

柔摆振动的平衡态*

汪 懋 骅

(北京航空学院, 1984年11月1日收到)

摘 要

本文给出了受激励的柔摆发生非线性振动的平衡态的解析解答。

1. 引言

具有振动基础运动的摆成为许多研究者的课题。最近 Schmidt^[1] 考虑了受小振幅, 高频谐和激励的柔摆, 但其解答是近似的。本文放弃了对谐和激励和高频的限制, 并给出了解析解答。

2. 运动方程

如图 1 所示。在摆基 P 点受到沿 α 方向的谐和激励 $y = A \cos vt$ 。其运动方程是:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k_2(r - r_0) + c_2\dot{r} - mA\dot{v}^2 \cos(\theta - \alpha) \cos vt \\ - mg \cos \theta + mA\ddot{\alpha} \sin(\theta - \alpha) \cos vt \\ - 2mAv\dot{\alpha} \sin(\theta - \alpha) \sin vt \\ - mA\dot{\alpha}^2 \cos(\theta - \alpha) \cos vt = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

和

$$\begin{aligned} (I + mr^2)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \sin \theta + c_1\dot{\theta} \\ + mA\dot{v}^2 r \sin(\theta - \alpha) \cos vt + k_1\theta \\ - 2mAvr\dot{\alpha} \cos(\theta - \alpha) \sin vt + mAr\ddot{\alpha} \cos(\theta - \alpha) \cos vt \\ + mAr\dot{\alpha}^2 \sin(\theta - \alpha) \cos vt = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 m 是质量; I 是质量关于中心的惯性矩; r 是摆在 θ 角位置时质量中心到摆基的距离; r_0 是静平衡时的 r 值; g 是重力常数; A 是激励的振幅; v 是激励的频率; k_2 是弹簧系数; k_1 是摆基的弹性系数; c_2 是径向阻尼系数; c_1 是周向阻尼系数; t 是时间; 圆点表示对时间求导。

3. 解答

当柔摆处于周向平衡态时, 即柔摆仅沿 $\theta = \theta_0$ 方向作径向振动时, 在初始条件

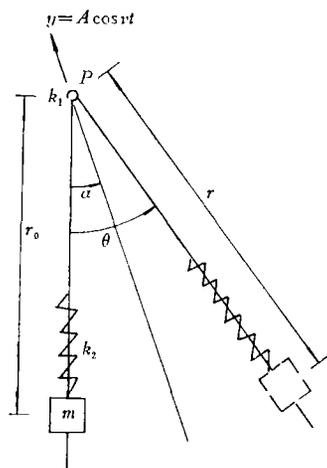


图 1

* 钱伟长推荐。

$$r(t=0)=r_0, \quad \dot{r}(t=0)=\dot{r}_0 \quad (3)$$

下, 其解答是

$$r=D_2 \exp[-(c_2/2m)t] \cos(\omega_2 t - \alpha_{2h}) + (B_2/E_2) \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (4)$$

其中, ω_2, B_2 为常数

$$\omega_2 h = \sqrt{k_2/m - c_2^2/4m^2} \quad (5)$$

$$E_2 = \sqrt{(k_2 - m\omega_2^2)^2 + c_2^2 \omega_2^2} \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \arctg(c_2 \omega_2 / (k_2 - m\omega_2^2)) \quad (7)$$

$$D_2 = \sqrt{\left(r_0 - \frac{B_2}{E_2} \cos \varphi_2\right)^2 + \left[\frac{\dot{r}_0}{\omega_2 h} - \frac{B_2 \omega_2}{E_2 \omega_2 h} \sin \varphi_2 + \frac{c_2}{2m\omega_2 h} \left(r_0 - \frac{B_2}{E_2} \cos \varphi_2\right)\right]^2} \quad (8)$$

$$\alpha_{2h} = \arctg \left\{ \frac{\left[\frac{\dot{r}_0}{\omega_2 h} - \frac{B_2 \omega_2}{E_2 \omega_2 h} \sin \varphi_2 + \frac{c_2}{2m\omega_2 h} \left(r_0 - \frac{B_2}{E_2} \cos \varphi_2\right)\right]}{\left(r_0 - \frac{B_2}{E_2} \cos \varphi_2\right)} \right\} \quad (9)$$

当激励 $y = A \cos vt$ 固定在 $\alpha = \alpha_0$ 方向时, 有

$$B_2 = [mg \cos \theta_0 + k_2 r_0 + mA v^2 \cos(\theta_0 - \alpha_0) \cos vt] / \cos \omega_2 t \quad (10)$$

$$\frac{\cos \omega_2 t}{\cos(\omega_2 t - \varphi_2)} = \frac{m}{E_2 k_1 \theta_0} [mg \cos \theta_0 + k_2 r_0 + mA v^2 \cos(\theta_0 - \alpha_0) \cos vt] \cdot [-g \sin \theta_0 - A v^2 \sin(\theta_0 - \alpha_0) \cos vt] \quad (11)$$

其中 $t \geq t_0$ 而 t_0 是一个大数。

4. 结论

当激励 $y = A \cos vt$ 固定在 $\alpha = \alpha_0$ 方向, 柔摆在 $\theta = \theta_0$ 方向作径向振动时, 柔摆平衡态位置为

$$(1) \quad k_1 = 0; \theta_0 = \arccos(-k_2 r_0 / mg); \alpha_0 = \theta_0 + \pi/2 \text{ 或 } \alpha_0 = \theta_0 + 3\pi/2 \quad (12)$$

$$(2) \quad k_1 = 0; \theta_0 = 0 \text{ 或 } \theta_0 = \pi; \alpha_0 = \theta_0 \text{ 或 } \alpha_0 = \theta_0 + \pi \quad (13)$$

$$(3) \quad \theta_0 = 0; \alpha_0 = 0 \text{ 或 } \alpha_0 = \pi \quad (14)$$

$$(4) \quad c_2 = 0; \theta_0 = 0; \alpha_0 = \theta_0 \text{ 或 } \alpha_0 = \theta_0 + \pi \quad (15)$$

$$(5) \quad c_2 = 0; \theta_0 = 0; \alpha_0 = \theta_0 + \pi/2 \text{ 或 } \alpha_0 = \theta_0 + 3\pi/2 \quad (16)$$

文献 [1] 在对激励 $y = A \cos vt$ 加以限制, 即 A 是小量, v 为大量情况下, 仅求出平衡态的近似位置。本文放弃了限制并给出了平衡态的解析解答。

参 考 文 献

- [1] Schmidt, B. A. The radially flexible pendulum subjected to a high-frequency excitation, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 50 (1983), 443-448.

The Equilibrium State of a Flexible Pendulum

Wang Mao-hua

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

In this paper the analytical solutions of the equilibrium states of a flexible pendulum with oscillating base motions are given.