应用数学和力学，第7卷第1期（1986年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多值映射的公共随机不动点定理*

丁协平

（四川师范学院，1983年2月24日收到）

摘　要

在本文中，我们对一般集值压缩型映射证明了几个随机公共不动点定理，这些定理改进和推广了[1～18]中的相应结果.

最近Achari[1]研究了点到紧集的多值压缩型映射的公共不动点问题。Ray[2]，Rus[3]，Kasahara[4]，Czerwik[5]，Kita[6]，Bose和Mukherjee[7]，Chen和Shih[8]，倪、姚、赵[9]相继研究了点到闭集的多值压缩型映射的公共不动点问题。[2～9]的结果都改进和推广了Nadler[10]的有名结果。以上文献中对映射所附加的压缩型条件几乎都是线性的。

另一方面Itoh[11]，张[12~13]研究了多值压缩型映射的随机不动点问题，推广了某些决定性结果。

本文对更广泛的一类多值压缩型映射得到几个随机公共不动点定理，在随机情形下它们是[11～18]中相应结果的推广。在决定性的情形它们也是[1～10]中相应结果的改进和推广。

一、记号和引理

全文中设(X, d)为一Polish空间，即是一可分完备距离空间，$(\Omega, \mathscr{B}, P)$是一完备概率空间，$CB(X)$表X的一切非空有界闭集的族。$\mathscr{B}$表X的一切Borel子集的σ-代数，$D(x, B)=\inf\{d(x,y); y\in B\}$表点$x$到集$B\subset X$的距离，$H(\cdot,\cdot)$表$d$在$CB(X)$上诱导的Hausdorff距离。

定义　称映射$T:\Omega\to 2^X$为$\mathscr{B}$-可测的，如果对任意开集$B\subset X$有

$$T^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:\ T(\omega)\cap B\neq\phi\}\in\mathscr{B}$$

称映射$u:\Omega\to X$为可测映射$T:\Omega\to 2^X$的可测选择，如果u是可测的且有$u(\omega)\in T(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$。

注意这里定义的可测性Himmelberg[19]称为弱可测，仔细分析[11]命题2的证明知成立

引理1[11]　设$T:\Omega\times X\to CB(X)$满足对每一$x\in X$，$T(\cdot, x)$可测，对每一$\omega\in\Omega$，$T(\omega, \cdot)$连续。如果$u:\Omega\to X$是一可测映射，则由$G(\omega)=T(\omega, u(\omega))$定义的映射$G:\Omega\to CB(X)$是可测的。

* 钱伟长推荐.

仿[11]命题 4 的证明容易证得

引理 2 [12] 设 $S,T:\Omega\to CB(X)$是可测映射，$u:\Omega\to X$ 是 S 的一可测选择，则对任意可测函数 $a:\Omega\to(1,\infty)$，存在 T 的一可测选择 $v:\Omega\to X$ 使得

$$d(u(\omega),v(\omega))\leqslant a(\omega)H(S(\omega),\ T(\omega)) \tag{1.1}$$

引理 3 [20] 设序列$\{A_n\}\subset CB(X)$，$A_0\in CB(X)$且$\lim\limits_{n\to\infty}H(A_n,\ A_0)=0$。如果$x_n\in A_n$，$\forall n\geqslant 1$ 和 $x_n\to x_0$，则 $x_0\in A_0$。

引理 4 [21] 设 $\varphi:R_+\to R_+$（非负实数集）非减和从右边上半连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$，$\forall t>0$，$\Leftrightarrow\varphi(t)<t$，$\forall t>0$，其中 φ^n 表 φ 的第 n 次迭代。

二、主 要 结 果

以下假定$\Phi:\Omega\times R_+^5\to R_+$是满足下述条件的函数：

(Φ_1) 对每一$(t_1,t_2,t_3,\ t_4,\ t_5)\in R_+^5$，$\Phi(\cdot,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5)$可则，对每一$\omega\in\Omega$，$\Phi(\omega,\ \cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$关于每一自变量 $t_i(i=1,2,\cdots,5)$，严格增加和右连续。

(Φ_2) 对每一 $t>0$，有

$$P(\omega\in\Omega:\ \sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\omega,t)<\infty)=P(\Omega_t)=1$$

其中$\varphi(\omega,\ t)=\max\{\Phi(\omega,t,t,t,0,2t),\ \Phi(\omega,t,t,t,2t,0)\}$，$\varphi^{n+1}(\omega t)=\varphi(\omega,\ \varphi^n(\omega,t))$

定理 1 设 S，$T:\Omega\times X\to CB(X)$，对每一$x\in X$，$S(\cdot,x)$和$T(\cdot,x)$是可测的，对每一$\omega\in\Omega$，$S(\omega,\cdot)$，$T(\omega,\cdot)$是连续的。如果对一切 x，$y\in X$

$$\begin{aligned}P\{\omega\in\Omega:&H(S(\omega,x),T(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y),\ D(S(\omega,x),x),\\&D(T(\omega,y),y),\ D(T(\omega,\ y),x),\ D(S(\omega,x),y))\}=P(E_{xy})=1\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中Φ满足条件(Φ_1)和(Φ_2)，则在几乎处处意义下 S 和 T 分别的随机不动点集重合且非空。即存在一可测映射 $u:\Omega\to X$ 使得对几乎一切 $\omega\in\Omega$ 有

$$u(\omega)\in s(\omega,u(\omega)),\ u(\omega)\in T(\omega,\ u(\omega))$$

证明 由 X 的可分性，Φ 的右连续性和S，T关于 x 的连续性，根据Φ_2，引理 4 和(2.1)式知存在集合$A\in\mathscr{B}$，$P(A)=1$ 使得对每一 $\omega\in A$ 有

$$\varphi(\omega,t)=\max\{\Phi(\omega,t,t,t,0,2t),\ \Phi(\omega,t,t,t,2t,0)\}<t,\ \forall t>0 \tag{2.2}$$

和对一切 x，$y\in X$成立

$$\begin{aligned}&H(S(\omega,x),T(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y),D(S(\omega,x),x),D(T(\omega,y),y),\\&\quad D(T(\omega,y),x),\ D(S(\omega,x),y))),\ \forall\omega\in A\end{aligned} \tag{2.3}$$

任选可测映射 $x_0:A\to X$，由引理 1 知 $S(\omega,\ x_0(\omega)):A\to CB(X)$ 是一可测映射，故由 Kuratowski; Ryll-Nardzewski[22][23,p.56]的定理存在 $S(\cdot,x_0(\cdot))$的一可测选择 $x_1:A\to X$。于是 $T(\cdot,x_1(\cdot))$：$A\to CB(X)$ 也是可测映射。我们断言成立$D(T(\omega,x_1(\omega)),\ x_1(\omega))\leqslant d(x_1(\omega),x_0(\omega)),\forall\omega\in A$。否则存在 $\omega\in A$使得$0\leqslant d(x_1(\omega),\ x_0(\omega))<D(T(\omega,x_1(\omega),x_1(\omega))$。由(2.2)，(2.3)两式推得

$$\begin{aligned}&D(T(\omega,x_1(\omega)),\ x_1(\omega))\leqslant H(S(\omega,x_0(\omega)),\ T(\omega,x_1(\omega)))\\&\quad\leqslant\Phi(\omega,d(x_0(\omega),\ x_1(\omega)),\ D(S(\omega,x_0(\omega)),\ x_0(\omega)),\ D(T(\omega,x,(\omega)),\\&\quad x_1(\omega)),\ D(T(\omega,\ x_1(\omega)),\ x_0(\omega)),\ D(S(\omega,\ x_0(\omega)),\ x_1(\omega)))\end{aligned}$$

$$\leqslant\Phi(\omega,D(T(\omega,x_1(\omega)),\ x_1(\omega)),\ D(T(\omega,\ x_1(\omega)),\ x_1(\omega)),$$
$$D(T(\omega,\ x_1(\omega)),\ x_1(\omega)),\ 2D(T(\omega,\ x_1(\omega)),x_1(\omega)),\ 0)$$
$$<D(T(\omega,\ x_1(\omega)),\ x_1(\omega))$$

矛盾，故断言成立，即有

$$D(T(\omega,x_1(\omega)),\ x_1(\omega))\leqslant d(x_1(\omega),\ x_0(\omega)),\ \forall\omega\in A \tag{2.4}$$

显然由 $\alpha(\omega)=d(x_1(\omega),\ x_0(\omega))+1,\ \forall\omega\in A$ 定义的函数 $\alpha:A\to R_+$ 可测且有 $d(x_1(\omega),\ x_0(\omega))<\alpha(\omega),\ \forall\omega\in A$。从而有 $\varphi(\omega,d(x_1(\omega),\ x_0(\omega)))<\varphi(\omega,\alpha(\omega))\ \forall\omega\in A$，这里

$$\varphi(\omega,t)=\max\{\Phi(\omega,t,t,t,0,2t),\ \Phi(\omega,t,t,t,2t,0)\}$$

于是 $2\varphi(\omega,\alpha(\omega))/[\varphi(\omega,d(x_1(\omega),\ x_0(\omega)))+\varphi(\omega,\alpha(\omega))]$是映$A$到$(1,\infty)$的可测函数。由引理 2 知存在 $T(\cdot,x_1(\cdot))$的一可测选择 $x_2:A\to X$ 使得

$$d(x_1(\omega),x_2(\omega))\leqslant H(S(\omega,x_0(\omega)),T(\omega,x_1(\omega)))\frac{2\varphi(\omega,\alpha(\omega))}{[\varphi(\omega,d(x_1(\omega),x_0(\omega)))+\varphi(\omega,\alpha(\omega))]}$$
$$\leqslant\Phi(\omega,d(x_0(\omega),x_1(\omega)),\ D(S(\omega,x_0(\omega)),x_0(\omega)),\ D(T(\omega,x_1(\omega)),x_1(\omega)),$$
$$D(T(\omega,x_1(\omega)),\ x_0(\omega)),\ D(S(\omega,x_0(\omega)),\ x_1(\omega)))$$
$$\cdot 2\varphi(\omega,\alpha(\omega))/[\varphi(\omega,d(x_1(\omega),\ x_0(\omega)))+\varphi(\omega,\alpha(\omega))]$$
$$\leqslant\Phi(\omega,d(x_0(\omega),x_1(\omega)),\ d(x_0(\omega),\ x_1(\omega)),\ d(x_0(\omega),x_1(\omega)),2d(x_0(\omega),x_1(\omega)),0)$$
$$\cdot 2\varphi(\omega,\alpha(\omega))/[\varphi(\omega,d(x_1(\omega),\ x_0(\omega)))+\varphi(\omega,\alpha(\omega))]$$
$$\leqslant\varphi(\omega,d(x_1(\omega),\ x_0(\omega))\cdot 2\varphi(\omega,\alpha(\omega))/[\varphi(\omega,d(x_1(\omega),x_0(\omega)))+\varphi(\omega,\alpha(\omega))]$$
$$<\varphi(\omega,\alpha(\omega)) \tag{2.5}$$

仿上述推证知存在 $S(\cdot,x_2(\cdot))$的可测选择 $x_3:A\to X$使得

$$d(x_2(\omega),x_3(\omega))<\varphi(\omega,\varphi(\omega,\alpha(\omega)))=\varphi^2(\omega,\alpha(\omega))$$

由归纳法，可选出一可测映射序列 $x_n:A\to X$，$(n=1,2,\cdots,)$ 使得对每一$\omega\in A$ 有 $x_{2n+1}(\omega)\in S(\omega,\ x_{2n}(\omega))$，$x_{2n+2}(\omega)\in T(\omega,\ x_{2n+1}(\omega))$。且有

$$d(x_{n+1}(\omega),\ x_n(\omega))<\varphi^n(\omega,\alpha(\omega)),\ \forall\omega\in A \tag{2.6}$$

于是有

$$\sum_{n=0}^{\infty}d(x_{n+1}(\omega),\ x_n(\omega))<\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\omega,\alpha(\omega))<\infty,\ \forall\omega\in A$$

因此对每一$\omega\in A$，$\{x_n(\omega)\}$是一 Cauchy 序列。设

$$\lim_{n\to\infty}\ x_n(\omega)=x^*(\omega),\ \forall\omega\in A \tag{2.7}$$

因为 $x^*(\omega)$是可测映射 $x_n(\omega)$逐点收敛的极限，故 $x^*:A\to X$ 是可测的。又对每一$\omega\in A$，由 $S(\omega,\ \cdot)$和$T(\omega,\ \cdot)$的连续性有$\lim\limits_{n\to\infty}H(S(\omega,x_n(\omega)),\ S(\omega,x^*(\omega)))=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}H(T(\omega,\ x_n(x)),\ T(\omega,\ x^*(\omega)))=0$，又因 $x_{2n+1}(\omega)\in S(\omega,x_{2n}(\omega))$，$x_{2n+2}(\omega)\in T(\omega,\ \omega_{2n+1}(\omega))$。于是由(2.7)式和引理 3 推得

$$x^*(\omega)\in S(\omega,\ x^*(\omega));\ x^*(\omega)\in T(\omega,x^*(\omega)),\ \forall\omega\in A$$

现在定义映射 $u:\Omega\to X$ 如下

$$u(\omega)=\begin{cases}x^*(\omega), & \text{当 } \omega\in A\\ z, & \text{当 } \omega\in\Omega\backslash A\end{cases}$$

其中 z 为 X 内一固定元素。显然 $u:\Omega\to X$ 可测且对几乎一切 $\omega\in\Omega$ 有

$$u(\omega)\in S(\omega,\ u(\omega)),\ u(\omega)\in T(\omega,u(u))$$

即 $u:\Omega\to X$ 在几乎处处意义下是 S，T 的一公共随机不动点。

现在设在几乎处处意义下$y:\Omega\to X$是S的一随机不动点，即对几乎一切$\omega\in\Omega$有$D(S(\omega,y(\omega)),\ y(\omega))=0$，由(2.1)有

$$\begin{aligned}D(T(\omega,y(\omega)),\ y(\omega))&\leqslant H(T(\omega,\ y(\omega)),\ S(\omega,y(\omega)))\\&\leqslant\Phi(\omega,0,\ D(S(\omega,y(\omega)),\ y(\omega)),\ D(T(\omega,y(\omega)),y(\omega)),\\&\quad D(T(\omega,y(\omega)),\ y(\omega)),\ D(S(\omega,y(\omega)),\ y(\omega)))\\&\leqslant\varphi(\omega,D(T(\omega,y(\omega)),\ y(\omega))\end{aligned}$$

对几乎一切$\omega\in\Omega$成立，上式蕴含对几乎一切$\omega\in\Omega$成立$D(T(\omega,y(\omega)),\ y(\omega))=0$，即$y(\omega)\in T(\omega,y(\omega))$。同理可证$T$在几乎处处意义下的每一随机不动点也是$S$在几乎处处意义下的随机不动点。故$S,T$分别在几乎处处意义下的随机不动点集重合且非空。定理证毕。

系 1 设$S,\ T:\Omega\times X\to CB(X)$，对每一$x\in X$，$S(\cdot,x)$，$T(\cdot,x)$可测；对每一$\omega\in\Omega$，$S(\omega,\cdot)$，$T(\omega,\cdot)$连续。如果存在可测函数$K:\Omega\to(0,1)$，使得对一切$x,y\in X$成立

$$\begin{aligned}P\{\omega\in\Omega:H(S\omega,x),\ T(\omega,y)\leqslant K(\omega)\max\{d(x,y),D(S(\omega,x),x),\\D(T(\omega,y),y),[D(T(\omega,y),\ x)+D(S(\omega,x),y)]/2\}\}=P(E_{xy})=1\end{aligned}$$

则在几乎处处意义下S的随机不动点集与T的随机不动点集合且非空。即存在可测映射$u:\Omega\to X$，使得对几乎一切$\omega\in\Omega$成立

$$u(\omega)\in S(\omega,u(\omega)),\ u(\omega)\in T(\omega,u(\omega))$$

证明 在定理1中取$\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=K(\omega)\max\{t_1,t_2,t_3,[t_4+t_5]/2\}$。由定理1知系1成立。

注 1 系1是[1～9]中相应结果的改进和随机化推广，是[10]中主要定理的改进和推广。在单值情形也是[11～18]中相应结果的改进和推广。

由定理1立即可得

定理 2 设$\mathscr{F}$是映$\Omega\times X$到$CB(X)$内的多值映射的族。对每一$S\in\mathscr{F}$，$S(\cdot,x)$，$\forall x\in X$，可测，$S(\omega,\cdot)$，$\forall\omega\in\Omega$连续。如果对每一相异对S，$T\in\mathscr{F}$和对一切$x,y\in X$，有(2.1)式成立，其中Φ满足条件(Φ_1)和(Φ_2)。则$\mathscr{F}$内所有映射在几乎处处意义下有相同的非空随机不动点集。

注 2 定理2内讨论的多值映射族显然比[13]内讨论的点到紧集的多值映射序列更一般。因此定理2改进和推广了[13]了的主要结果。

定理 3 $S,T:\Omega\times X\to CB(X)$，对每一$x\in X$，$S(\cdot,x)T(\cdot,x)$可测，对每一$\omega\in\Omega$，$S(\omega,\cdot)$，$T(\omega,\cdot)$连续。如果对每一固定的$\omega\in\Omega$和对一切$x,y\in X$成立

$$\begin{aligned}H(S(\omega,x),T(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y),\ D(S(\omega,x),x),\ D(T(\omega,y),y),\\D(T(\omega,y),x),\ D(S(\omega,x),y))\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中Φ满足条件(Φ_1)和

(Φ_3) 如下定义的可测函数序列$t_k(\omega):\Omega\to[0,\infty)$：

$$t_0(\omega)=0,\ t_1(\omega)=t(\omega),\ t_{k+1}(\omega)=t_k(\omega)+\varphi(\omega,t_k(\omega)-t_{k-1}(\omega))(k=1,2,\cdots),$$

满足$\{t_k(\omega)\}$逐点收敛于某可测函数$t^*:\Omega\to[0,\infty)$，其中$t:\Omega\to[0,\infty)$是某给定的可测函数且

$$\varphi(\omega,t)=\max\{\Phi(\omega,t,t,t,0,2t),\ \Phi(\omega,t,t,t,2t,0)\}$$

则S和T分别的随机不动点集合重合且非空，即存在可测映射$u:\Omega\to X$满足对一切$\omega\in\Omega$有

$$u(\omega)\in S(\omega,u(\omega)),\ u(\omega)\in T(\omega,\ u(\omega))$$

证明 由(Φ_3)对给定的$t:\Omega\to X$有

$$t_{n+1}(\omega)-t_n(\omega)=\varphi(\omega,t_n(\omega)-t_{n-1}(\omega))=\varphi^2(\omega,t_{n-1}(\omega)-t_{n-2}(\omega))$$

$$=\cdots=\varphi^n(\omega,t(\omega)),\quad \forall\omega\in\Omega$$

从而有

$$t_{k+1}(\omega)=\sum_{n=0}^{k}(t_{n+1}(\omega)-t_n(\omega))=\sum_{n=0}^{k}\varphi^n(\omega,t(\omega))\quad \forall\omega\in\Omega$$

因为 $t_k(\omega)\to t^*(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$, 故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\omega,t(\omega))<\infty,\qquad \forall\omega\in\Omega \tag{2.9}$$

因为(2.8), (2.9)两式对一切 $\omega\in\Omega$ 成立, 当取 $t(\omega)$ 为定理 1 证明中的 $\alpha(\omega)$时, 由定理1的证明, 可证得存在可测映射 $u:\Omega\to X$, 使得对一切 $\omega\in\Omega$ 有

$$n(\omega)\in S(\omega,u(\omega)),\quad u(\omega)\in T(\omega,u(\omega))$$

仿证明 1 最后的证明可证得 S 和 T 分别的随机不动点集重合. 定理证毕.

注 2 定理 3 也可推广到多值映射族. 显然定理 3 是[12]中定理 1, 2 的本质改进和推广.

参 考 文 献

[1] Achari, J., *Rev. Romanla Math, Pures et Appl.*, **24**, (1979), 179—182.

[2] Ray, B. K., *Nanta Math.*, **8**, (1975), 9—20.

[3] Rus, I. A., *Math. Paponica*, **20**, (1975), Special Issue, 21—24.

[4] Kasahara, S., *Math. Semi. Notes*, **4**, (1976), 181—193.

[5] Czerwik, S., *Aequations Math.*, **16**, (1977), 297—302.

[6] Kita, T., *Math. Japonica*. **22**, (1977), 113—116.

[7] Bose, R. K and R. K. N., Mukherjee, *Tamking J. Math.*, **13**, (1977), 245—248.

[8] Chen M. P. and M. H. Shih, *J. Math. Anal. Appl.*, **71**, (1979), 516—524.

[9] 倪录群、姚景齐、赵汉章, 数学年刊, 1(1980), 63—74.

[10] Nadler, S. B., *Pacific J. Math.*, **30**, (1969), 475—488.

[11] Itoh, S., *Pacific J. Math.*, **68**, (1977), 85—90.

[12] 张石生, 自然杂志, **4**, (1981), 476—477.

[13] 张石生, 四川大学学报, **4**, (1980), 61—68.

[14] 王梓坤, 数学进展, **5**, (1962), 45—71.

[15] Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Academic press, New York, (1972).

[16] Bharucha-Reid, A. T., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**, (1976), 641—657.

[17] Hanš, O., *Czechoslovak Math. J.*, **7**, (1957), 154—158.

[18] Špaček, A., *Czechoslovak Math. J.*, **5**, (1955), 462—466.

[19] Himmelberg, C. J., *Fund. Math.*, **87**, (1975), 53—72.

[20] Assad, N. A. and Kirk, W. A., *Pacific J. Math.*, **43**, (1972), 553—562.

[21] 丁协平, 四川师院学报, 数学专辑, (1981), 10—14.

[22] Kuratowski, K. and C. Ryll-Nardzewski, *Bull. Acad. Polon. sci. ser. sci. Math. Astr. Phys.*, **13**, (1965), 397—403.

[23] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, (1977), 580.

Random Common Fixed Point Theorems of Set-Valued Mappings

Ding Xie-ping

(Sichuan Normal College, Chengdu)

Abstract

In this paper, we prove several random common fixed point theorems to general set-valued contractive mappings. These theorems improve and generalize the corresponding results in [1～18].