应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非定常线性系统在经常作用干扰下的稳定性定理*

张书顺

（哈尔滨船舶工程学院，1983年元月18日收到）

摘　要

文中根据马尔金（Малкин）定理给出并证明了非定常线性系统在经常作用干扰下的稳定性定理。

1. 引言

我们研究未干扰运动对于干扰的初始条件在李雅普诺夫意义下的稳定，物理上这表示，我们是研究对于瞬时作用的扰动的稳定。不过，真正的力学系统常常是受到不大的干扰力的经常作用，而在建立运动方程时，要考虑它们实际上是不可能的。因此，研究运动对于这种经常作用的扰动的稳定性就具有特别的意义。

在经常扰动作用下的稳定性定义是由Г.Н.Дубошин给出的[1]。该定义是李雅普诺夫意义下稳定的直接推广，因为李雅普诺夫方法对于研究在经常干扰作用下的稳定同样是适用的。

И.Г.Малкин根据Дубошин的稳定性定义，在李雅普诺夫直接法的渐近稳定性定理的基础上，给出了下述定理：

如果对于干扰运动的微分方程

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t,x_1,\cdots,x_n)\qquad(s=1,2,\cdots,n)$$

存在正定函数$V(t,x_1,\cdots,x_n)$，其由这些方程构成的对时间的全导数$\dot{V}(t,x_1,\cdots,x_n)$是负定函数，并且在区域$t\geqslant0$，$|x_s|\leqslant H$中偏导数$\partial V/\partial x_s$有界，则未干扰运动在经常作用的干扰下是稳定的[2]。

下面，作者根据Малкин定理，给出并证明一个非定常线性系统在经常作用干扰下的稳定性定理。

2. 定理

对于非定常线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}\tag{1}$$

（假设$\mathbf{A}(t)$有界）

* 钱伟长推荐。

当

$$\sup_{t_0\geqslant 0}\sup_{t\geqslant t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i\triangleq m_0<\infty \tag{2}$$

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i\to 0 \text{（当 } t\to\infty\text{时），　对 } t_0 \text{ 一致，} \tag{3}$$

或当存在正常数 m 和 λ，使得

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i\leqslant m\exp[-\lambda(t-t_0)],\qquad \forall t\geqslant t_0,\ \forall t_0 \tag{4}$$

则系统 (1) 的原点（平衡点）在经常作用干扰下稳定，其中 $\Phi(t,t_0)$ 是与 $\mathbf{A}(t)$ 有关的状态转移矩阵，且是方程

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\Phi(t,t_0),\ \ \Phi(t_0,t_0)=\mathbf{I}$$

的唯一解。

证明　为证明定理，只需选取一个满足 Малкин 定理条件的正定函数 $V(t,\mathbf{x})$。

首先，选取强李雅普诺夫函数 V。由条件 (2) 与 (3)（或条件 (4)），如果再给定 $n\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 连续有界，则

$$\mathbf{P}(t)=\int_t^\infty \Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau,\ \ \forall t\geqslant 0 \tag{5}$$

是完全确定的，而且是 t 的有界函数。

由假设 $\mathbf{A}(t)$ 关于 t 有界，再给定 $\mathbf{Q}(t)$ 对称正定，则由有关引理[3]可知，由式 (5) 确定的 $\mathbf{P}(t)$ 是正定的（对于 $t\geqslant 0$）。选取正定函数

$$V(t,\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{6}$$

将 (6) 式对 t 求导

$$\dot V(t,\mathbf{x})=\mathbf{x}^T[\dot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)]\mathbf{x} \tag{7}$$

为了化简，将式 (5) 分成两部分之和

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t)&=\int_t^\infty \Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau\\&=\int_t^0\Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau+\int_0^\infty \Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau\end{aligned}$$

应用含参量广义积分和有限积分的对参量 t 求导公式，再合併，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t)=&\int_t^0[\Phi^T(\tau,t)]'\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau+\int_t^0\Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi'(\tau,t)d\tau\\&-\Phi^T(t,t)\mathbf{Q}(t)\Phi(t,t)+\int_0^\infty[\Phi^T(\tau,t)]'\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau\\&+\int_0^\infty\Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi'(\tau,t)d\tau\\=&\int_t^\infty[\Phi^T(\tau,t)]'\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau+\int_t^\infty\Phi^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi'(\tau,t)d\tau-\mathbf{Q}(t)\end{aligned}$$

其中　$[\Phi^T(\tau,t)]'=[\Phi'(\tau,t)]^T$

由　$[\mathbf{A}^{-1}(t)]'=-\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{A}'(t)\mathbf{A}^{-1}(t)$

$$\begin{aligned}\Phi'(\tau,t)&=[\Phi^{-1}(t,\tau)]'=-\Phi^{-1}(t,\tau)\Phi'(t,\tau)\Phi^{-1}(t,\tau)\\&=-\Phi(\tau,t)\mathbf{A}(t)\Phi(t,\tau)\Phi^{-1}(t,\tau)=-\Phi(\tau,t)\mathbf{A}(t)\end{aligned}$$

则

$$[\Phi^T(\tau,t)]'=[\Phi'(\tau,t)]^T=[-\Phi(\tau,t)\mathbf{A}(t)]^T=-\mathbf{A}^T(t)\Phi^T(\tau,t)$$

所以

$$\dot{\mathbf{P}}(t)=-\int_t^{\infty}\mathbf{A}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau-\int_t^{\infty}\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t)\mathbf{A}(t)d\tau-\mathbf{Q}(t)$$
$$=-\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{Q}(t) \tag{8}$$

将 (8) 代入 (7)，得

$$\dot{V}(t,\mathbf{x})=-\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}$$

由于 $\mathbf{Q}(t)$ 正定，知 $\dot{V}(t,\mathbf{x})$ 为负定函数。

则 $V(t,\mathbf{x})$ 是系统 (1) 的强李雅普诺夫函数。

再证明在区域 $t\geqslant 0$，$\|\mathbf{x}\|\leqslant H$ 中，$\partial V/\partial x_s$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 有界。这是显然的，由于 $\mathbf{P}(t)$ 是 t 的有界函数，二次型 $\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ 对 x_s 的偏导数必在给定区域中有界。

所以，满足马尔金定理条件，则系统 (1)（干扰运动）的原点（未干扰运动）在经常作用干扰下是稳定的。

参 考 文 献

[1] Дубошин Г. Н., К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений, *Труды ГАИШ*, 14, 1 (1940).

[2] Малкин И. Г., *Теория Устойчивости Движения*, Гостехиздат (1952)。中译本，解伯民等译，《运动稳定性理论》，科学出版社 (1958)。

[3] Vidyasagar, M., *Nonlinear, Systems Analysis*, sec. 5.3, Lemma 82, Lemma 85, Prentice-Hall, Inc., Englowood Cliffs, New Jersey (1978).

The Theorem of the Stability of Linear Nonautonomous Systems under the Frequently-Acting Perturbation

Zhang Shu-shun

(Haerbin Shipbuilding Engineering Institute, Haerbin)

Abstract

In the paper a theorem on the stability of linear nonautonomous system under the frequently-acting perturbation has been given and proved on the basis of Marlkin's Theorem.