应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

区域函数*

何冲

（中国科学院情报研究所重庆分所，1983年11月9日收到）

摘要

为了把点函数理论、区间函数理论和方法推广到任意区域，作者建立了区域的收缩和区域的保核收缩，区域的扩张和区域的保核扩张等新理论。从这些概念出发，给出了区域函数的新定义，并将区域函数的核（即不动点）与此区域函数的定义区域的稳定中心联系起来，从而建立了区域理论，和区域与区域算法。

在应用中，为了求区域的稳定中心，作者采用了由 Hartfiel[7] 和其它作者建立的矩阵测度理论；并讨论了与区域相伴的线性代数方程组系数矩阵的测度理论。

一、引言

过去长时间讨论的函数都是点函数。在1923年，J. C. Burkill 首先建立了区间函数，并讨论了该函数的一些性质。

到目前为止，无论是点函数，还是区间函数，以及这些函数的导数，都用经典的映射方法来定义。

本文为了把点函数、区间函数以及与它们有关的一些性质和方法，推广到任意区域，采用了区域的改变（或收缩，或扩张，或作别的任何保核变换）定义区域函数，即

$$F(x)\subseteq B(R),\ B(R)\subseteq F(x),\ \forall x\in B(R) \tag{1.1}$$

在建立此理论的过程中，使用了点集拓扑[2]和代数拓扑[3]的某些基本概念，但又与它们有着本质的不同。

在这篇文章中，作者一方面试图建立区域和区域函数的一些基本理论；另一方面，也试图以这些基本理论和方法作为一种工具，建立一种区域算法。此算法对于求解广义微分方程、广义积分方程、广义积分-微分方程是一种特别有效的工具；对于几何、物理、力学、特别是线性几何、非线性几何、微分几何的发展，将广开门路。

本文致力于一般的、抽象的区域的值的计算，即稳定中心法。此方法主要以 P. Huard 的思想的逆[4]和 Ehramann 与 Schroder[6]的不动点定理用于区域。即由区域到这一区域的子区域（即稳定中心），或由多值到单值。这就是本文的主要思想之一。

本文共分三分部。第一部分，给出本文要用到的符号和定义。第二部分，给出了一些基本引理、定理和推论，并对其中的某些，作了比较详细的证明。第三部分，使用 E. Spa-

* 钱伟长推荐.

nier[6] 的代数拓扑方法和 D. J. Hartfiel[7] 的矩阵测度理论于区域，从而给出了如何利用本文建立的基本理论，计算某区域的值的方法。

二、符 号 和 定 义

为了本文的需要，给出有关符号与定义如下：

R表示任意非空的区域(有界或无界，单连通或复连通)；$B(R)$表示所有R的集合；$x:=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，或 $x:=\{x_i\}(i=1(1)n)$表任意 n 维区域$B(R)$的变元；$F(x)$ 表示定义在$B(R)$ 上的区域函数；$B(\bar{R})$ (或者$\bar{R}$) 表示任意非空的闭区域；$B(R)$ (或R) 表示开区域；$B(R_0)$ (或R_0) 表示区域 $B(R)$ (或R) 的稳定中心；$F(B(R))$ (或$F(R)$)表示区域$B(R)$(或R)的值；x_0 表示区域$B(R)$的稳定中心 $B(R_0)$(或R_0) 上的点；$F(x_0)$ 表示区域函数 $F(x)$ 在其定义区域 $B(R)$的稳定中心 $B(R_0)$ (或R_0)上的点 x_0 的值。

定义1 区域 $B(R)$的子区域 $B(R_0)$ 叫作区域 $B(R)$的稳定中心，或渐近稳定中心，如果下面的条件始终是真实的。

1) 如果区域 $B(R)$作任何运动，或者任意变化时，$B(R_0)$始终是稳定的，或者渐近稳定的；

2) 定义在这一区域$B(R)$上的区域函数$F(x)$的核x_0 (映射或者变换的不动点) 始终位于区域 $B(R)$的子区域 $B(R_0)$上。

如果 $F(x_0)=x_0$，并且 $x_0\in B(R_0)$始终成立，则 $B(R_0)$称为区域 $B(R)$的绝对稳定中心；

如果 $x_0\in F(x)$，$\forall x\in B(R)$，并且 $x_0\in B(R_0)$ 始终成立，则 $B(R_0)$ 称为区 域 $B(R)$ 的 相对稳定中心。

如果 $B(R)$是任一非空的区域，并且有 $F(x)$，使得 $B(R)\geqslant F(x)$，$\forall x\in B(R)$始终是真实的，则区域 $B(R)$作任意保核变换。

定义2 假定 $B(R)$ 是任一非空的区域，$G(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$ 始终是真实的，则 G 是区域 $B(R)$ 的收缩。如果有一个确定的点x_0属于 $G(x)$，则G是区域 $B(R)$的保核收缩；反之，如果 $B(R)\subseteq G(x)$，$\forall x\in B(R)$始终是真实的，则G是区域的扩张，同样如 果 有 一确定的点 x_0 属于 $G(x)$，则 G 是区域 $B(R)$的保核扩张。

如果 $G(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，并且 $x_0\in G(x)$始终是真实的，G是区域$B(R)$ 自身的保核收缩；如果 $B(R)\subseteq G(x)$，$\forall x\in B(R)$，并且 $x_0\in G(x)$始终是真实的，则G是区域$B(R)$ 自身的保核扩张。

如果 $F(x)\subseteq B(R)$，$B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$始终是真实的，则$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数。

定义3 假定有一组区域函数的定义区域始终是同胚的，则这些区域函数的值是相等的。

定义4 用 $B(R_j)$，$B(R_k)$表示区域 $B(R)$的任意两个非空的、彼此不相同的子区域，即 $\forall B(R_j)$，$B(R_k)\subseteq B(R)$，并且 $B(R_j)\cap B(R_k)\neq\phi$，$B(R_j)\cup B(R_k)$ 是有界的，则我们说区域 $B(R)$是连通的(单连通或复连通)。

如果区域 $B(R)$是有界的，并且 $B(R):=\{B(R_i)\}$；此外，如果有任意两个非 空 的、彼此 不 同 的 子 区 域 $B(R_j)$，$B(R_k)$，并 且 $\forall B(R_j)$，$B(R_k)\subseteq[B(R_i)]=:B(R)$，并 且 $B(R_j)\cap B(R_k)\neq\phi$，$B(R_j)\cup B(R_k)\subseteq\{B(R_i)\}$ 是 有界的，则称区域 $B(R)$ 是 有界连通可分的。

定义5　假如 $F(x)$ 是定义在区域 $B(R)$ 上的区域函数，并且 $F(x):=[F(x_i)]$，$\forall F(x_j)$，$F(x_k)\subseteq[F(x_i)]$ $(i=1(1)m<n)$，其中 $F(x_i)$，$F(x_j)$，$F(x_k)$ 是分别定义在区域 $B(R)$ 的子区域 $B(R_i)$，$B(R_j)$，$B(R_k)$ 上的子区域函数，并且 $[j;k]\subseteq[i]$。如果 $F(x_j)\cap F(x_k)\neq\phi$，$F(x_j)\cup F(x_k)$ 始终是有界的，则我们说定义在区域 $B(R)$ 上的区域函数 $F(x)$ 是连续的；如果 $F(x_j)\cap F(x_k)=\phi$，$F(x_j)\cup F(x_k)$ 是不确定的，则我们说定义在区域 $B(R)$ 上的区域函数 $F(x)$ 是不连续的，或者不确定的。

定义6　如果 $F(x_m)$，$F(x_n)$ 是分别定义在区域 $B(R)$ 上的任意两个非空的子区域 $B(R_m)$，$B(R_n)$ 上的子区域函数，$F(x_m)\cap F(x_n)=U(x_s)\neq\phi$，如果 $\bigcup U(x_s)$ 始终是有界的，则定义在区域 $B(R)$ 上的区域函数 $F(x)$ 是列紧的。反之，如果 $F(x_m)\cap F(x_n)=U(x_s)\not\equiv\phi$，并且 $\bigcup U(x_s)$ 始终是有界的，则定义在区域 $B(R)$ 上的区域函数 $F(x)$ 是相对列紧的；如果 $U(x_s)\neq\phi$ 始终是真实的，并且 $\bigcup U(x_s)$ 始终是有界的，则定义在区域 $B(R)$ 上的区域函数 $F(x)$ 是绝对列紧的。

由此可知，定义在闭连通稠密区域上的区域函数是绝对列紧的；定义在稀疏区域上的区域函数是相对列紧的。

注　符号 $\not\equiv\phi$ 表示不完全是非空的，也就是说，其中可能有某些集合是空的。

三、基本引理，定理和推论

本部分将讨论区域函数的一些重要定理、方法和推论。为此目的，我们首先讨论如下引理。

引理1　如果某区域是有界稠密的，则此区域存在一个稳定中心。

证明　假定此区域是 $B(R)$，$F(x)$ 是定义在此区域上的区域函数。根据定义2，我们有 $F(x)\subseteq B(R)$，$B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$。此外，假定 F 是由区域 $B(R)$ 自身的保核收缩，即 $F(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$。因此有一点 x_0，并且 $x_0\in F(x)$，由于 $F(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，所以 $x_0\in B(R)$。又根据点 x_0 的定义，所以区域 $B(R)$ 有稳定中心 $B(R_0)$ 存在。引理得证。

引理2　如果某区域自身的保核收缩（或保核扩张）始终存在，则此区域必定存在一个稳定中心。

证明　此引理的证明很容易由定义1、2得到。

引理3　如果某区域是有界非稠密的，则此区域存在一个稳定中心。

证明　假定区域 $B(R)$ 是非稠密的，假定此区域是由 i $(i\geqslant2)$ 个不连通有界稠密子区域 $B(R_i)$ $(i\geqslant2)$ 组成，并且

$$B(R):=\{B(R_i)\}\quad\text{或}\quad B(R):=\bigcup_{n=1}^{i}B(R_n)$$

根据定义6，在子区域 $B(R_i)$ 中有任意两个非空的子区域 $B(R_j)$，$B(R_k)$，即 $\forall B(R_j)$，$B(R_k)\subseteq\{B(R_i)\}$。由于 $B(R)$ 是不连通的，所以 $B(R_j)\cap B(R_k)\not\equiv\phi$，并且 $B(R_j)\cup B(R_k)$ 是有界的。此外，由于每个子区域 $B(R_i)$ 是稠密的，则根据引理1，在每个子区域 $B(R_i)$ 中，肯定有一个稳定中心 $B(R_{i0})$。为了方便起见，假定每个子区域 $B(R_i)$ 是该子区域的稳定中心 $B(R_{i0})$ 的邻域。根据定义2，我们可对每个子区域 $B(R_i)$ 作自身的有限均匀保核扩张，即 $B(R_i)\subseteq F(x'_i)$，$\forall x'_i\in B(R'_i)$，其中 $B(R'_i)$ 是 $F(x'_i)$ 的定义区域，并使得 $F(x'_j)\cap F(x'_k)$

$\neq\phi$, $(\{j;\ k\}\subseteq\{i\}\subseteq\{n\})\forall F(x'_i)$, $F(x'_k)\subseteq F(x'_i)$, $\forall x'_i\in B(R'_i)$. 因此，相应地有 $B(R'_i)\cap B(R'_k)\neq\phi$，并且 $B(R'_i)$ 和 $B(R'_k)$ 分别是 $F(x'_i)$ 和 $F(x'_k)$ 的定义区域。

然而，现在的区域 $B(R')$，是通过对每个子区域 $B(R_i)$ 作自身的有限均匀保核扩张后得到的，并且 $B(R'):=\bigcup\limits_{i\in N}B(R'_i)$，所以区域 $B(R')$ 是通过一个变换，变一个有界弱连通区域 $B(R)$ 成一个有界稠密强连通区域 $B(R')$，即

$$B(R_j)\cap B(R_k)\neq\phi\Longrightarrow B(R'_j)\cap B(R'_k)\neq\phi,\ \forall B(R'_j),\ B(R'_k)\subseteq\{B(R'_i)\}=B(R')$$

由于 $B(R)$ 是有界的，并且 $B(R')$ 是 $B(R)$ 自身的有限均匀保核扩张，所以 $B(R')$ 也是有界的，从而 $B(R'_j)\cup B(R'_k)$ 同样也是有界的。根据引理1，$B(R')$ 存在一个稳定中心。又由于 $B(R)$ 和 $B(R')$ 间的相互关系，所以区域 $B(R)$ 也仅只存在一个主要的稳定中心。引理得证。

引理4 如果某一区域是无界非空的，则此区域存在一个稳定中心。

证明 我们分两种情况讨论：

第一种情况，如果此区域是无界稠密的(或无界连通的)，则可通过一个保核收缩变换，变无界稠密区域成一个有界稠密区域（或有界连通区域)。然而，在一个稠密区域中，有一个稳定中心，这已由引理1得到证明。

第二种情况，如果此区域是无界非稠密的（或无界稀疏区域)。则我们可通过一个保核收缩变换，变无界非稠密区域成一个有界非稠密区域（或有界稀疏区域)。然而，在有界非稠密区域中，有一个稳定中心。这已由引理 3 得到证明。

因此，在任意非空的无界区域中，有一个稳定中心存在。引理完全得证。

引理5 在一个非空的任意区域中，如果存在有限多个稳定中心，则在这些稳定中心之间，只有一个是主要的(或渐近稳定中心)。

证明 此引理的证明基本上与引理 3 相同。

定理1 在任意非空的区域中，只存在一个稳定中心。

证明 定理的第一部分，可由引理1，3，4得到证明。定理的第二部分，可由引理 5 得到证明。

定理2 任一非空的区域的值等于定义在此区域上的区域函数在此区域的稳定中心上的点的值。即

$$F(B(R))=F(B(R_0))=F(x_0)$$

证明 用 $B(R)$ 表示此非空区域。根据定理1，区域 $B(R)$ 必定存在一个稳定中心 $B(R_0)$。根据定义1，有 $B(R_0)\subset B(R)$。

此外，我们可以建立区域 $B(R)$ 自身的保核收缩 $F(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，根据定义 2，在区域 $B(R)$ 的稳定中心 $B(R_0)$ 上，必定有一点 x_0，并且 $x_0\in F(x)$，假定 $F(x_0)$ 是区域函数 $F(x)$ 在其定义区域 $B(R)$ 的稳定中心 $B(R_0)$ 的点 x_0 上的值。

另一方面，由于 $F(x)\subseteq B(R)$, $\forall x\in B(R)$, 并且 $x_0\in F(x)$, 由此得到 $x_0\in B(R_0)\subset B(R)$, 所以 $F(B(R))\geqslant F(x_0)$。又由于 $B(R)\subseteq F(x)$，$\forall x\in B(R)$，所以同样有 $F(B(R))\leqslant F(x_0)$。因此得到

$$F(B(R))=F(x_0)$$

此外，由于 $F(B(R))=\bigcup\limits_{x\in B(R)}F(x)$，并且

$$F(B(R_0))=\bigcup_{x_0\in B(R_0)}F(x_0)=F(x_0)$$

因此，我们有

$$F(B(R))=F(\dot{B}(R_0))=F(x_0)$$

于是，定理完全得证。

推论1 某区域自身的任一保核收缩，只有一个值，即是单值的。

证明 由定理1可知，任一非空的区域，只存在一个稳定中心。由定理2可知，此区域的值等于定义在此区域上的区域函数在其定义区域的稳定中心上的点的值。由于任一非空的区域的稳定中心是唯一的，所以此区域的值也是唯一确定的。推论完全得证。

推论2 任一非空的区域的改变(或收缩，或扩张，或作别的任何一种运动，或改变)是保核的，则此区域的值不随此区域的改变而改变。

证明 此证明可分成如下两种情形：

第一，假定此区域的改变是属于保核收缩(或者有限保核扩张)。这已由推论1得到证明。

第二，假定此区域作任何别的一种运动(或改变)。根据假定，这种变换是保核的。根据定义3，变化前与变化后的区域是同胚的。因此，它们的值是相等的。由定理2可知，它们的值不随区域的改变而改变。于是，推论完全得证。

推论3 任一区域函数只存在一个核(即映射或者变换的不动点)，当且仅当，此区域函数的定义区域只存在一个稳定中心。

此推论的证明是很平凡的。

四、应 用

本部分将引进由 D. J. Hartfiel[7]和其他作者建立的矩阵的测度理论和方法，以及点集拓扑和代数拓扑[6]中的一些基本概念，和本文上述的一些基本理论，讨论一些正规区域、非正规区域、实际与抽象的区域的值的计算方法。为此目的，我们还需要给出一些相应的符号和基本理论如下：

设X是上述任意非空的区域$B(R)$的所有点的集合，并且X构成一个主理想域。设$H(x)$是X自身的所有保核收缩$h(x)$($\forall x\in X$, 或$\forall x\in B(R)$)的集合，即$h(x)\subseteq H(x)$, $\forall x\in B(R)$, 我们可将点$x_1, x_2, \cdots, x_n$与$H(x_i)$之间的关系式写成

$$H(x_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \tag{4.1}$$

设$A:=[a_{ij}]$为$H(x_i)$的矩阵，其中$A>0$，即$a_{ij}>0$。由此可见，矩阵A是正定的。根据线性代数的基本理论，方程组(4.1)只存在一个解，并且此解属于X。又根据X和$B(R)$间的关系，此解也属于$B(R)$。

现在引进计算矩阵测度值的几个基本定理如下：

定理3 ([7]定理3.1) 设A_1, A_2, $\cdots$ 是$N(A)$中的矩阵序列，并且$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A$, $P(A_k)=P(A)$，对于充分大的k，如果μ是$N(A)$的任意测度，则$\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)=\mu(A)$。

定理4([7]推论3.2) 设μ是$N(A)$的测度，则$N(A)$有一个连续测度$\bar{\mu}$，使得$\bar{\mu}(A)=\mu(A)$对于$N(A)$中的所有A都成立。其中P是定理3中的矩阵序列的某种排列。

上述两个定理在[7]已有证明，这里我们仅只引用它们。

一般说来，与某正规区域相伴的矩阵往往是方阵。但是，如果某区域是非正规的，甚至是相当抽象的，则我们可通过一个保核变换将此区域变成一个正规区域。也是说，把一个非方阵变换成一个方阵。

定理5 设$A>0$是任意$m\times n$矩阵，并且它与某区域$B(R)$是相伴的。设$N(A)$是所有$m\times n$矩阵A的集合。如果矩阵A使$\mu(A)$在区域$B(R)$上有定义，则定义在此区域$B(R)$上的区域函数$F(x)$有唯一确定的值。

证明 为了使矩阵A适合于上述定理3和4所述的形式，首先对矩阵A采用不动点变换T，并对区域$B(R)$采用变换F_1，即

$$T: A\longrightarrow A', \quad F_1: B(R)\longrightarrow B(R')$$

其中A'是定理3和4中所述的形式，并假定$N(A')$是所有矩阵A'的集合。已知，矩阵A属于$N(A)$，并与区域$B(R)$相伴，所以$N(A')$必定与区域$B(R')$相伴。

此外，由于变换T是保核的，所以，由区域$B(R)$到区域$B(R')$的相应改变F_1也是保核的。根根定义3，我们有

$$F(B(R))=F(B(R'))$$

最后，根据定理2，我们容易得到

$$F(x_0)=F(x_0')$$

于是定理得证。

推论4 任一非空的区域$B(R)$仅只存在一个稳定中心（或定义在此区域$B(R)$上的区域函数$F(x)$的核）或渐近稳定中心，当且仅当，与此区域相伴的线性代数方程组(4.1)的系数矩阵的测度值是唯一确定的。

证明 此推论的证明是相当平凡的。可由定理1，定理2，定理5与推论1直接得到。

作者对于 V. Lakshmikantham 教授在完成本文过程中，给予很大的帮助，表示感谢！

参考文献

[1] Burkill, J. C., Function of intervals, *Proc. London Math. Soc.*, **22** (1923), 275.

[2] Enderton, H. B., *Elements of Set Theory*, New York (1977).

[3] Kirk, R. B. and J. A. Crenshaw, A generalized topological measure theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **207**, 408 (1975), 189—217.

[4] Huard, P., Optimization algorithm and point to set maps, *Math. Program*, **8** (1975), 308—331.

[5] Gurter, M. und H. Weber, Eine verallgemeinerung der Fixpunktsatze ven Ehramann und Schroder für quasimetrische linnes-Raume, *J. rein. und angew. Math.*, **297** (1978), 136—162.

[6] Spanier, E., *Algebraic Topology*, New York (1966).

[7] Hartfiel, D. J., A general theory of measure for nonnegative matrice, *Linear Algebra and Appl.*, **35** (1981), 21—35.

Function of Region

Ho Chong

(Institute of Scientific Sinica Information, Chongqing)

Abstract

The purpose of this paper is to extend points function and interval functions theoretics to an arbitrary region. For this, the new theory, the contraction of a region, and the retraction of a region; the extension of a region, and the kernel-preserving extension of a region are established by the author. Starting from these concepts, the new definitions of a region function is given. And a kernel (i. e. fixed point) of a region function is connected with a stable centre of defining region of such a region function. Thereby, the region theoretics and algorthms are established.

In applications, to find a stable centre of a region, the author has utilized the measure theoretics of matrice defined by Hartfiel[7] and other authors. The measure problems of coefficient matrice of system of equations of linear algebra associated with some region are discussed.