

多层复合材料圆柱壳的非线性失稳计算

周承倜 周建平

(大连大学) (国防科技大学)

(1984年9月11日收到)

摘 要

本文用能量法和有限差分法分析了多层复合材料圆柱壳在轴压、静水压力及扭转等载荷作用下的非线性屈曲和后屈曲性能。本文考虑了柱壳的初始缺陷、几何非线性、材料的物理非线性(剪切模量非线性)等因素对于临界载荷的影响。同时还讨论了横向剪切效应。计算分析结果与一些实验结果比较一致。

一、引 言

多层复合材料薄壳的稳定性问题是复合材料力学中的一个重要的研究课题^[1]。由于此问题所包含的几何非线性、初始缺陷、材料的物理非线性、横向剪切效应等各种因素对于薄壳的屈曲和后屈曲性能的影响是如此复杂,以致这一问题的求解是十分困难的^[2,3]。70年代以来已经有几篇报告研究了几何非线性对于复合材料壳体的初始后屈曲性能的影响^[4~7]。关于物理非线性影响只有 Hahn^[8] 和 Jones^[9]对于平板受轴压问题进行过研究。

在工作[10]中,作者应用文献[2]所提供的方法解出了构造上各向异性的金属薄壳失稳问题。最近,作者用同一方法解出了多层复合材料圆柱壳的非线性屈曲问题,并获得良好结果。在本文中,我们进一步发展了这一方法,同时用能量法和差分法计算了几何非线性、材料的剪切模量非线性以及横向剪切变形对于柱壳屈曲性能的影响。将本文的计算结果与其他文献的结果以及实验结果相比较,本文的结果是良好的。

二、基本方程式和解

在一般铺设情况下,多层复合材料柱壳的基本方程式为^[11]。

$$L_1(w) - L_2(F) = N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} \quad (2.1)$$

$$L_2(w) + L_3(F) = (w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \quad (2.2)$$

其中

$$L_1(\) = d_{11}(\)_{,xxxx} + 4d_{16}(\)_{,xxyy} + (2d_{12} + d_{66})(\)_{,xxyy} + 4d_{26}(\)_{,xyyy} + d_{22}(\)_{,yyyy}$$

$$L_2(\) = b_{21}(\)_{,xxxx} + (2b_{26} - b_{61})(\)_{,xxyy} + (b_{11} + b_{22} - 2b_{66})(\)_{,xxyy}$$

$$+ (2b_{16} - b_{62})(\)_{,xyyy} + b_{12}(\)_{,yyyy} - (1/R)(\)_{,xx}$$

$$L_3(\quad) = a_{22}(\quad)_{,xxxx} - 2a_{26}(\quad)_{,xxxy} + (2a_{12} + a_{66})(\quad)_{,xyyy} - 2a_{16}(\quad)_{,xyyy} \\ + a_{11}(\quad)_{,yyyy}$$

$$N_x = F_{,yy}; \quad N_y = F_{,xx}; \quad N_{xy} = -F_{,xy}$$

在一般情况下, 方程(2.1)中的函数很难分离变量, 因此对方程(2.1)难以获得闭合形式的解^[9].

为了获得方程(2.1)的解, 作以下假定:

$$F = F_n^{(1)}(x) \sin(ny/R) + F_n^{(2)}(x) \cos(ny/R) \quad (2.3)$$

$$w = w_n^{(1)}(x) \sin(ny/R) + w_n^{(2)}(x) \cos(ny/R) \quad (2.4)$$

在小挠度假定情况下, 力 N_x , N_y 和 N_{xy} 都是常数, 而方程(2.2)的右边项可以略去. 将方程(2.2)代入方程(2.1)并对比系数即得:

$$d_{11}w_{n,xxxx}^{(1)} - (n/R)^2(2d_{12} + 4d_{66})w_{n,xx}^{(1)} + (n/R)^4d_{22}w_n^{(1)} - 4(n/R)d_{16}w_{n,xxx}^{(2)} \\ + 4(n/R)^3d_{26}w_{n,x}^{(2)} - b_{21}F_{n,xxxx}^{(1)} + [(n/R)^2(b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) + (1/R)]F_{n,xx}^{(1)} \\ - (n/R)^4b_{12}F_n^{(1)} + (n/R)(2b_{26} - b_{61})F_{n,xxx}^{(2)} - (n/R)^3(2b_{16} - b_{62})F_{n,x}^{(2)} \\ = N_x w_{n,xx}^{(1)} - (n/R)^2 N_y w_n^{(1)} - 2(n/R)N_{xy} w_{n,x}^{(2)} \quad (2.5)$$

$$4d_{16}(n/R)w_{n,xxx}^{(1)} - 4(n/R)^3d_{26}w_{n,x}^{(1)} + d_{11}w_{n,xxxx}^{(2)} - (n/R)^2(2d_{12} + 4d_{66})w_{n,xx}^{(2)} \\ + (n/R)^4d_{22}w_n^{(2)} - (n/R)(2b_{26} - b_{61})F_{n,xxx}^{(1)} + (n/R)^3(2b_{16} - b_{62})F_{n,x}^{(1)} \\ - b_{21}F_{n,xxx}^{(2)} + [(n/R)^2(b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) + (1/R)]F_{n,xx}^{(2)} - b_{12}(n/R)^4F_n^{(2)} \\ = N_x w_{n,xx}^{(2)} - (n/R)^2 N_y w_n^{(2)} + 2(n/R)N_{xy} w_{n,x}^{(1)} \quad (2.6)$$

$$b_{21}w_{n,xxxx}^{(1)} - [(n/R)^2(b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) + (1/R)]w_{n,xx}^{(1)} + b_{12}(n/R)^4w_n^{(1)} \\ - (n/R)(2b_{26} - b_{61})w_{n,xxx}^{(2)} + (n/R)^3(2b_{16} - b_{62})w_{n,x}^{(2)} + a_{22}F_{n,xxxx}^{(1)} \\ - (n/R)^2(2a_{12} + a_{66})F_{n,xx}^{(1)} + (n/R)^4a_{11}F_n^{(1)} + 2a_{26}(n/R)F_{n,xxx}^{(2)} \\ - 2a_{16}(n/R)^3F_{n,x}^{(2)} = 0 \quad (2.7)$$

$$(2b_{26} - b_{61})(n/R)w_{n,xxx}^{(1)} - (n/R)^3(2b_{16} - b_{62})w_{n,x}^{(1)} + b_{21}w_{n,xxxx}^{(2)} \\ - [(n/R)^2(b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) + (1/R)]w_{n,xx}^{(2)} + (n/R)^4b_{12}w_n^{(2)} \\ - 2(n/R)a_{26}F_{n,xxx}^{(1)} + 2(n/R)^3a_{16}F_{n,x}^{(1)} + a_{22}F_{n,xxxx}^{(2)} \\ - (n/R)^2(2a_{12} + a_{66})F_{n,xx}^{(2)} + (n/R)^4a_{11}F_n^{(2)} = 0 \quad (2.8)$$

方程(2.5)~(2.8)可以用能量法或者差分法求解. 按照能量法, 设挠度函数 w 为:

$$w_n = \sum_{t=1}^{\infty} [A_{2t-1} \sin(ny/R) + A_{2t} \cos(ny/R)] \sin(i\pi x/L) \quad (2.9)$$

上述函数能够满足边界上 $w=0$ 的条件. 将函数 w 代入协调方程式(2.7)和(2.8), 则可求得应力函数 F_n 为:

$$F_n = \sum_{t=1}^{\infty} [(B_{4t-3} \sin(i\pi x/L) + B_{4t-2} \cos(i\pi x/L)) \sin(ny/R)$$

$$\begin{aligned}
 & + (B_{4i-1} \sin(i\pi x/L) + B_{4i} \cos(i\pi x/L)) \cos(ny/R) \\
 & + (N_x y^2 + N_y x^2)/2 - N_{xy} xy
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
 B_{4i-3} &= -g_1^i A_{2i-1}, \quad B_{4i-2} = -g_2^i A_{2i}, \quad B_{4i-1} = -g_1^i A_{2i}, \quad B_{4i} = g_2^i A_{2i} \\
 g_1^i &= (a_i \alpha_i + b_i \beta_i) / (\alpha_i^2 - \beta_i^2), \quad g_2^i = (b_i \alpha_i + a_i \beta_i) / (\alpha_i^2 - \beta_i^2) \\
 \alpha_i &= (i\pi/L)^4 b_{21} + (i\pi/L)^2 (n/R)^2 (b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) + b_{12} (n/R)^4 + (1/R) (i\pi/L)^2 \\
 b_i &= (i\pi/L) (n/R) [(i\pi/L)^2 (2b_{26} - b_{61}) + (n/R)^2 (2b_{16} - b_{62})] \\
 \alpha_i &= (i\pi/L)^4 a_{22} + (i\pi/L)^2 (n/R)^2 (2a_{12} + a_{66}) + (n/R)^4 a_{11} \\
 \beta_i &= 2(i\pi/L) (n/R) [(i\pi/L)^2 a_{26} + (n/R)^2 a_{16}]
 \end{aligned}$$

系统的总势能为:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= (1/2) \int_0^{2\pi R} \int_0^L (\{N\}^T [a] \{N\} + \{\chi\}^T [d] \{\chi\}) dx dy \\
 & + (1/2) \int_0^{2\pi R} \int_0^L [N_x(w,x)^2 + N_y(w,y)^2 + 2N_{xy}(w,x)(w,y)] dx dy \\
 & = (\pi RL/4) \sum_{i=1}^{\infty} \{d_{11} (i\pi/L)^4 + 2(d_{12} + 2d_{66}) (i\pi/L)^2 (n/R)^2 \\
 & + d_{22} (n/R)^4 + [a_{22} (i\pi/L)^4 + (2a_{12} + a_{66}) (i\pi/L)^2 (n/R)^2 \\
 & + a_{11} (n/R)^4] ((g_1^i)^2 + (g_2^i)^2) - 4(i\pi/L) (n/R) [(i\pi/L)^2 a_{26} \\
 & + (n/R)^2 a_{16}] g_1^i g_2^i \} (A_{2i-1}^2 + A_{2i}^2) + 2RL \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ' 2ij (\pi/RL) \\
 & \cdot [(\pi/L)^2 (i^2 + j^2) d_{16} + 2(n/R)^2 d_{26}] + [a_{22} (i\pi/L)^2 (j\pi/L)^2 \\
 & + a_{12} (n/R)^2 (\pi/L)^2 (i^2 + j^2) + a_{11} (n/R)^4] (jg_1^i g_2^i + ig_1^i g_2^i) \\
 & + a_{66} (i\pi/L) (j\pi/L) (n/R)^2 (ig_1^i g_2^i + jg_1^i g_2^i) - a_{26} (\pi/L)^3 (n/R) \\
 & \cdot [(i^2 + j^2) g_1^i g_2^i + 2ijg_2^i g_2^i] ij - a_{16} (n/R)^3 (\pi/L) [(i^2 + j^2) g_2^i g_2^i \\
 & + 2ijg_1^i g_1^i] \} (j^2 - i^2)^{-1} (A_{2j-1} A_{2i}) + (\pi RL/4) \sum_{i=1}^{\infty} [(i\pi/L)^2 N_x \\
 & + (n/R)^2 N_y] (A_{2i-1}^2 + A_{2i}^2) + (\pi RL) N_{xy} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ' (4n/RL) \\
 & \cdot (ij/(j^2 - i^2)) A_{2j-1} A_{2i}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

在上式中 $\sum_{j=1}^{\infty} '$ 表示 $j+i=$ 奇数时的 j 项的总和。取总势能 Π 对系数 A_{2i-1} 和 A_{2i} 的变分就获得下列屈曲时的平衡方程:

$$Q_1^i A_{2i-1} + \sum_{j=1}^{\infty} ' Q_2^{ji} A_{2j} + [N_x (i\pi/L)^2 + N_y (n/R)^2] A_{2i-1} + N_{xy} \sum_{j=1}^{\infty} ' Q_3^{ji} A_{2j} = 0 \tag{2.12}$$

$$Q_1^i A_{2i} - \sum_{j=1}^{\infty} ' Q_2^{ji} A_{2j-1} + [N_x (i\pi/L)^2 + N_y (n/R)^2] A_{2i} - N_{xy} \sum_{j=1}^{\infty} ' Q_3^{ji} A_{2j-1} = 0 \tag{2.13}$$

$$(i=1, 2, 3, \dots)$$

在以上方程(2.12)和(2.13)中符号 Q_i^i , $Q_i^{j'}$, 和 $Q_i^{j''}$ 为:

$$\begin{aligned} Q_i^i &= d_{11}(i\pi/L)^4 + 2(d_{12} + 2d_{66})(i\pi/L)^2(n/R)^2 + d_{22}(n/R)^4 \\ &\quad + [a_{22}(i\pi/L)^4 + (2a_{12} + a_{66})(i\pi/L)^2(n/R)^2 + a_{11}(n/R)^4]((g_1^i)^2 + (g_2^i)^2) \\ &\quad - 4(i\pi/L)(n/R)[(i\pi/L)^2 a_{26} + (n/R)^2 a_{16}]g_1^i g_2^i \\ Q_i^{j'} &= (4/\pi)\{2(n/R)(\pi/L)ij[(\pi/L)^2(i^2 + j^2)d_{16} + 2(n/R)^2 d_{26}] \\ &\quad + [a_{22}(i\pi/L)^2(\alpha\pi/L)^2 + a_{12}(\pi/L)^2(n/R)^2(i^2 + j^2) + a_{11}(n/R)^4] \\ &\quad \cdot (ig_1^i g_1^j + jg_2^i g_2^j) + a_{66}(n/R)^2(i\pi/L)(\alpha\pi/L)(jg_1^i g_2^j + ig_1^j g_2^i) \\ &\quad - a_{26}(n/R)(\pi/L)^3 ij[(i^2 + j^2)g_1^i g_1^j + 2ijg_1^i g_2^j] \\ &\quad - a_{16}(n/R)^3(\pi/L)[(i^2 + j^2)g_2^i g_2^j + 2ijg_1^i g_2^j]\}(i^2 - j^2)^{-1} \\ Q_i^{j''} &= (8n/RL)(ij)(i^2 - j^2)^{-1} \end{aligned}$$

在数值计算中必须截取三角级数的有限项。在壳体屈曲问题中主要项不一定是最低次的项, 在正交各向异性柱壳中, 所截取的项必需包括能表示屈曲波形特征的主要项。

求解方程(2.5)~(2.8)的另一数值方法是有限差分法。在计算中本文应用中央差分, 对于中等长度柱壳采用50个以上结点可获得满意结果。

现在考虑柱壳的大挠度解和后屈曲性能。设初始缺陷波形与屈曲波形一致, 即

$$\bar{w}/w = \text{const} \quad (2.14)$$

取柱壳的屈曲波形为:

$$w = w_0 + w_1 \sin(m\pi x/L) \sin(ny/R) + w_2 \sin^2(m\pi x/L) \sin^2(ny/R) \quad (2.15)$$

将上式代入变形协调方程(2.2), 求得相应的应力函数 F 为:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{10} [A_i \cos m_i(m\pi x/L) \cos n_i(ny/R) \\ &\quad + \bar{A}_i \sin m_i(m\pi x/L) \sin n_i(ny/R)] + \frac{1}{2} (N_x y^2 + N_y x^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

系数 m_i 和 n_i 列于表 1。

表 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	2	2	0	4	1	2	1	3	4	0
n_i	0	4	2	2	1	2	3	1	0	4

将公式(2.15)和(2.16)代入总势能 Π 得到:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{64} \left[\pi RL \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \left\{ F_1 w_1^2 + F_2 w_2^2 + F_3 w_1^2 w_2 + F_4 w_2^3 \right. \\ &\quad + F_5 w_1^2 w_2^2 + F_6 w_1^4 + F_7 w_2^4 - 4\lambda \left[P_1 \left(\frac{R}{n} \right)^2 + qR \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \right] \\ &\quad \left. \cdot (4w_1^2 + 3w_2^2) \right\} + \text{const} \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 λ 是初始缺陷因子: $\lambda = 1 + 2(\bar{w}/w)$, 系数 A_i , \bar{A}_i , 和 F_i 的表达式见文献 [11]。

将总势能公式(2.17)对参数 w_1 和 w_2 进行变分, 即可获得计算初始后屈曲平衡位形曲线的公式:

$$F_1 + F_2 w_2 + F_5 w_2^2 + 2F_6 w_1^2 - 16\lambda \left[P_1 \left(\frac{R}{n} \right)^2 + qR \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.18)$$

$$2F_2 - 24\lambda \left[P_1 \left(\frac{R}{n} \right)^2 + qR \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \right] w_2 + F_3 w_1^2 + 3F_4 w_2^2 + 2F_5 w_1^2 w_2 + 4F_7 w_2^2 = 0$$

以上方程还可以写成:

$$w_1^2 = [(1.5F_1 - 2F_2) + (1.5F_3 - 3F_4)w_2 + (1.5F_5 - 4F_7)w_2^2] w_2 / [F_3 + (2F_5 - 3F_6)w_2] \quad (2.19)$$

$$P_1 = \left\{ \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 / 16\lambda \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + K \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \right\} (F_1 + F_3 w_2 + F_5 w_2^2 + 2F_6 w_1^2) \quad (2.20)$$

其中 $K = qR/P_1$ 。在静水压力情况下, $K = 2$; 在均匀轴压时, $q = 0$, 于是 $K = 0$ 。

三、计算结果和讨论

在表 2 中列出用能量法和差分法计算的结果。壳体的材料常数为: $E_{11} = 40 \times 10^6 \text{psi}$, $E_{22} = 4.5 \times 10^6 \text{psi}$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 1.5 \times 10^6 \text{psi}$, 壳体尺寸为: $R = 6 \text{in}$, 壳厚 $h = 0.036 \text{in}$, 长度 $L = 12 \text{in}$, 每层厚度相等。

表 2 圆柱壳的临界压力*

$\theta =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
文献[4]	914.8	1114	1277	1308	1210	1081	951.8	843.1
能量法	910.8	1082	1179	1230	1216	986.6	828.2	741.0
差分法	908.0	1084	1212	1262	1203	986.6	820.3	733.2
波数 n	11	12	12	12	12	12	12	11

* 压力单位, 磅/英吋。

从表 2 的结果可以看出, 本文用能量法和差分法计算的结果普遍低于文献[4]的结果。这是因为文献[4]所取的挠度函数 $w = h \cdot \sin(m\pi x/L) \cos(n/R) (y - rx)$ 是太粗略了, 不能很好反映耦合效应对临界压力的影响。本文计算时, 对于级数取 $i = 1 \sim 15$ 项, 而差分法计算的是 S2 边界条件。两种方法的计算结果很接近, 说明对于能量法只要取足够多项, 它的计算结果的精度是可以保证的。

在表 3 中示出柱壳在扭转屈曲时的实验结果和计算结果的比较。对于级数解所取项数为 $i = 1 \sim 10$ 。柱壳材料为斯考契 (Scotchply) XP250, 是明尼苏达矿业公司产品, 试件是玻璃/环氧缠绕柱壳。材料系数为: $E_{11} = 37.92 \text{GN/m}^2 (5.5 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2)$, $E_{22} = 17.93 \text{GN/m}^2 (2.6 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2)$, $G_{12} = 4.83 \text{GN/m}^2 (0.7 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2)$, $\nu_{12} = 0.37$ 。柱壳尺寸: $R = 159 \text{mm} (6.26 \text{ in})$, $L = 317.5 \text{mm} (12.5 \text{ in})$, $h = 0.686 \text{mm} (0.027 \text{ in})$ 。在表 3 中 θ 是纤维铺设方向与柱壳轴向所成的夹角。差分法用 50 个结点计算, 边界条件为 S2 简支。

表 3 柱壳扭转屈曲的实验和理论比较*

柱壳 №	铺设角 θ			实验 M	文献[7] M_1	级数解 M_2	差分解 M_3	$\frac{M}{M_1}$	$\frac{M}{M_2}$	$\frac{M}{M_3}$
	内	中	外							
1a	-70°	70°	0°	10055	11434	11193	11187	0.879	0.898	0.899
4b	90°	-45°	45°	14125	14480	13811	13843	0.976	1.023	1.020
6b	45°	0°	-45°	12050	10308	11561	11854	1.169	1.042	1.017
7b	-45°	45°	90°	10135	12173	11088	11103	0.833	0.914	0.913
9b	0°	-45°	45°	9895	9925	11382	11306	0.977	0.869	0.875
11b	30°	90°	30°	10155	10823	10991	10898	0.936	0.922	0.930
12b	30°	90°	-30°	9895	11731	11000	10977	0.844	0.900	0.901

* 扭转屈曲载荷 M 的单位: $\text{lb} \cdot \text{in}.$

从表 3 可见本文计算结果一般比文献[7]更接近于实验结果。计算结果还表明柱壳扭转屈曲对于初始缺陷并不敏感。

用文献[12]所提供的非线性应力应变关系考虑了材料的剪切模量非线性对于硼/环氧柱壳轴压失稳的临界压力的影响。计算用级数解进行, 结果示于图1。2层和4层硼/环氧的计算结果表明剪切模量非线性显著降低了临界载荷, 这说明考虑材料的物理非线性影响是有必要的。

在图 2 示出了考虑初始缺陷的柱壳的后屈曲平衡位形曲线 (P_1-w_1/h) 及极值点失稳的典型情况。柱壳的铺设情况为 $30^\circ/-30^\circ/0^\circ$ 。从图中可知, 如此铺设的复合材料柱壳对于轴压失稳情况下的初始缺陷仍然是很敏感的。同时可以看出, 剪切模量非线性使柱壳的后屈曲平衡位形曲线趋于平坦。所以材料的剪切模量非线性事实是缓和了柱壳在轴压情况下对于初始缺陷的敏感程度。

级数解方法还用来研究了横向剪切效应对于初始缺陷敏感度的影响。关于这一问题将在另一篇报告中讨论^[13]。

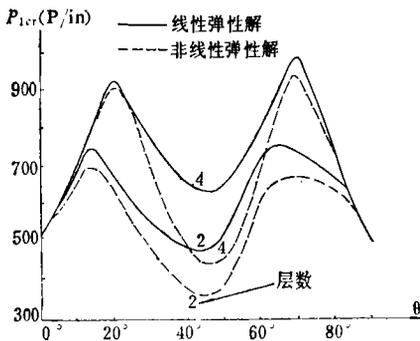


图 1 硼/环氧2层4层壳在轴压下的临界载荷

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 30.1 \times 10^6 \text{psi} & E_{22} &= 2.87 \times 10^6 \text{psi} \\
 \nu_{12} &= 0.25 & S_{66} &= 1.25 \times 10^6 (\text{psi})^{-1} \\
 S_{6666} &= 1.53 \times 10^{-14} (\text{psi})^{-3} & R &= 6 \text{in} \\
 L &= 12 \text{in} & H &= 0.036 \text{in}
 \end{aligned}$$

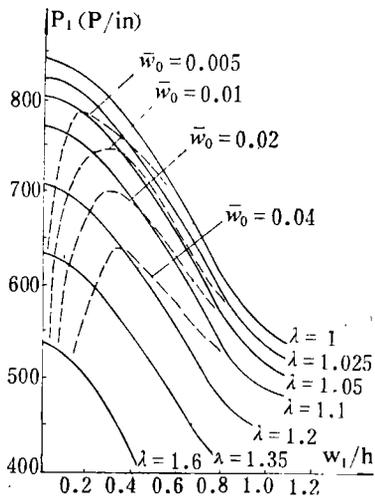


图 2 $30^\circ/-30^\circ/0^\circ$ 柱壳后屈曲平衡位形曲线(P_1-w_1/h)

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 30.1 \times 10^6 \text{psi} & E_{22} &= 2.87 \times 10^6 \text{psi} \\
 \nu_{12} &= 0.225 & S_{66} &= 1.25 \times 10^{-1} (\text{psi})^{-1} \\
 S_{6666} &= 1.53 \times 10^{-14} (\text{psi})^{-3} & R &= 6 \text{in} \\
 L &= 12 \text{in} & H &= 0.036 \text{in}
 \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 周承侗, 《复合材料弹性力学》, 应用数学和力学丛书, (1983).
- [2] 周承侗, 《薄壳弹塑性稳定性理论》, 国防工业出版社, (1979).
- [3] 周承侗, 《弹性稳定性理论》, 应用数学和力学丛书, 四川人民出版社, (1981).
- [4] Khot, N. S. and V. B., Venkaya, Effect of fiber orientation on initial postbuckling behavior and imperfection sensitivity of composite cylindrical shells, *AFFDL-TR-70-125*, (1970).
- [5] Khot, N. S., Buckling and postbuckling behavior of composite cylindrical shells under axial pressure, *AIAA Journal*, 8, 2 (1970) 229—235.
- [6] Khot, N. S., Postbuckling behavior of geometrical imperfection of composite cylindrical shells under axial compression, *AIAA Journal*, 8, 3 (1970), 579—581.
- [7] Tennyson, R. C., Buckling of laminated composite cylinders: a review, *Composites*, (1975).
- [8] Hahn, H. T., Nonlinear behavior of laminated composites, *Journal of Composite Materials*, (1973), 257—271.
- [9] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Mc Graw-Hill Book Co. (1975).
- [10] 周承侗, 有初始缺陷的加肋薄壳的塑性稳定性理论, 力学学报, 特刊, (1981) 162—172.
- [11] 周承侗、周建平, 复合材料圆柱壳的非线性稳定性分析, 大连大学, 计算机科学和力学研究室, 科研资料, 编号: 84-001, 全国复合材料力学学术会议宣读论文, 上海, (1984).
- [12] Hahn, H. T. and S. Tsai, Nonlinear elastic behavior of unidirectional composites laminates, *Journal of Composite Materials*, (1973) 102—118.
- [13] 周承侗、周建平, 横向剪切对于复合材料迭层圆柱壳的非线性稳定性的影响, 大连大学, 计算机科学和力学研究室, 科研资料, 编号: 84-003, (1984).

The Computation of Nonlinear Instability for Multilayer Composite Cylindrical Shells

Zhou Cheng-ti

(Dalian University, Dalian)

Zhou Chien-bin

(Changsha Institute of Technology, Changsha)

Abstract

In this paper, energy method and finite difference method are used to compute the instability behavior of multilayered fiber reinforced composite cylindrical shells under axial compression, hydrostatic pressure and torsion. The influences of initial imperfections, geometrical nonlinearities of shells and physical nonlinearities of the materials to the buckling and postbuckling behavior of the shells are considered. The effect of transverse shear is also discussed. The computational results of this paper are well agreed with the experimental data.