

# 具功能性反应的食饵-捕食者两种 群模型的定性分析\*

陈均平 张洪德

(重庆大学应用数学系) (南充师范学院数学系)

(杨绪灿推荐, 1984年8月10日收到)

## 摘 要

本文对具 Holling III 型功能性反应的食饵-捕食者两种群微分方程模型进行定性分析, 得到了非平凡平衡点全局稳定性的条件, 正平衡点周围存在唯一极限环的条件; 同时, 对这些条件的生态意义加以讨论. 作者们相信这些条件在文献中还是新的.

## 一、引 言

考虑食饵-捕食者两种群微分方程模型, 食饵具有线性密度制约, 捕食者具有 Holling III 型功能性反应, 它的模型为<sup>[1][3]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax - bx^2 - \frac{ax^2y}{x^2 + \beta^2} \equiv xf_1(x, y) \\ \dot{y} &= -cy + \frac{kax^2y}{x^2 + \beta^2} \equiv yf_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中  $(\dot{\phantom{x}}) = d(\phantom{x})/dt$ ;  $x, y$  分别表示食饵与捕食者的生物量;  $a, b, c, \alpha, k$  及  $\beta$  都是正常数, 分别具有一定的生态意义, 例如  $a$  表示食饵的内禀增长率,  $c$  表示捕食者的死亡率. 此外, 注意到模型(1.1)要有可行的平衡点, 必须  $k\alpha - c > 0$ .

生态学模型(1.1)是重要的. Hassel 等指出过, 脊椎动物捕食者通常都具有 Holling III 型功能性反应. 文[1]是在参数小范围变化的限制下, 利用 Hopf 分支理论来讨论具功能性反应时, 食饵-捕食者两种群模型存在周期解等问题的条件. 文[2]对具 Holling III 型功能性反应模型进行定性分析, 得到了正平衡点周围不存在闭轨的条件以及存在唯一极限环的条件, 但是没有讨论 III 类功能性反应. 文[2]的作者之一陈兰荪估计 III 型功能性反应可能有与 II 型功能性反应类似的定理, 并指出这个问题至今没有很好研究. 本文的结果证实了上述估计是正确的.

模型(1.1)是两种群相互作用的 Kolmogorov 一般模型

$$\dot{x} = xF_1(x, y), \quad \dot{y} = yF_2(x, y) \quad (1.2)$$

的特殊情况. 文[3]得到过(1.2)正平衡点全局稳定的充分条件, 这些条件是文[4]对 Lotka-Volterra 模型

\* 本文在1985年6月在中国福州召开的“国际常微分方程学术讨论会 (FCDE)”上宣读.

$$\dot{N}_i = N_i \left[ b_i + \sum_{j=1}^2 a_{ij} N_j \right] \quad (i=1, 2) \quad (1.3)$$

全局稳定充分条件的十分自然的推广。可惜的是模型(1.1)不满足[3]、[4]的基本条件:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} < 0.$$

因为对模型(1.1)来说,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} = -b - \alpha \frac{(\beta^2 - x^2)y}{(x^2 + \beta^2)^2},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} \equiv \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

当  $x \geq 0, y \geq 0$  时并不是定负的, 故不能直接引用[3]的结果来讨论模型(1.1), 而必须重新进行定性分析。此即本文的工作。

## 二、平衡点的分析

对模型(1.1)施行如下的变量代换

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} \beta x', \quad y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{c(k\alpha - c)} y' \\ dt &= \frac{cx'^2 + k\alpha - c}{c(k\alpha - c)} dt' \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

变换后, 仍将新变量  $x', y', t'$  记为  $x, y, t$ 。于是得到系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) - x^3y \equiv x\phi_1(x, y) \\ \dot{y} &= -y + x^2y \equiv y\phi_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a}{c} > 0, & A_1 &= -\frac{b\beta}{c} \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} < 0, \\ A_2 &= \frac{a}{k\alpha - c} > 0, & A_3 &= -\frac{b\beta}{k\alpha - c} \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} < 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

系统(2.1)在区域  $x \geq 0, y \geq 0$  内最多有三个平衡点, 即  $O(0, 0)$ 、 $S(1, y^*)$ 、 $R(x_+, 0)$ , 其中

$$y^* = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{k\alpha}{c(k\alpha - c)} \left( a - b\beta \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} \right) \quad (2.3)$$

$$x_+ = -\frac{A_2}{A_3} = \frac{a}{b\beta} \sqrt{\frac{k\alpha - c}{c}} \quad (2.4)$$

容易验证,  $x_+$  是实系数方程

$$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad (2.5)$$

的唯一正实根(2.5)的其余两个根为共轭虚根  $\pm \sqrt{\frac{k\alpha - c}{c}} i$ 。正实根  $x_+$  的大小直接影响到系

统(2.1)在区域  $x \geq 0, y \geq 0$  内平衡点的个数以及平衡点  $S(1, y^*)$  的性质. 兹分述如下:

1. 当  $x_+ < 1$  (即  $A_2 + A_3 < 0$ ) 时, 由(2.3)知  $y^* < 0$ , 故系统(2.1)在区域  $x \geq 0, y \geq 0$  内只有两个平衡点, 即鞍点  $O(0, 0)$ , 稳定结点  $R(x_+, 0)$  (当  $x_+ = 1$  (即  $A_2 + A_3 = 0$ ) 时, 系统(2.1)的一次近似在  $R(x_+, 0)$  处属临界情形). 定理1将证明  $R$  是全局稳定的.

2. 当  $x_+ > 1$  (即  $A_2 + A_3 > 0$ ) 时, 由(2.3)知  $y^* > 0$ , 故系统(2.1)在区域  $x \geq 0, y \geq 0$  内有三个平衡点, 即两个鞍点  $O(0, 0), R(x_+, 0)$  以及正平衡点  $S(1, y^*)$ . 而  $S$  的性质又分为两种情况:

(1) 当  $A_2 + A_3 > 0, 2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$  时,  $S(1, y^*)$  为稳定的焦点或结点 (当  $2A_3 + A_2 - A_0 = 0$  时, 系统(2.1)在  $S(1, y^*)$  处的一次近似为中心), 定理2, 3将证明在区域  $x > 0, y > 0, S(1, y^*)$  是全局稳定的.

(2) 当  $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$  (此时必然有  $A_2 + A_3 > 0$ ) 时,  $S(1, y^*)$  为不稳定的焦点或结点. 定理4, 5将证明在  $S$  的周围存在唯一的极限环.

### 三、非平凡平衡点的全局稳定性

为叙述简明起见, 记

$$Q \triangleq \{x \geq 0, y \geq 0\}, \quad Q^\circ \triangleq \{x > 0, y > 0\},$$

在第一象限内, 由系统(2.1)中  $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)$  的符号最多把  $Q^\circ$  划分为如下四个区域:

$$I \triangleq \{(x, y) : \phi_1 < 0, \phi_2 < 0\}, \quad II \triangleq \{(x, y) : \phi_1 > 0, \phi_2 < 0\},$$

$$III \triangleq \{(x, y) : \phi_1 < 0, \phi_2 > 0\}, \quad IV \triangleq \{(x, y) : \phi_1 > 0, \phi_2 > 0\}.$$

**定理1** 当  $A_2 + A_3 \leq 0$  时, 系统(2.1)的所有起始点  $(x_0, y_0)$  在  $Q^\circ$  内的轨道  $(x(t), y(t))$  当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于  $R(x_+, 0)$ , 因而非平凡平衡点  $R$  在  $Q^\circ$  内是全局稳定的.

**证明** 当  $A_2 + A_3 \leq 0$  时, 在  $Q$  内除平衡点  $R(x_+, 0)$  及  $O(0, 0)$  外, (2.1) 无其它非平凡

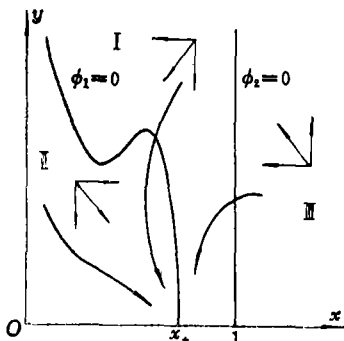


图 1

平衡点, 在区域 I、II、III 中轨线的斜率如图1所示, 如果起始点  $(x_0, y_0)$  在区域 I、II 上, 则轨线  $(x(t), y(t))$  或者与  $\phi_1(x, y) = 0$  相交, 或者趋于平衡点  $R$ . 由于  $\phi_1(x, y) = 0$  上没有其他平衡点, 再由轨线的斜率可以知道, 与  $\phi_1(x, y)$  相交的轨线最终当  $t \rightarrow \infty$  时仍趋于  $R$ .

从区域 III 中出发的轨线, 它必与  $\phi_2(x, y) = 0$  即  $x = 1$  相交. 若不然, 假设轨线  $(x(t), y(t)), (x_0, y_0)$  均属于 III, 对所有的  $t > 0$ , 均不与  $x = 1$  相交, 则得到  $\dot{y} = y(x^2 - 1) > 0$ , 且  $y(t) > y_0$ , 对  $t \in [0, +\infty)$ . 因此,

$$\max\{\phi_1(x, y) : y(t) > y_0 \text{ 和 } x \geq 1\}$$

是负的, 即存在一正数  $k_1$ , 使得

$$\phi_1(x, y) < -k_1 \quad (\text{对所有的 } t \geq 0) \quad (3.1)$$

又因为沿轨线  $(x(t), y(t))$

$$d\phi_2/dt = 2xdx/dt = 2x^2\phi_1(x, y) < 0$$

故

$$\phi_2(x, y) = x^2 - 1 < k_2 \quad (\text{对所有的 } t \geq 0) \quad (3.2)$$

其中

$$k_2 = \phi_2(x_0, y_0) = x_0^2 - 1 > 0$$

今考虑函数  $v(x, y) = x^m y$ , 这里  $m = k_2/k_1 > 0$ , 沿着(2.1)从区域 II 内出发的轨线  $(x(t), y(t))$ , 有

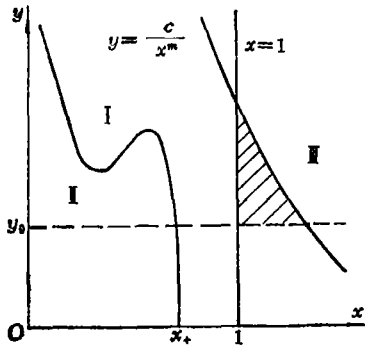


图 2

$$\frac{dv}{dt} = mx^{m-1}y \frac{dx}{dt} + x^m \frac{dy}{dt} = x^m y [m\phi_1 + \phi_2] \leq 0$$

故  $x^m y \leq c = x_0^m y_0$  (对所有的  $t \geq 0$ ), 即

$$y(t) \leq c/x^m(t) \quad (\text{对所有的 } t \geq 0)$$

因此轨线  $(x(t), y(t))$  当  $t > 0$  时保留在图 2 的阴影区域内, 其边界由直线  $x=1$ ,  $y=y_0$  和曲线  $y=c/x^m$  组成. 由 Poincaré-Bendixson 定理<sup>[5]</sup>, 在此区域内必含有奇点. 这是矛盾的. 因为当  $A_2 + A_3 \leq 0$  时,  $Q^*$  内不存在奇点. 因此, 起始于区域 II 内的轨线必进入区域 I, 然后当  $t \rightarrow \infty$  时, 趋于  $R(x_*, 0)$ , 定理证毕.

**定理 2** 当  $A_2 + A_3 > 0$ ,  $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$  时(2.1)的正平衡点  $S(1, y^*)$  为稳定的焦点或结点, 并且在其周围不存在闭轨.

**证明** 作 Dulac 函数  $B(x, y) = x^{-2}y^{r-1}$ , 其中  $r$  待定, 关于(2.1)有

$$\begin{aligned} D &\triangleq \frac{\partial(x\phi_1 B)}{\partial x} + \frac{\partial(y\phi_2 B)}{\partial y} \\ &= x^{-2}y^{r-1} [2A_3 x^3 + (A_2 + r)x^2 - (A_0 + r)] \\ &\triangleq x^{-2}y^{r-1} \phi(x, r) \end{aligned}$$

我们证明可以取适当的  $r$ , 使得  $\phi(x, r)$  对  $x \geq 0$  为常负, 且不在  $Q^*$  的任何子区域内恒等于零. 为此, 只需证明可取  $r$  使得  $\phi(x, r) = 0$  关于  $x$  无正实根.

对条件  $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$  分两种情况讨论:

(1)  $A_2 - A_0 \leq 0$ , 因  $A_3 < 0$ , 此时  $2A_3 + A_2 - A_0 < 0$  自然成立. 只需取  $r = -A_2$ , 便有

$$\phi(x, r) |_{r=-A_2} = 2A_3 x^3 - (A_0 - A_2) < 0 \quad (\text{对 } x > 0).$$

(2)  $A_2 + 2A_3 \leq A_0 < A_2$ , 由此可得  $2A_3 \leq A_0 - A_2 < 0$ , 注意到,

$$\phi'_x(x, r) = 2x(3A_3 x + A_2 + r)$$

$$\phi''_{xx}(x, r) = 12A_3 x + 2(A_2 + r)$$

可以选取适当的  $r$ , 使得  $-\frac{r+A_2}{3A_3} > 0$ , 并使  $\phi(x, r)$  在  $x=0$  处有极小值  $-(r+A_0)$ , 在  $x =$

$-\frac{r+A_2}{3A_3}$  处取得极大值 0, 即

$$\begin{aligned} \max_{\substack{0 < x < +\infty \\ r+A_2 > 0}} \phi(x, r) &= \phi(x, r) \Big|_{x = -\frac{r+A_2}{3A_3}} \\ &= -\frac{(r+A_2)^3}{27A_3^2} - (r+A_2) + A_2 - A_0 = 0 \end{aligned}$$

为此, 只要选取  $r+A_2$  为满足三次代数方程

$$g(r+A_2) \triangleq (r+A_2)^3 + p(r+A_2) + q = 0 \quad (3.3)$$

的正实根, 其中

$$p = -27A_3^2 < 0, \quad q = 27A_3^2(A_2 - A_0) > 0.$$

(3.3) 的判别式  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27^2}{4} A_3^2 [(A_2 - A_0)^2 - 4A_3^2]$ , 故当  $2A_3 + A_2 - A_0 = 0$  时,  $\Delta = 0$ . 此时(3.3)有一个负实根及两个相等的正实根. 当  $2A_3 + A_2 - A_0 < 0$  时, (3.3)有三个相异实根. 由笛卡儿的变号定理, (3.3)所有正实根的个数不超过  $g(r+A_2) = 0$  的系数的变号数 2, 负实根的个数不超过  $g(-r-A_2) = 0$  的系数的变号数 1, 所以(3.3)必有两个正实根, 一个负实根. 总之, 在  $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$  的条件下, 因  $\Delta \leq 0$ , (3.3)总存在正实根, 任取一个正实根, 记为  $(r+A_2)_+$ , 求得相应的  $r$ , 并把它记为  $r^*$ (图3), 因

$$\phi''_{xx}(0, r^*) = 2(A_2 + r^*) > 0$$

$$\phi''_{xx}(x, r^*) \Big|_{x = -\frac{r^* + A_2}{3A_3}} = -2(A_2 + r^*) < 0$$

故  $\phi(x, r^*)$  在  $x=0$  处取得极小值  $-(r^* + A_0)$ , 在  $-\frac{r^* + A_2}{3A_3}$  处取得极大值. 这说明在定理的条件下总有  $D \leq 0$ . 由 Dulac 定理<sup>[5]</sup>知, 在  $R$  的周围不存在闭轨. 此外, 我们已分析过  $S$  当  $2A_3 + A_2 - A_0 < 0$  是稳定的焦点或结点. 当  $2A_3 + A_2 - A_0 = 0$  时, 虽然(2.1)的一次近似在  $S$  为中心, 但因(2.1)在  $S$  的周围不存在闭轨, 于是  $S(1, y^*)$  为稳定的焦点. 定理证毕.

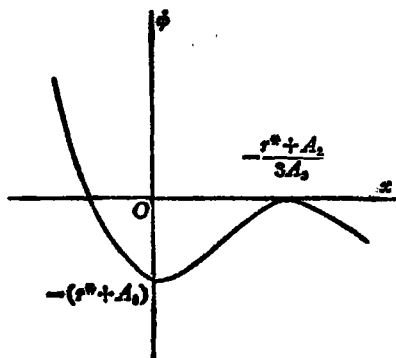


图 3

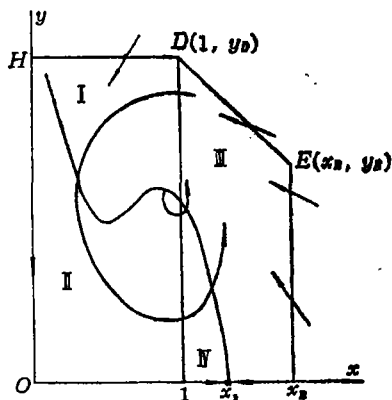


图 4

**定理3** 当  $A_2 + A_3 > 0$ ,  $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$  时, (2.1)从  $Q^*$  出发的一切解有界.

**证明** 考虑(2.1)的从  $Q^*$  出发的任一解, 我们总可以构造一个包含初始点  $(x_0, y_0)$  于其内的区域  $\widehat{OBEDHO}$  (如图4)所示, 其中  $BE$  为直线  $x=x_B$  的一段, 而  $x_B$  满足

$$x_B \geq \max\{x_+, x_0\}$$

$HD$  为直线  $y=y_D$  ( $0 \leq x < 1$ ) 的一段,  $DE$  为直线

$$y = y_D - (x - x_B)$$

的一段,  $y_D$  选得适当大,  $D$  为直线  $ED$  与  $x=1$  的交点.

由于  $OB$ 、 $HO$  都是积分直线, 分别走向平衡点  $O$ ,  $R$ , 故不离开此区域, 在直线  $BE$  上, 记  $v_1 = x - x_B = 0$ , 则沿(2.1)的轨线有

$$\dot{v}_1 \Big|_{v_1=0} = \frac{dx}{dt} = x\phi_1(x, y) \leq 0$$

在线段  $HD$  上, 记  $v_2 = y - y_D = 0$ , 则沿 (2.1) 的轨线有

$$\dot{v}_2|_{v_2=0} = y(x^2 - 1) \leq 0$$

在线段  $DE$  上, 取  $v_3 = y - y_E + x - x_E = 0$ , 则沿 (2.1) 的轨线有

$$\begin{aligned} \dot{v}_3|_{v_3=0} &= \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{v_3=0} \\ &= -(y_E + x_E) + x(A_0 + 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) \leq 0 \end{aligned}$$

只要选取  $y_E > \max\{ \max_{1 \leq x \leq x_E} x(A_0 + 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3), y_0 \}$

因此, 在  $BE$ 、 $DE$ 、 $HD$  上, 积分曲线穿过方向如图 4 所示, 而在此区域之外不存在平衡点, 故从  $Q^*$  出发的一切解有界. 定理证毕.

综合定理 2、3, 可得结论: 在  $A_2 + A_3 > 0$ ,  $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$  的条件下, 正平衡点  $S(1, y^*)$  在  $Q^*$  内是全局稳定的.

#### 四、正平衡点周围存在的唯一的极限环

**定理 4** 当  $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$  时, 系统 (2.1) 的正平衡点  $S(1, y^*)$  为不稳定的, 并且在周围至少存在一个极限环.

**证明** 在第二节, 我们已经分析过, 当  $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$  时, 系统 (2.1) 有两个鞍点  $O(0, 0)$ ,  $R(x_+, 0)$  及正平衡点  $S(1, y^*)$ , 且  $S$  是不稳定的焦点或结点. 因此, 我们可以构造一个环域  $G$ , (2.1) 所有与  $G$  的边界相交的轨线都在  $t$  增加时从  $G$  的外部进入它的内部, 或者停留在边界上, 而在  $G$  内不含有奇点. 这个环域的外边界可用类似于定理 3 的办法构造, 其内边界构造的可能性是显然的, 因为  $S$  是不稳定的焦点或结点. 则由 Poincaré-Bendixson 环域定理知  $G$  内至少存在一个极限环. 定理证毕.

**定理 5** 当  $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$  时, 系统 (2.1) 在  $Q$  内至多有一个极限环, 如果存在, 它是稳定的.

**证明** 对系统 (2.1) 作变换

$$\bar{x} = x - 1, \quad \bar{y} = y - y^*$$

则 (2.1) 化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (-A_0 + A_2 + 2A_3)\bar{x} - \bar{y} + (-A_0 + 2A_2 + 5A_3)\bar{x}^2 \\ &\quad + (A_2 + 4A_3)\bar{x}^3 + A_3\bar{x}^4 - 2\bar{x}\bar{y} - \bar{x}^2\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} &= 2y^*\bar{x} + y^*\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{x}^2\bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

再施行如下的变换,

$$\bar{x} = \frac{u}{1-u}, \quad \bar{y} = y^*(e^v - 1)$$

则 (4.1) 化为 Liénard 方程

$$\dot{u} = -\psi(v) - F(u), \quad \dot{v} = g(u) \quad (4.2)$$

$$g(u) = \frac{u(2-u)}{(1-u)^2}$$

其中  $\psi(v) = y^*(e^v - 1)$ ,

$$F(u) = \frac{1}{(1-u)^2} [A_0u^3 + (-2A_0 + A_2 + A_3)u^2 + (A_0 - A_2 - 2A_3)u],$$

注意到

$$\bar{x} = \frac{u}{1-u}, \quad u = \frac{\bar{x}}{1+\bar{x}} = \frac{x-1}{x}.$$

故当  $x \in (0, +\infty)$  时, 有  $-\infty < u < 1$ , 因此,

$$ug(u) = \frac{u^2(2-u)}{(1-u)^2} > 0, \quad \text{当 } u \neq 0 \text{ 时,}$$

$$G(u) = \int_0^u g(u) du = \int_0^u \frac{2u-u^2}{(1-u)^2} du = \frac{u^2}{1-u}$$

$$G(-\infty) = +\infty, \quad G(1^0) = +\infty.$$

注意到  $\bar{y} = y^*(e^v - 1)$ ,  $v = \ln\left(\frac{\bar{y}}{y^*} + 1\right) = \ln \frac{y}{y^*}$  故当  $y \in (0, +\infty)$  时, 有  $-\infty < v < +\infty$ .

$\psi(v) = y^*(e^v - 1)$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(v)$  是  $v$  的增函数, 当  $v \rightarrow +\infty$  时,  $\psi(v) \rightarrow +\infty$ , 当  $v \rightarrow -\infty$  时,  $\psi(v) \rightarrow -y^*$ .

$$f(u) \triangleq F'(u) = \frac{1}{(1-u)^3} [-A_0 u^3 + 3A_0 u^2 + (-3A_0 + A_2)u + A_0 - A_2 - 2A_3],$$

显然, 当  $u \in (-\infty, 1)$  时,  $f(u)$  是  $u$  的连续函数, 又,  $F(0) = 0$ . 当  $u \in (-\infty, 1)$  时,  $f(u)/g(u)$  是单调增加的. 事实上, 在条件  $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$ ,  $u \in (-\infty, 1)$  之下,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{f(u)}{g(u)} \right) &= \frac{d}{du} \frac{-A_0 u^3 + 3A_0 u^2 + (-3A_0 + A_2)u + A_0 - A_2 - 2A_3}{u(1-u)(2-u)} \\ &= \frac{2(A_2 - A_0 + 2A_3)(1-u)^3 + 2A_3 u^2(2u-3)}{(u^3 - 3u^2 + 2u)^2} > 0 \end{aligned}$$

从而, 由张芷芬定理<sup>[6]</sup>知, 在区域  $Q^\circ$  内系统 (2.1) 最多有一个极限环, 如果存在, 它是稳定的. 定理证毕.

综合定理 4、5 知, 当  $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$  时, 系统 (2.1) 在区域  $Q^\circ$  内存在唯一稳定的极限环.

## 五、生态结论

现在, 回到模型 (1.1), 我们从生态的角度来解释定理的条件和结论. 在第二节中, 我们对模型 (1.1) 施行过变换. 对模型 (1.1) 来讲, 可能有以下三个平衡点: 两个鞍点  $O(0, 0)$ 、 $R(a/b, 0)$  及正平衡点  $S(x^0, y^0)$ , 其中

$$x^0 = \beta \sqrt{\frac{c}{ka-c}}, \quad y^0 = \left( a - b\beta \sqrt{\frac{c}{ka-c}} \right) \sqrt{\frac{k\beta}{c(ka-c)}}$$

根据我们的定理有以下结论:

1. 由定理 1, 当  $a < b\beta \sqrt{c/(ka-c)}$  时, 没有正平衡点, 只有非平凡平衡点  $R(a/b, 0)$ , 它是全局稳定的. 这表明, 食饵的内禀增长率  $a$  不够大时, 食物供给不充分, 捕食者最终灭绝. 食饵受到密度制约, 稳定在水平  $a/b$  上.

2. 由定理 2、3, 当  $c < ka/2$ ,  $a > b\beta \sqrt{c/(ka-c)}$  时, 正平衡点  $S(x^0, y^0)$  是全局稳定的. 这表明, 捕食者的死亡率  $c$  小, 捕食者多, 但食饵的内禀增长率  $a$  足够大, 因而食饵供应充分, 所以食饵、捕食者能分别稳定在水平  $x^0, y^0$  上.

3. 由定理 2、3, 当  $\frac{ka}{2} < c < ka$ ,  $b\beta \sqrt{\frac{c}{ka-c}} < a < b\beta \frac{2c}{2c-ka} \sqrt{\frac{c}{ka-c}}$  时, 正平衡

点 $S(x^0, y^0)$ 仍然是全局稳定的。这表明, 捕食者的死亡率 $c$ 在一定范围之内, 食饵的内禀增长率也在一个恰当的范围之内, 食饵、捕食者都能稳定在一个适当的水平 $x^0, y^0$ 。

4. 由定理4、5, 当 $\frac{k\alpha}{2} < c < k\alpha, a > b\beta \frac{2c}{2c-k\alpha} \sqrt{\frac{c}{k\alpha-c}}$ 时, 正平衡点周围存在稳定的极限环。这表明, 食饵的内禀增长率 $a$ 大, 食饵相当充分, 使捕食者得到发展; 而捕食者的死亡率 $c$ 在一定范围内, 捕食者过多, 必然抑制食饵的发展; 食饵的发展受到抑制, 食物供应不充分, 会使捕食者的生物量下降; 捕食者下降, 食饵又可得到大大的发展; 如此发生周期振荡。我们顺带指出 Kazarinoff 及 Driessche 的文章<sup>[1]</sup>是从 Hopf 分支理论出发, 在参数小范围变化的条件下得到过类似的结果。不过, 本文的结果要简明得多, 而且不受参数小范围变化的限制, 显然推广了[1]的结果。

最后, 作者们感谢中国科学院数学研究所陈兰荪付研究员的指导。南京大学叶彦谦教授对本文提供了宝贵意见, 在此致以深切的谢意。

### 参 考 文 献

- [1] Kazarinoff, N. D. and P. Van Den Driessche, A Model predator-prey system with Functional response, *Mathematical Biosciences* 125—134. (1978).
- [2] 陈兰荪、井竹君, 捕食者-食饵相互作用中微分方程的极限环存在性和唯一性, *科学通报*, 29, 9 (1984) 521—523.
- [3] Alan Hastings, Global stability of two species systems, *J. Math. Biology*, 5, (1978) 399—403.
- [4] Goh, B. S., Nedlands, Global stability in two species Interactions, *J. Math. Biology*, 3, (1976), 313—318
- [5] 叶彦谦等, 《极限环论》, 上海科学出版社(1984).

## The Qualitative Analysis of Two Species Predator-Prey Model with Holling's Type III Functional Response

Chen Jun-ping

(Chongqing University, Chongqing)

Zhang Hong-de

(Nanchung Teachers College, Nanchung)

### Abstract

This paper is devoted to the qualitative analysis of two species predator-prey model with Holling's type III functional response. Conditions for the global stability of nontrivial equilibrium points and conditions for the existence and uniqueness of limit cycles around the positive equilibrium point are obtained. The biological interpretations of these conditions are discussed. The authors believe that conditions established in this paper are new to literature.