

文章编号: 1000\_0887(2004) 10\_1014\_09

# 不同模量横力弯曲梁的解析解<sup>\*</sup>

姚文娟, 叶志明

(上海大学 土木系, 上海市应用数学和力学研究所 上海 200072)

(本刊编委叶志明来稿)

**摘要:** 选择处于平面复杂应力状态下横力弯曲梁, 对结构进行了中性层的判定, 推导出中性轴、正应力、剪应力、位移的计算公式, 得到如下结论: 对于复杂应力状态下的不同模量弹性弯曲梁, 其中性轴位置与剪应力无关, 因此用正应力作为判据而得到解析解, 改进了以往用主应力判定中性点的多次循环的计算方法。把解析解的结果与经典力学同模量理论, 以及有限元数值解进行了比较, 结果表明: 解析解很好地考虑了拉压不同模量的效应。还提出了对不同模量结构的计算修正以及对结构优化的思想。

**关键词:** 拉压不同模量; 中性轴; 横力梁; 解析解

**中图分类号:** O343.5      **文献标识码:** A

## 引 言

横力作用下的弯曲梁是工程中广泛应用的结构, 以往对它的计算均采用经典力学理论, 即假定弹性模量与应力状态无关。材料在拉伸、压缩时其弹性模量相等。但实际中许多材料具有拉压不同的弹性模量, 混凝土材料明显的具有这一特性, 而土木工程中梁结构最常用的正是混凝土材料。因此, 本文用不同模量理论对梁结构求其解析解, 使该结构的计算更吻合材料特性。

对不同模量弹性理论, 国内外许多学者进行了研究, 先后提出了该理论的基本概念、基本假设、单向应力状态下简单问题的解析解<sup>[1, 2]</sup>以及有限元数值计算方法<sup>[3-13]</sup>。到目前为止, 问题的难点归结为复杂应力状态下其拉压分界面(中性层)的确定, 即复杂应力状态下的解析解尚缺乏。本文选择了处于平面复杂应力状态下横力弯曲梁, 对此结构进行了中性层的判定, 并推导出中性轴、正应力、剪应力、位移的计算公式。

## 1 基本概念和假设

在不同模量力学理论中, 假定变形是连续、均匀、各向同性的。但是, 由于给定点(或区域)的主应力  $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$  符号的不同却表现出不同的弹性性质。当  $\sigma_i > 0$ , 相应材料的模量为  $E_p$ , 当  $\sigma_i < 0$ , 相应为  $E_n$ 。材料在任意应力状态下发生弹性小变形并服从连续介质力学的一般规律。即平衡方程、几何方程、变形连续性方程与相同模量理论相同, 不同之处反映在物理

\* 收稿日期: 2003\_03\_06; 修订日期: 2004\_05\_31

作者简介: 姚文娟(1957—), 女, 江西南昌人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_21\_66305773; Fax: + 86\_21\_56337100; E\_mail: wjyao@staff.shu.edu.cn)。

方程即本构关系中·

## 2 理论分析

由以上基本概念可知,不同模量理论中首先要解决的关键问题是拉压的分界面(中性轴)·因为非线性仅反映在分界点·中性轴一旦确定,则本构关系也相应确定·

拉压的分界通常可根据主应力的符号而确定·

对于平面应力状态:

当  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ , 拉区, 取  $E_p$ ; 当  $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$ , 压区, 取  $E_n$ ; 当  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ , 不定区域·

而中性轴则发生在不定区域·下面就针对不定区域确定其中性轴位置及各区的正应力推导计算公式·

## 3 不定区域中性轴的判定

3.1 定理 对受到外力后,处于平面应力状态下的结构,如果主应力均由正应力  $\alpha_x$  及剪应力  $\tau_{xy}$  所构成,并且  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ , 当且仅当  $\alpha_x = 0$  时,  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ ·

当  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$  时,显然  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$  即是结构的中性点(不拉不压点),由  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$  点连续构成的线(面)即为结构的中性轴(面)·

推论 由  $\alpha_x = 0$  可以唯一确定该结构的中性轴,  $\tau_{xy}$  对中性轴的位置无贡献·

### 3.2 证明定理

证1 取一微元体如图1所示,边长为  $dx, dy$ ·在纯剪状态下,有主应力  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$ ,由剪应力互等定理可得  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ ,即纯剪状态下的微元(极限后为一点)为不拉不压的中性点·因此剪应力对弹性体内各点均形成中性点,即剪应力对拉压的分界面(中性轴)的位置无贡献·

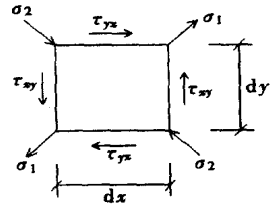


图1 纯剪微元体

证2 对横力作用下的弯曲梁,当跨度大于5倍的截面高时,可不计  $\alpha_y$  的作用·对弹性力学主应力计算公式令  $\alpha_y = 0$  可得:  $|\sigma_1| - |\sigma_2| = \alpha_x$ ; 当  $\alpha_x = 0$ , 有  $|\sigma_1| - |\sigma_2| = 0$ , 即  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$  ( $|\sigma_1|$  主拉应力  $= |\sigma_2|$  主压应力), 则可由  $\alpha_x = 0$  唯一确定中性轴位置, 而不计剪应力作用·

## 4 解析解公式推导

### 4.1 结构模型

取工程中最常用的矩形截面梁,具有一个纵向对称面,且外力(横力)作用在该对称面内,如图2·根据以上定理,中性轴与  $\tau_{xy}$  无关,则仅计  $\alpha_x$  的作用推求中性轴·

### 4.2 中性轴及正应力计算公式

实验已证明,横力弯曲梁,当跨度大于5倍截面的高度,正应力变化规律与纯弯曲时基本相同,即梁符合平面假定以及  $\alpha_y$  可忽略不计·而工程实际中的梁,其  $L \gg 5h$ , 所以在此可直接用纯弯曲的中性轴及正应力计算公式·参见[14]·

$$h_p = \frac{h \sqrt{E_n}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n}}, \quad (1)$$

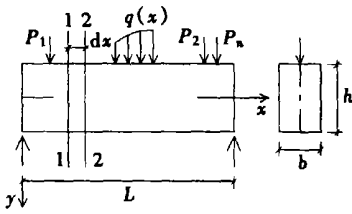


图2 结构模型

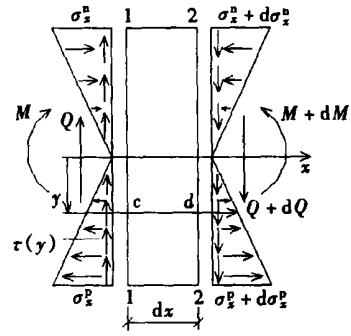


图3 微元应力图

$$\sigma_x^p = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} y, \quad \sigma_x^n = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p} y, \quad (2)$$

(1)及(2)式即为不同模量理论横力弯曲梁的受拉区高度及正应力计算公式。其中  $M$  为  $x$  及外荷载的函数。

### 4.3 不同模量问题中的剪应力公式

用相距  $dx$  的横截面 1-1 和 2-2 从梁中切取一微段, 该微段的内力及应力特征如图 3。在横截面上纵坐标为  $y$  处, 再将下部切出, 如图 4。由剪应力互等定理可得:

$$\tau' = -\tau(y). \quad (a)$$

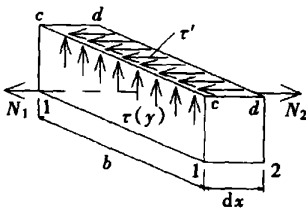


图4 微元下部隔离体

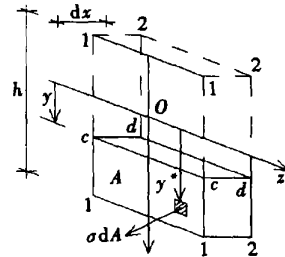


图5 微元坐标示意图

设微段下部横截面  $c_1c_1$  和  $d_2d_2$  的面积均为  $A$ 。在这二个截面上由弯曲正应力所构成的法向合力分别为  $N_1$  及  $N_2$ 。见图 5, 由前面已推的(2)可得:

$$N_1 = \int_{A_p} \sigma_x^p dA = \int_{A_p} \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} y^* dA = \frac{3M(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} \int_{A_p} y^* dA, \quad (b)$$

同理

$$N_2 = \int_{A_p} \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} (M + dM) y^* dA = \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} (M + dM) \int_{A_p} y^* dA. \quad (c)$$

由微段下部的法向平衡方程  $\sum X = 0$  得: (并代入(a)式)

$$\tau' b dx = \tau(y) b dx = N_2 - N_1.$$

将(b)、(c)代入上式得

$$\frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_n} \left[ (M + dM) \int_{A_p} y^* dA - M \int_{A_p} y^* dA \right] = \tau(y) b dx,$$

解上式, 并以  $Q = dM/dx$  代入得受拉区剪应力

$$\tau^p(y) = \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{b^2 h^3 E_n} Q \int_{A_p} y^* dA \quad (3)$$

同理, 取以上微元体分析推导可得受压区剪应力计算公式:

$$\tau^n(y) = \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{b^2 h^3 E_p} Q \int_{A_n} y^{*'} dA \quad (4)$$

如图 6 所示, 上式中  $y^{*'}$  为压区  $A_n$  中微元距  $z$  轴之距离,  $\int_{A_p} y^* dA$ ,  $\int_{A_n} y^{*' } dA$  分别为:

$$\int_{A_p} y^* dA = \int_y^{h_p} y^* b dy^* = \frac{b}{2} (h_p^2 - y^2), \quad (d)$$

$$\int_{A_n} y^{*' } dA = \int_{-y}^{h_p-h} y^{*' } b dy^{*' } = \frac{b}{2} [(h - h_p)^2 - y^2] \quad (e)$$

以(1)、(d)、(e)代入(3)及(4)得拉区剪应力:

$$\tau^p = \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{b^2 h^3 E_n} \frac{b}{2} \left[ \frac{h^2 E_n}{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2} - y^2 \right] Q = \frac{3Q}{2bh} \left[ 1 - \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{E_n h^2} y^2 \right], \quad (5)$$

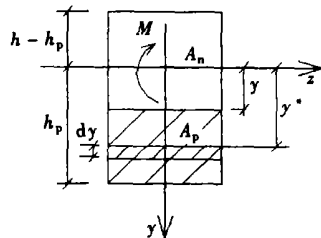


图 6 截面静矩示意图

和压区剪应力:

$$\tau^n = \frac{3Q}{2bh} \left[ 1 - \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{E_p h^2} y^2 \right]. \quad (6)$$

上式表明, 不同模量理论中, 其剪应力的分布与同模量的不同。剪应力在拉区及压区的分布不对称于中性轴。但在中性轴处:  $y = 0$  时,  $\tau = \tau_{\max} = 3Q/(2bh)$ , 即  $\tau_{y=+0} = \tau_{y=0} = \tau_{y=-0}$ 。

当  $y = h_p$  及  $y = h - h_p$  时,  $\tau = \pm 0$ ;

$$\text{当 } E_p = E_n, \quad \tau^p = \tau^n = \frac{3Q}{2bh} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right] = \frac{QS_z}{bl},$$

公式退回到经典材料力学的剪应力计算公式。

#### 4.4 位移公式的推导

由物理方程及几何方程有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy},$$

把(2)、(3)及(4)代入上式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} My, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3\mu(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} My, \quad (f)$$

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p = \left[ \frac{3(1+\mu)}{bhE_p} - \frac{3(1+\mu)(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} y^2 \right] Q \\ \hspace{15em} (0 \leq y \leq h_p), \\ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n = \left[ \frac{3(1+\mu)}{bhE_n} - \frac{3(1+\mu)(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3 E_p E_n} y^2 \right] Q \\ \hspace{15em} [-(h - h_p) \leq y < 0]. \end{cases} \quad (g)$$

设结构模型图 2 中,  $P_1 = P_2 = P_n = 0$ ,  $q(x) = q$  且满跨布置。则

$$M = \frac{q}{2}x(l-x), \quad Q = q\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

$$\text{令} \quad \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{bh^3E_pE_n} = B \cdot \quad (h)$$

以  $M$ 、 $Q$  及 (h) 式代入 (f)、(g) 式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B}{2}q(lx-x^2)y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{B}{2}\mu(lx-x^2)y, \quad (i)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_p = \left[\frac{3(1+\mu)}{bhE_p} - B(1+\mu)y^2\right]q\left(\frac{l}{2}-x\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_n = \left[\frac{3(1+\mu)}{bhE_n} - B(1+\mu)y^2\right]q\left(\frac{l}{2}-x\right) \end{cases} \quad \begin{matrix} (0 \leq y \leq h_p), \\ [- (h-h_p) \leq y < 0] \end{matrix} \quad (j)$$

对 (i) 积分有:

$$u = \frac{B}{2}q\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)y + f_1(y), \quad v = -\frac{\mu}{2}Bq(lx-x^2)\frac{y^2}{2} + f_2(x), \quad (k)$$

由  $u|_{x=l/2} = 0$  得  $f_1(y) = - (Bql^3/24)y$ , 对  $u$ 、 $v$  求微分后再代入 (j) 的第一式得

$$\frac{B}{2}q\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{Bql^3}{24} - \frac{\mu Bq}{4}(l-2x)y^2 + \frac{df_2(x)}{dx} = \left[\frac{3(1+\mu)}{bhE_p} - B(1+\mu)y^2\right]q\left(\frac{l}{2}-x\right) \quad (0 \leq y \leq h_p),$$

$$\int df_2(x) = \int \frac{\mu Bq}{4}(l-2x)y^2 dx + \int \frac{Bql^3}{24} dx - \int \frac{B}{2}q\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right) dx + \int \left[\frac{3(1+\mu)}{bhE_p} - B(1+\mu)y^2\right]q\left(\frac{l}{2}-x\right) dx \quad (0 \leq y \leq h_p),$$

$$f_2(x) = \frac{\mu Bq}{4}y^2(lx-x^2) + \frac{Bql^3}{24}x - \frac{Bq}{2}\left(\frac{l}{6}x^3 - \frac{x^4}{12}\right) + \left[\frac{3(1+\mu)}{bhE_p} - B(1+\mu)y^2\right]q\left(\frac{l}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) + C \quad (0 \leq y \leq h_p).$$

将  $f_1(y)$ 、 $f_2(x)$  代入 (k) 式再代入  $v|_{x=0} = 0$  可得:

$$u = \frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3E_pE_n}q\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)y - \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{8bh^3E_pE_n}ql^3y, \quad (7)$$

$$v = -\frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3E_pE_n}q\left(\frac{l}{6}x^3 - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{8bh^3E_pE_n}ql^3x + \frac{3}{2}q(1+\mu)\left[\frac{1}{bhE_p} - \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2y^2}{bh^3E_pE_n}\right](lx-x^2) \quad (0 \leq y \leq h_p), \quad (8)$$

$$v = -\frac{3(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{2bh^3E_pE_n}q\left(\frac{l}{6}x^3 - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2}{8bh^3E_pE_n}ql^3x + \frac{3}{2}q(1+\mu)\left[\frac{1}{bhE_n} - \frac{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_n})^2y^2}{bh^3E_pE_n}\right](lx-x^2) \quad [- (h-h_p) \leq y < 0] \quad (9)$$

## 5 算例及结果分析

### 5.1 实例计算

如图 7, 简支梁受均布荷载作用, 分两种情况计算。

情况 I:  $E = 0.5(E_p + E_n) = 2.55 \times 10^7$  不变, 改变  $E_p$  及  $E_n$ ; 情况 II:  $E_n = 2.55 \times 10^7$ , 改变  $E_p$  及  $E$ , 取  $E_p/E_n = 1/4, 1/3.5, 1/3, \dots, 3, 3.5, 4$ 。用经典力学同模量理论、本文所推求的不同模量理论及有限元数值解分别计算(表 1~4 仅列出部分结果)。

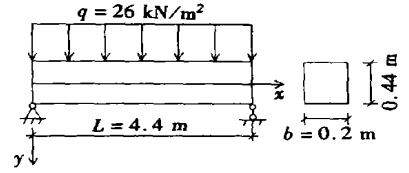


图 7 实例

表 1 经典力学相同模量理论梁 ( $x = 1.5$  m) 截面的中性轴、应力、挠度(解析解)

$E_p/E_n$	$E_p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$h_p/m$	$\sigma_{x\max}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{x\max}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	挠度 $v/m$ ( $y = 0$ )
1.0	2.55 E+ 7	2.55 E+ 7	0.22	8 762.9	- 8 762.9	217.9	217.9	3.17 E- 3

表 2 不同模量弹性梁 ( $x = 1.5$  m) 截面的中性轴、应力、挠度(解析解)(情况 I)

$E_p/E_n$	$E_p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$h_p/m$	$\sigma_{x\max}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{x\max}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	挠度 $v/m$ ( $y = 0$ )
1.0	2.55 E+ 7	2.55 E+ 7	0.220	8 762.9	- 8 762.9	217.9	217.9	3.17 E- 3
1/1.5	2.04 E+ 7	3.06 E+ 7	0.242	7 950.1	- 9 756.9	203.6	234.1	3.37 E- 3
1/2	1.70 E+ 7	3.40 E+ 7	0.258	7 486.8	- 10 562.8	193.7	247.3	3.50 E- 3
1/2.5	1.46 E+ 7	3.65 E+ 7	0.270	7 164.9	- 11 278.1	186.8	257.9	3.75 E- 3

表 3 不同模量弹性梁 ( $x = 1.5$  m) 截面的中性轴、应力、挠度(解析解)(情况 II)

$E_p/E_n$	$E_p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$h_p/m$	$\sigma_{x\max}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{x\max}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	挠度 $v/m$ ( $y = 0$ )
1/1.5	1.70 E+ 7	2.55 E+ 7	0.242	7 952.2	- 9 759.5	203.6	234.0	3.95 E- 3
1/2	1.27 E+ 7	2.55 E+ 7	0.258	7 487.7	- 10 572.4	193.6	247.4	4.68 E- 3
1/2.5	1.02 E+ 7	2.55 E+ 7	0.270	7 165.8	- 11 279.5	186.8	257.9	5.36 E- 3

表 4 不同模量弹性梁 ( $x = 1.5$  m) 截面的中性轴、应力、挠度(有限元数值解)(情况 I)

$E_p/E_n$	$E_p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$h_p/m$	$\sigma_{x\max}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{x\max}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^p/$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\tau_{xy}^n/$ (kN/m <sup>2</sup> )	挠度 $v/m$ ( $y = 0$ )
1.0	2.55 E+ 7	2.55 E+ 7	0.220	8 685.4	- 8 691.2	216.4	215.9	3.17 E- 3
1/1.5	2.04 E+ 7	3.06 E+ 7	0.242	7 889.2	- 9 687.6	201.3	231.9	3.35 E- 3
1/2	1.70 E+ 7	3.40 E+ 7	0.258	7 418.6	- 10 497.1	192.4	245.1	3.48 E- 3
1/2.5	1.46 E+ 7	3.65 E+ 7	0.270	7 105.8	- 11 213.4	184.9	255.6	3.72 E- 3

### 5.2 结果分析

#### 5.2.1 三种方法的误差分析

本文所推求的不同模量理论公式可完全退回到经典力学同模量公式。本文所推求的不同模量理论解析解, 与不同模量有限元数值解, 两者的最大误差在 1.01% 以内。误差源于有限

元网格的划分、迭代、终端值等综合因素。

### 5.2.2 不同模量与同模量的差异

1) 当材料的拉压弹性模量改变时,梁的中性轴呈现有规律的变化,见表1,随着  $E_p$  的增加,受拉区高度减少,反之则增加。随着  $E_p/E_n$  的比值增加,中性轴偏移的速率逐渐变小。

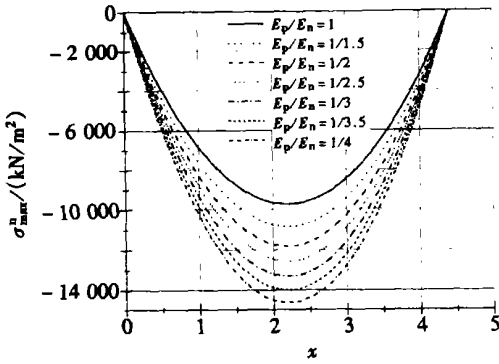


图8 情况I 梁最大(压)正应力响应图

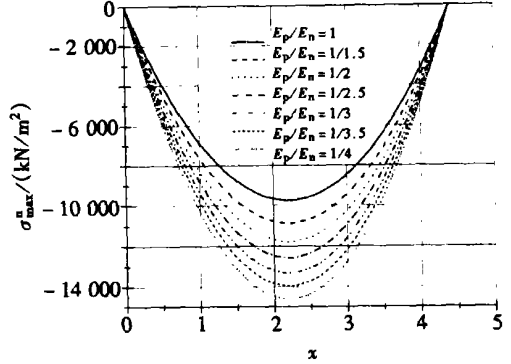


图9 情况II 梁最大(压)正应力响应图

2) 由于计入了不同模量,截面的正应力及剪应力变化规律,也不同于同模量的正应力及剪应力。同模量的正应力及剪应力对称于中性轴,而不同模量的正应力及剪应力不对称于中性轴。以中性轴为界,不仅拉区的正应力及剪应力面积不等于压区正应力及剪应力,且对应的拉、压区相应点,其应力值不相等。

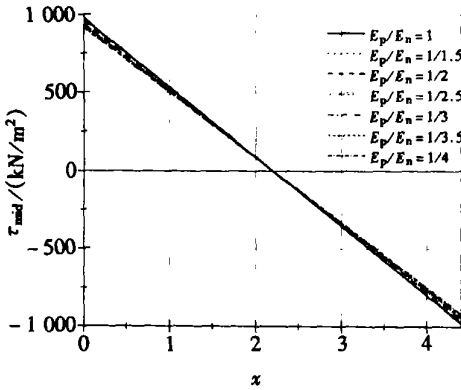


图10 梁截面中点剪应力响应

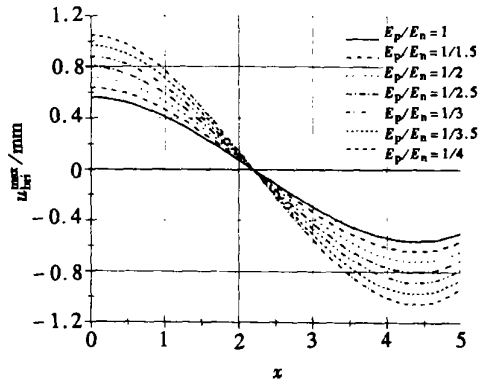


图11 梁下边缘沿x 向位移响应图

3) 梁的正应力及剪应力均随着拉压模量比值的改变而变化,拉应力  $\sigma_x^p$  及拉区剪应力  $\tau_x^p$  随着  $E_p/E_n$  减小而减小,压应力  $\sigma_x^c$  及压区剪应力  $\tau_x^c$  随  $E_p/E_n$  的减小而增加,见图8、图10。这一结果完全吻合刚度调整内力的规律。

4) 当截面的总刚度不变,仅改变其分配,梁位移随着  $E_p/E_n$  的增大而增大,见图11及图12,说明截面刚度的不均匀将使位移增大。当  $E_p/E_n = 1/4 \sim 4$  之间变化,不同模量与相同模量两种方法计算误差达30%,见图15。

5) 情况II见表3,当  $E_p/E_n$  比值变化,而  $E_n$  不变,则截面平均模量已变化,其正应力响应随  $E_p/E_n$  的变化规律基本同情况I,见图8、图9,说明应力对  $E_p/E_n$  的比值敏感,而对  $E_p$  或  $E_n$  的绝对值不敏感。增加材料的  $E_p$  或  $E_n$ ,而不改变  $E_p/E_n$ ,并不能减小应力。但对挠度,情况II远比情况I的误差大,当缩小  $E_p$ ,  $E_p/E_n = 1/4$  与同模量  $E = E_p = E_n$  相比,两种方法的

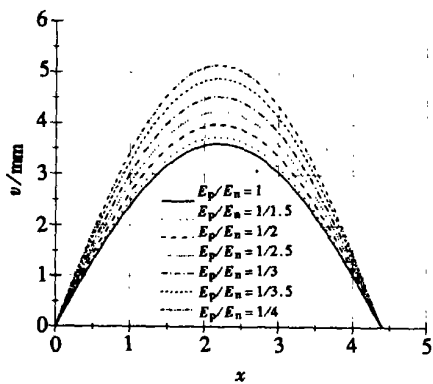


图 12 情况 I 梁挠度响应图

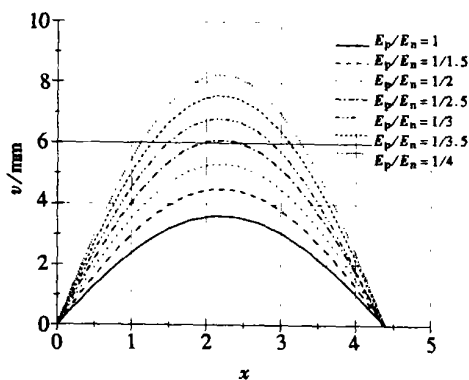


图 13 情况 II 梁挠度响应图

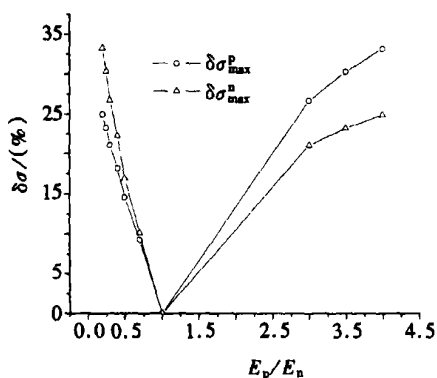


图 14 不同模量与相同模量两种方法计算正应力误差随  $E_p/E_n$  的变化

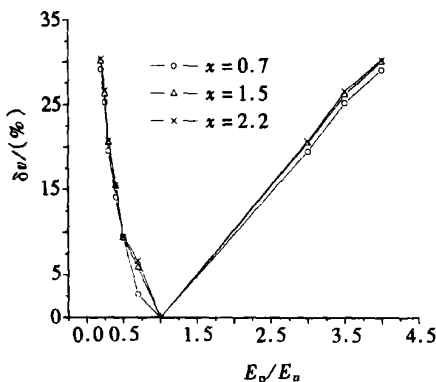


图 15 不同模量与相同模量两种方法计算挠度误差随  $E_p/E_n$  的变化

挠度误差已达 58%。

综上所述,当计入不同模量,其加大压模量将减小拉应力,同时也提高压应力,且随着  $E_p/E_n$  的增大,差值增大。本文中列出了  $E_p/E_n = 1/4, \dots, 4$ , 两种方法计算的应力误差达 33%, 见图 14。笔者认为,这一结果应计入材料具有不同模量的结构计算中,以修正经典力学中应力计算与弹性模量无关的误差,并可利用加大压模量而减少拉应力这一规律来优化结构。特别对于结论 5) 中的结果,当需要减小拉应力,无需提高材料的  $E$ , 而只需增加  $E_p/E_n$  的比值,则拉应力可大幅度降低。

[参 考 文 献]

- [1] Medri G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression[J]. Transactions of the ASME, 1982, 26(104): 26—28.
- [2] 姚文娟, 叶志明. 不同模量弹性理论[M]. 邬瑞锋, 张允真 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
- [3] Srinivasan R S, Ramachandra L S. Large deflection analysis of bimodulus annular and circular plates using finite elements[J]. Computers & Structures, 1989, 31(5): 681—691.
- [4] Srinivasan R S, Ramachandra L S. Axisymmetric buckling and post\_buckling of bimodulus annular plates[J]. Eng Struct, 1989, 11(7): 195—198.
- [5] 张允真, 王志锋. 不同模量弹性力学问题的有限元法[J]. 计算结构力学及其应用, 1989, 6(1):



- 236—246.
- [6] Papazoglou J L, Tsouvalis N G. Mechanical behaviour of bimodulus laminated plates[J]. Composite Structures, 1991, 17(1): 1—22.
- [7] 杨海天, 邬瑞锋, 杨克检, 等. 初应力法解拉压双弹性模量问题[J]. 大连理工大学学报, 1992, 32(1): 35—39.
- [8] TSENG Yi\_ping, LEE Cheng\_tao. Bending analysis of bimodular laminates using a higher\_order finite strip method[J]. Composite Structures, 1995, 30(4): 341—350.
- [9] YE Zhi\_ming. A new finite element formulation for planar elastic deformation[J]. Internat J for Numerical Methods in Engineering, 1997, 14(40): 2579—2592.
- [10] TSENG Yi\_ping, JIANG Yu\_ching. Stress analysis of bimodular laminates using hybrid stress plate elements[J]. International Journal of Solids Structures, 1998, 35(17): 2025—2028.
- [11] YE Zhi\_ming, YU Huang\_ran, YAO Wen\_juan. A finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading[A]. In: Jin Ho Kwak Ed. Com 2Mac Conference on Computational Mathematics [C]. South Korea: Pohang University of Science and Technology, 2001, 2—5.
- [12] Raffaele Zinno, Fabrizio Greco. Damage evolution in bimodular laminated composites[J]. Composite Structures, 2001, 53(4): 381—402.
- [13] Gao X\_L, Li K, Mall S. A mechanics\_of\_materials model for predicting Young's modulus of damaged woven fabric composites involving three damage modes[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(4): 981—999.
- [14] 姚文娟, 叶志明. 不同模量弯压柱的解析解[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(9): 901—909.

## Analytical Solution for Bending Beam Subject to Lateral Force With Different Modulus

YAO Wen\_juan, YE Zhi\_ming

( Department of Civil Engineering , Shanghai University ;  
Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics ,  
Shanghai 200072, P . R . China )

**Abstract:** A bending beam, subjected to two state of plane stress, was chosen to investigate. The determination of the neutral surface of the structure was made, and the calculating formulas of neutral axis, normal stress, shear stress and displacement were derived. It is concluded that, for the elastic bending beam with different tension\_compression modulus in the condition of complex stress, the position of the neutral axis is not related with the shear stress, and the analytical solution can be derived by normal stress used as a criterion, improving the multiple cyclic method which determines the position of neutral point by the principal stress. Meanwhile, a comparison is made between the results of the analytical solution and those calculated from the classic mechanics theory, assuming the tension modulus is equal to the compression modulus, and those from the finite element method (FEM) numerical solution. The comparison shows that the analytical solution considers well the effects caused by the condition of different tension and compression modulus. Finally, a calculation correction of the structure with different modulus is proposed to optimize the structure.

**Key words:** different tension\_compression modulus; neutral axis; beam subjected to lateral force; analytical solution