\frac{12(1-\nu^2)}{Et^3}M_\varphi-\nu(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r+\Gamma\varepsilon_\varphi \tag{2.31}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dH}{d\psi}=-\left\{H\cos\varphi+q^*r\sin\varphi-\frac{Et}{1-\nu^2}\left[\nu\varepsilon_\varphi+\omega_2u/r+\frac{t^2}{12}\Gamma(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r\right]\right\}\Big/r \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dM_\varphi}{d\psi}=-\left\{(1-\nu)M_\varphi+\frac{Et^3}{12}[(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r+\Gamma(u/r+\nu\varepsilon_\varphi)/(1-\nu^2)]\right\}\cos\varphi/r$$
$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{P^*}{\pi r}+q^*r\right)\cos\varphi-H\sin\varphi\right](1+\varepsilon_\varphi) \tag{2.33}$$

其中
$$\varepsilon_\varphi=\left\{\frac{1-\nu^2}{Et}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{P^*}{\pi r}+q^*r\right)\sin\varphi+H\cos\varphi-\Gamma M_\varphi\right]\right.$$
$$\left.-\nu\left[u+\frac{t^2}{12}\Gamma(\sin\varphi-\sin\varphi_0)\right]\Big/r\right\}\Big/(2-\omega_2) \tag{2.34}$$

方程(2.29～2.34)式构成具有子午线曲率突变和切向突变的旋转壳在轴向集中力和均布压力作用下发生任意大挠度问题的一阶微分方程组。这一方程组可以适应引言中提到的弹性元件大变形问题的六个特点。

三、变特征无量纲化方法

为了解决复合载荷下的变形问题，我们首先引入统一的载荷参数 $\tilde{q}$。

$$\tilde{q}=\max\{q^*,\ P^*/0.25\pi D^2\} \tag{3.1}$$

式中D为旋转壳外直径。在弹性小应变范围内，一般可认为变形与历史无关，我们可以把轴向集中载荷P^*和均布压力q^*依$\tilde{q}$按比例加载的过程作为计算中的基本加载过程。

引入无量纲变量

$$\left.\begin{array}{l}P=P^*/2\pi\tilde{q}D^2,\ Q=q^*/2\tilde{q},\ \beta=\tilde{q}D/Et_1,\ h=t/t_1,\ \alpha=A/D\\ \mu=t_1/2\sqrt{3}D,\ X=u/\beta D,\ Y=w/\beta D,\ Z=\chi/\beta, T=H/\tilde{q}D\\ M=M_\varphi\Big/\dfrac{\tilde{q}t_1^2}{12(1-\nu^2)},\ e=\varepsilon_\varphi/\beta, \rho=r/D, f=(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/\beta\\ g=(\cos\varphi-\cos\varphi_0)/\beta,\ \gamma=D\Gamma,\ \omega=1+\gamma\mu^2h^2\sin\varphi_0/\rho\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

方程(2.29～2.34)无量纲化为

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dX}{d\psi}=e\cos\varphi+g \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dY}{d\psi}=-e\sin\varphi-f \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dZ}{d\psi}=-M/h^3-\nu f/\rho+\gamma e \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{d\psi}=-\left\{T\cos\varphi+2Q\rho\sin\varphi-\frac{h}{1-\nu^2}\left[\nu e+(2-\omega)X/\rho+\gamma\mu^2h^2f/\rho\right]\right\}\Big/\rho \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dM}{d\psi}=-\{(1-\nu)M+h^3[(1-\nu^2)f/\rho+\gamma(X/\rho+\nu e)]\}\cos\varphi/\rho$$
$$-[(1-\nu^2)/\mu^2][T\sin\varphi-(P/\rho+Q\rho)\cos\varphi](1+\beta e) \tag{3.7}$$

$$e=\{[(1-\nu^2)/h][(P/\rho+Q\rho)\sin\varphi+T\cos\varphi]-\nu(X+\gamma\mu^2h^2f)/\rho-\gamma\mu^2M/h\}/\omega \tag{3.8}$$

无量纲方程中含有无量纲参数 α, β, γ, μ, ω, h, 其中 α 可称为广义曲率半径, β是无量纲载荷参数, μ 是相对厚度, h 是厚度变化系数。β, μ 是小参数。实验和数值计算表明，当旋转壳母线形状确定以后，相对厚度 μ 是最重要的几何特征参数。上面式中 t_1 是旋转壳的名义厚度或平均厚度，是整体量。

下面讨论无量纲化的作用和奇异性。记

$$\{U_i\}=\{u,\ w,\ \chi,\ H,\ M_\varphi\}^T,\ \{u_i\}=\{X,\ Y,\ Z,\ T,\ M\}^T \tag{3.9}$$

由（3.2）可知状态变量的无量纲化因子的分母都和载荷参数 $\tilde{q}$ 成正比，因而有

$$u_i=U_i/a_i\tilde{q}\,,\ a_i=\text{const},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5 \tag{3.10}$$

在加载的过程中，无量纲化因子是变量，这是它和一般无量纲化方法的区别。当$\tilde{q}=0$，无量纲解无定义，因而也可称之为奇异无量纲化方法。

在 $U_i\sim\tilde{q}$ 平面上，解曲线的割线斜率记为 K_i

$$K_i=U_i/\tilde{q},\qquad \therefore\ \ u_i=K_i/a_i \tag{3.11}$$

可见无量纲解 u_i 和 $U_i\sim\tilde{q}$ 解曲线的割线斜率成正比。当 $\tilde{q}\to0$, u_i 趋近于 $U_i\sim\tilde{q}$ 解曲线的零点切线斜率。定义 U_i 为消除了初始应力和初始应变影响的状态变量，只要$U_i\sim\tilde{q}$ 解曲线 C^1连续地通过零点，而且零点切线的斜率为有限值，则 u_i 在 $\tilde{q}=0$ 处存在有穷极限解 u_i^0, u_i^0 是原方程在 $\tilde{q}=0$ 处线性简化解的无量纲形式。此时，$\beta=0$ 或 $\tilde{q}=0$ 是可去奇点。

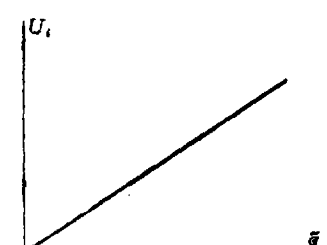

图3a 线性方程

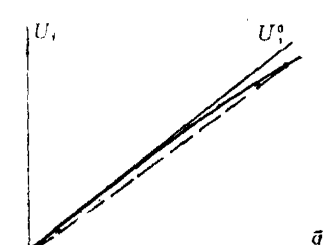

图3b 拟线性方程

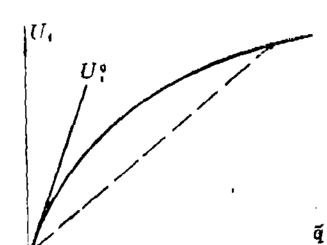

图3c 强非线性方程

对于线性方程，$U_i\sim\tilde{q}$ 解曲线是一条过原点的直线。

$$U_i=K_i\tilde{q},\ K_i=\text{const},\qquad \therefore\ \ u_i=K_i/a_i=\text{const},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5 \tag{3.12}$$

可知线性方程，经过以载荷为尺度的变特征无量纲化，相应的无量纲方程具有常数解，完全消除了不同载荷下无量纲解的差别。

对于拟线性方程，$U_i \sim \tilde{q}$ 解曲线接近于一条过原点的直线，割线斜率变化很小。因而，u_i 的变化也很小。

$$|K_i - K_i^0| \ll |K_i^0|, \qquad \therefore \quad |u_i - u_i^0| \ll |u_i^0| \tag{3.13}$$

拟线性方程经变特征无量纲化，可以大大缩小不同载荷下无量纲解的差别，明显扩展摄动解的有效范围。对于弹性小应变任意大挠度的拟线性问题，摄动法行之有效，不受以往数学方法造成的挠度与厚度比值的限制。此时，选取摄动参数，不宜选位移变量本身，可以选其非线性偏差。

对于非线性较为显著的方程，$U_i \sim \tilde{q}$ 解曲线的割线斜率可以有较大的变化。此时能否用摄动法，需要针对具体问题做进一步探讨。但是无论如何，在原点附近，还有一个拟线性区。在这个范围内，变特征无量纲化使计算更容易成功，而作为后续计算的基础。例如采用非线性规划的直接方法，在了解小位移拟线性区的非线性趋势之后，对较大位移的计算可以通过适当的外推，提供良好的初始计算点。

四、最小位能原理

以 u, w 作为描述轴对称壳变形的两个独立的位移变量。由(2.3～2.4)式给出 ε_φ, χ的微分表达式和变分关系式。记 $ds = A d\psi$, 有

$$\varepsilon_\varphi = \frac{du}{ds}\cos\varphi - \frac{dw}{ds}\sin\varphi + \cos\chi - 1 \tag{4.1}$$

$$\sin\chi = -\frac{du}{ds}\sin\varphi - \frac{dw}{ds}\cos\varphi \tag{4.2}$$

$$\delta\varepsilon_\varphi = \cos\varphi\,\delta\frac{du}{ds} - \sin\varphi\,\delta\frac{dw}{ds} \tag{4.3}$$

$$\delta\chi = -\left(\sin\varphi\;\delta\frac{du}{ds} + \cos\varphi\;\delta\frac{dw}{ds}\right)\Big/(1+\varepsilon_\varphi) \tag{4.4}$$

由于轴对称性，可以把下面的积分归结到旋转壳的母线 Ω 上。

对平衡方程(2.11～2.13)和外力已知边界条件做权余积分，记为I，设 F^*, G^*, H^*为壳体内部的任意函数，R^*, S^*, T^* 为边界上的任意函数

$$I = 2\pi\int_\Omega\left\{-\left(\frac{drH}{ds} - N_\theta + r\bar{p}_r\right)F^* + \left(\frac{drV}{ds} - r\bar{p}_z\right)G^* + \left[\frac{drM_\varphi}{ds} - M_\theta\cos\varphi\right.\right.$$
$$\left.\left. - rQ_\varphi(1+\varepsilon_\varphi)\right]H^*\right\}ds + \{2\pi r(\bar{H}R^* - \bar{V}S^* - \bar{M}_\varphi T^*)\}\Big|_{\Gamma_\sigma} = 0 \tag{4.5}$$

不失一般性，可取

$$F^* = \delta u,\ G^* = \delta w,\ H^* = \delta\chi \qquad (\text{在壳体内部}) \tag{4.6}$$

$$R^* = \delta u,\ S^* = \delta w,\ T^* = \delta\chi \qquad (\text{在外力已知边界上}) \tag{4.7}$$

分部积分，利用位移边界条件和应变-位移关系，可以得到

$$I = \iint_A (N_\varphi\delta\varepsilon_\varphi + N_\theta\delta\varepsilon_\theta - M_\varphi\delta\chi_\varphi - M_\theta\delta\chi_\theta)\,dA - \iint_A(\bar{p}_r\delta u + \bar{p}_z\delta w)\,dA$$
$$-\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{H}\delta u - \bar{V}\delta w - \bar{M}_\varphi\delta\chi)\,dL = 0 \tag{4.8}$$

根据(2.24, 2.25)，内力$\{N_\varphi,\ N_\theta,\ -M_\varphi,\ -M_\theta\}^T$是应变$\{\varepsilon_\varphi,\ \varepsilon_\theta,\ x_\varphi,\ x_\theta\}^T$的线性函数，且联系二者的**D**矩阵是对称阵。容易证明，权余积分（4.8）式是完全变分式，可写成一个泛函的变分，记这个泛函为Π：

$$\Pi=\frac{1}{2}\iint_A\frac{Et}{1-\nu^2}\Big\{\omega_1\varepsilon_\varphi^2+\omega_2\varepsilon_\theta^2+2\nu\varepsilon_\varphi\varepsilon_\theta+\frac{t^2}{12}[x_\varphi^2+x_\theta^2+2\nu x_\varphi x_\theta$$

$$+2\Gamma(\varepsilon_\theta x_\theta-\varepsilon_\varphi x_\varphi)]\Big\}dA-\iint_A(\bar{p}_r u+\bar{p}_z w)dA-\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{H}u-\bar{V}w-\bar{M}_\varphi\chi)dL \quad (4.9)$$

$$\delta\Pi=I=0 \quad (4.10)$$

我们得到轴对称壳任意大挠度问题的最小位能原理：在一切具有足够光滑性，并满足应变、挠角、挠率——位移关系(4.1, 2.5b, 4.2, 2.15c,d)和位移边界条件的允许应变$\varepsilon_\varphi,\varepsilon_\theta$，允许挠角$\chi$，允许挠率$x_\varphi$，$x_\theta$，以及允许位移$u$，$w$中，真实的应变、挠角、挠率和位移必使根据内力-应变关系(2.19～2.22)写出的泛函(4.9)式取极小值，即必使根据（2.19～2.22）式得到的相应内力弯矩满足平衡方程(2.11～2.13)和外力已知边界条件。

由于建立位能原理的步骤，步步皆可逆推，所以位能原理作为变分驻值原理容易得证。钱伟长教授[7](1980)证明了在应力应变曲线向应变偏斜的情况下弹性体大挠度位能驻值原理是最小位能原理。

五、广义变分原理

最小位能原理有三个约束条件：应变位移关系（4.1, 2.5b, 4.2, 2.15c,d)，位移已知边界条件和内力应变关系(2.19～2.22)。用钱伟长教授提出的引入拉格朗日乘子并加以识别的方法[5~7]和高阶乘子法[8,9]可以把这些约束条件引入泛函成为变分取驻值的欧拉方程和自然边界条件，从而得到没有约束条件的广义变分原理。鹫津久一郎[10]和卞学鐄教授[11]也提出在变分原理中引用拉格朗日乘子法。

本文指出，因为一阶乘子是一个物理量，可以独立变分。由乘积的变分规则可知，在引入预期的关系式的同时，还要出现其它变分项，将引起泛函进一步的变化。

把泛函(4.9)中位能积分记为U，位能密度记为U^0

$$U^0=\frac{1}{2}\frac{Et}{1-\nu^2}\Big\{\omega_1\varepsilon_\varphi^2+\omega_2\varepsilon_\theta^2+2\nu\varepsilon_\varphi\varepsilon_\theta+\frac{t^2}{12}[x_\varphi^2+x_\theta^2+2\nu x_\varphi x_\theta+2\Gamma(\varepsilon_\theta x_\theta-\varepsilon_\varphi x_\varphi)]\Big\} \quad (5.1)$$

用拉格朗日乘子法引入应变位移关系和位移已知边界条件。

$$\Pi_G=\iint_A\Big\{U^0+\lambda_1\Big(\varepsilon_\varphi-\frac{du}{ds}\cos\varphi+\frac{dw}{ds}\sin\varphi-\cos\chi+1\Big)+\lambda_2(\varepsilon_\theta-u/r)+\lambda_3\Big(x_\varphi-\frac{d\chi}{ds}\Big)$$

$$+\lambda_4[x_\theta-(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r]+\lambda_5\Big(\sin\chi+\frac{du}{ds}\sin\varphi+\frac{dw}{ds}\cos\varphi\Big)-\bar{p}_r u-\bar{p}_z w\Big\}dA$$

$$-\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{H}u-\bar{V}w-\bar{M}_\varphi\chi)dL+\int_{\Gamma_u}\{\mu_1(u-\bar{u})+\mu_2(w-\bar{w})+\mu_3(\chi-\bar{\chi})\}dL \quad (5.2)$$

取变分，分部积分，并利用(4.1, 4.2)式，由于δu，δw，$\delta\varepsilon_\varphi$，$\delta\varepsilon_\theta$，$\delta x_\varphi$，$\delta x_\theta$，$\delta\chi$，$\delta\lambda_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$，$\delta\mu_j$（$j=1,\ 2,\ 3$）的任意性，泛函(5.2)的欧拉方程和自然边界条件中包含应变位移关系(4.1, 2.5b, 4.2, 2.15c, d)和位移已知边界条件。此外，还包含以下各式：

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_\varphi}+\lambda_1=0,\quad \frac{\partial U^0}{\partial \varepsilon_\theta}+\lambda_2=0,\quad \frac{\partial U^0}{\partial x_\varphi}+\lambda_3=0,\quad \frac{\partial U^0}{\partial x_\theta}+\lambda_4=0 \tag{5.3}$$

$$\frac{d}{ds}[r(\lambda_1\cos\varphi-\lambda_5\sin\varphi)]-\lambda_2-r\bar{p}_r=0 \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{ds}[r(\lambda_1\sin\varphi+\lambda_5\cos\varphi)]+r\bar{p}_z=0 \tag{5.5}$$

$$\frac{d}{ds}(r\lambda_3)-\lambda_4\cos\varphi+\lambda_5 r(1+\varepsilon_\varphi)=0 \tag{5.6}$$

$$-\bar{\lambda}_1\cos\varphi+\bar{\lambda}_5\sin\varphi=\bar{H},\ -\bar{\lambda}_1\sin\varphi-\bar{\lambda}_5\cos\varphi=\bar{V},\ \bar{\lambda}_3=\bar{M}_\varphi\ \text{（在外力已知边界上）} \tag{5.7}$$

$$\mu_1=\bar{\lambda}_1\cos\varphi-\bar{\lambda}_5\sin\varphi,\ \mu_2=-\bar{\lambda}_1\sin\varphi-\bar{\lambda}_5\cos\varphi,\ \mu_3=\bar{\lambda}_3\ \text{（在位移已知边界上）} \tag{5.8}$$

把以上各式和问题的微分提法中各关系式对比，可以识别各拉格朗日乘子：

$$\lambda_1=-N_\varphi,\ \lambda_2=-N_\theta,\ \lambda_3=M_\varphi,\ \lambda_4=M_\theta,\ \lambda_5=-Q_\varphi \tag{5.9}$$

$$\mu_1=-H,\ \mu_2=V,\ u_3=M_\varphi\quad \text{（在位移已知边界上）} \tag{5.10}$$

从而得到轴对称壳任意大挠度问题的广义变分原理泛函

$$\begin{aligned}\Pi_G=&\frac{1}{2}\iint_A\frac{Et}{1-\nu^2}\Big\{\omega_1\varepsilon_\varphi^2+\omega_2\varepsilon_\theta^2+2\nu\varepsilon_\varphi\varepsilon_\theta+\frac{t^2}{12}[x_\varphi^2+x_\theta^2+2\nu x_\varphi x_\theta\\&+2\Gamma(\varepsilon_\theta x_\theta-\varepsilon_\varphi x_\varphi)]\Big\}dA-\iint_A\Big\{N_\varphi\Big(\varepsilon_\varphi-\frac{du}{ds}\cos\varphi+\frac{dw}{ds}\sin\varphi-\cos\chi+1\Big)\\&+N_\theta(\varepsilon_\theta-u/r)-M_\varphi\Big(\chi_\varphi-\frac{d\chi}{ds}\Big)-M_\theta[x_\theta-(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/r]\Big\}dA\\&-\iint_A(\bar{p}_r u+\bar{p}_z w)dA-\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{H}u-\bar{V}w-\bar{M}_\varphi\chi)dL-\int_{\Gamma_u}[H(u-\bar{u})\\&-V(w-\bar{w})-M_\varphi(\chi-\bar{\chi})]dL\end{aligned} \tag{5.11}$$

六、无量纲最小位能原理

对位能原理进行载荷参数为尺度的变特征无量纲化，采用和微分方程略有不同的无量纲化因子，引入以下无量纲量：

$$\left.\begin{aligned}&Q=q^*\Big/\frac{\tilde{q}}{1-\nu^2},\ \beta=\tilde{q}D/Et_1,\ h=t/t_1,\ X=u/\beta D,\ Y=w/\beta D,\ Z=\chi/\beta\\&e_\varphi=\varepsilon_\varphi/\beta,\ e_\theta=\varepsilon_\theta/\beta,\ K_\varphi=x_\varphi D/\beta,\ K_\theta=x_\theta\cdot D/\beta,\ \Theta_\varphi=N_\varphi\Big/\frac{\tilde{q}D}{1-\nu^2}\\&\Theta_\theta=N_\theta\Big/\frac{\tilde{q}D}{1-\nu^2},\ \Omega_\varphi=M_\varphi\Big/\frac{\tilde{q}D^2}{1-\nu^2},\ \Omega_\theta=M_\theta\Big/\frac{\tilde{q}D^2}{1-\nu^2},\ \rho=r/D,\ \mu=t_1/2\sqrt{3}D\\&\gamma=D\Gamma,\ \omega_1=1+\gamma\mu^2h^2D/r_1,\ \omega_2=1-\gamma\mu^2h^2\sin\varphi_0/\rho,\ dl=ds/D,\ \bar{F}_r=\bar{p}_r\Big/\frac{\tilde{q}}{1-\nu^2}\\&\bar{F}_z=\bar{p}_z\Big/\frac{\tilde{q}}{1-\nu^2}\end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

$$\bar{T}=\bar{H}\Big/\frac{\tilde{q}D}{1-\nu^2},\quad \bar{P}=\bar{V}\Big/\frac{\tilde{q}D}{1-\nu^2},\quad \bar{M}=\bar{M}_\varphi\Big/\frac{\tilde{q}D^2}{1-\nu^2}\qquad \text{（在外力已知边界上）} \tag{6.2}$$

可以得到轴对称壳任意大挠度问题的无量纲最小位能原理泛函：

$$\Pi^*=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{\omega_1 e_\varphi^2+\omega_2 e_\theta^2+2\nu e_\varphi e_\theta+\mu^2h^2[K_\varphi^2+K_\theta^2+2\nu K_\varphi K_\theta+2\gamma(K_\theta e_\theta-K_\varphi e_\varphi)]\}\rho h dl$$

$$-\int_{\Omega}(\bar{F}_r X+\bar{F}_z Y)\rho dl-\rho(\bar{T}X-\bar{P}Y-\bar{M}Z)\Big|_{\Gamma_\sigma} \tag{6.3}$$

变分的约束条件为

$$e_\varphi=\frac{dX}{dl}\cos\varphi-\frac{dY}{dl}\sin\varphi+(\cos\beta Z-1)/\beta,\ e_\theta=X/\rho \tag{6.4}$$

$$K_\varphi=\frac{dZ}{dl},\ K_\theta=(\sin\varphi-\sin\varphi_0)/\beta\rho \tag{6.5}$$

$$\frac{1}{\beta}\sin\beta Z=-\frac{dX}{dl}\sin\varphi-\frac{dY}{dl}\cos\varphi \tag{6.6}$$

$$X=\bar{X},\ Y=\bar{Y},\ Z=\bar{Z}\qquad (\text{在位移已知边界上}) \tag{6.7}$$

内力应变关系是不参加变分的约束条件

$$\Theta_\varphi=\omega_1 e_\varphi+\nu e_\theta-\gamma\mu^2h^2K_\varphi \tag{6.8}$$

$$\Theta_\theta=\nu e_\varphi+\omega_2 e_\theta+\gamma\mu^2h^2K_\theta \tag{6.9}$$

$$\Omega_\varphi=-\mu^2[K_\varphi+\nu K_\theta-\gamma e_\varphi] \tag{6.10}$$

$$\Omega_\theta=-\mu^2[\nu K_\varphi+K_\theta+\gamma e_\theta] \tag{6.11}$$

在泛函(6.3)和约束条件(6.4～6.11)中有以下无量纲参数$\beta,\mu,\gamma,\omega_1,\omega_2,h$. 其中相对厚度$\mu$是重要的几何特征。

本文给出了无量纲方程(3.3～3.8)和无量纲位能原理泛函(6.3)，可以作为轴对称载荷下旋转壳弹性小应变轴向任意大挠度问题数值计算的理论基础。

作者对钱伟长教授不断的鼓励和经常的指导和帮助表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Reissner, E., On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution, *Proc. Symp. Appl. Math.* (Elasticity), 3 (1950), 27—52.

[2] Schmidt, R. and D. A. DaDeppo, On the theory of axisymmetrically loaded shells of revolution with arbitrarily large deflections, *J. of Indus. Math. Society*, 27 (1977), 39—50.

[3] Reissner, E., On the theory of thin elastic shells, *H. Reissner Anniversary Volume*, J. W. Edwards, Ann Arbor. Michigan (1949), 231—247.

[4] Wildhack, W. A., R. F. Dressler and E. C. Lloyd, Investigations of the properties of corrugated diaphragms, ASME, Jan. (1957).

[5] 钱伟长，关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用 (1964).(未能公开发表)

[6] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，机械工程学报，15，2 (1979)，1—23.

[7] 钱伟长，《变分法及有限元》上册，科学出版社 (1980).

[8] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2 (1983)，137—150.

[9] 钱伟长, 《广义变分原理》, 知识出版社, 上海 (1985).

[10] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1st edition (1968), 2nd edition (1975).

[11] Pian, T. H. H. and P, Tong, Basis of finite element methods for solid continua, *Inter. J. for Num. Methods in Eng.*, 1 (1969), 3—28.

[12] Reissner, E., On the equation for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution, *Progress in Appl. Mech.* (*Prager Anniversary Volume*), Macmillan Co., New York (1963), 171—178.

[13] Андреева Л. Е., *Упругих Элементы Приборов*, Москва, Машиностроение (1981).

On the Problem of Axisymmetrically Loaded Shells of Revolution with Small Elastic Strains and Arbitrarily Large Axial Deflections

Hwang Chien

(*Shanghai University of Technology, Shanghai*)

Abstract

For the problem of axisymmetrically loaded shells of revolution with small elastic strains and arbitrarily large axial deflections, this paper suggests a group of state variables: radial displacement u, axial displacement w, angular deflection of tangent in the meridian χ, radial stress resultant H and meridional bending moment M_φ, and derives a System of First-Order Nonlinear Differential Equations under global coordinate system with these variables. The Principle of Minimum Potential Energy for the problem is obtained by means of weighted residual method, and its Generalized Variational Principle by means of identified Lagrange multiplier method.

This paper also presents a Method of Variable-Characteristic Nondimensionization with a scale of load parameter, which may efficiently raise the probability of success for nonlinearity calculation. The obtained Nondimensional System of Differential Equations and Nondimensional Principle of Minimum Potential Energy could be taken as the theoretical basis for the numerical computation of axisymmetrical shells with arbitrarily large deflections.