应用数学和力学，第6卷第11期（1985年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

应用功的互等定理计算矩形弹性薄板的自然频率*

付 宝 连

（东北重型机械学院，1984年5月5日收到）

摘 要

在文[1]的基础上，本文进一步推广功的互等定理的应用于计算矩形弹性薄板的自然频率。应用本法无需求解控制微分方程，只需在基本系统与实际系统之间应用功的互等定理后求解一简单的积分方程即可。

使用了广义简支边的概念并且引入了频率矩阵，从而一并得到了两对边简支、另两对边为各种支持的矩形板的所有频率方程。

这是计算矩形板自然频率的一个简便通用的方法。

一、引 言

功的互等定理是一个经典性原理，它指出[2]，在两个相同的线性弹性体之间，如果它们的应力和应变状态是真实的，不管它们的边界条件是否相同均有功的互等定理存在。

然而，据作者本人所知，在文[3]以前，功的互等定理还没有被应用于具有明显不同边界条件的两个物体并用此来系统地解决某一类问题。文[3]首先在具有明显不同边界条件的两个矩形板之间应用功的互等定理并求解了具有复杂边界条件矩形板的挠曲面方程，文[3]为求解矩形板的弯曲提出了一个系统的方法。文[4]指出，在一定的条件下，功的互等定理与位移叠加原理等价，从而说明了为什么应用功的互等定理求解矩形板的挠曲面方程所得到的解与应用基于解析法为基础的位移叠加原理所得到的解是相同的。功的互等定理这一新被发现的功能为解决复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程提供了一个行之有效的方法[4,5]。

文[1]推广[3,4]的概念于计算直梁的自然频率，而本文则应用文[1]的方法于计算矩形板的自然频率。对于这一方法，我们无需求解控制微分方程，只需在基本系统与实际系统之间应用功的互等定理后求解一简单的积分方程即可。

应用广义简支边并且引入了频率矩阵，进而一并得到了具有两对边简支另两对边为各种支持的矩形板的所有频率方程。

二、基 本 原 理

据Kirghoff假设，我们知道，对于弹性薄板，有控制微分方程[6]

* 钱伟长推荐

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}=\frac{q(x,y)}{D} \tag{2.1}$$

这里 $q(x,y)$ 是所施加的静载荷。

在平板作自由振动的情况下，将没有表面载荷 $q(x,y)$，而且根据 d'Alambert 原理，$q(x,y)$应为 $-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(x,y,t)$ 所代替，于是我们得到控制微分方程的形式为

$$\frac{\partial^4 W(x,y,t)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W(x,y,t)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W(x,y,t)}{\partial y^4}=-\frac{1}{D}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(x,y,t) \tag{2.2}$$

假设 $W(x,y,t)=w(x,y)T(t)$，并将其代入式 (2.2)，我们得到

$$\frac{D}{\rho}\left[\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}\right]\Big/w(x,y)$$

$$=-\frac{d^2T(t)}{dt^2}\Big/T(t) \tag{2.3}$$

能够确信，进行一些整理后，从方程 (2.3) 的左端我们得到

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}=\frac{1}{D}\rho\omega^2 w(x,y) \tag{2.4}$$

这里 $w(x,y)$ 是振型方程 (2.4) 的解。量 ω 是圆频率。比较 (2.1) 与 (2.4) 的右端可以看出，当将 $\rho\omega^2 w(x,y)$ 视为外载荷时，我们便可以在单位载荷基本系统与实际振型系统之间应用功的互等定理，从而将求得振型方程的解并最后求得频率方程。

三、具有两对边简支矩形板的频率矩阵

为计算矩形板的自然频率，我们将求自由振动振型方程的解。在下面，让我们应用功的互等定理去求两对边简支另两对边为各种支持的矩形板振型方程的解。

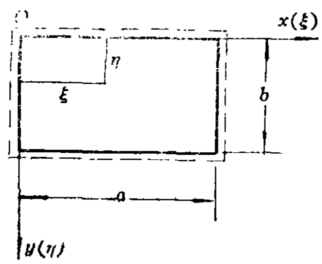

图 1

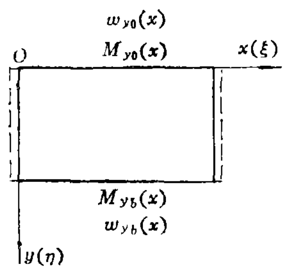

图 2

如图 1 所示，在流动坐标点 (ξ,η) 处受一单位集中载荷作用的简支矩形板被称为单位载荷基本系统或基本系统。如图 2 所示，被看作受 $\rho\omega^2 w(x,y)$ 作用的两对边简支另两对边为广义简支的矩形板被称为振型实际系统或实际系统。$w_{y0}(x)$, $M_{y0}(x)$; $w_{yb}(x)$, $M_{yb}(x)$ 分别表示沿两对广义简支边 $y=0$ 和 $y=b$ 的挠度和弯矩。

在图 1 和 2 两系统之间应用功的互等定理，我们得到

$$w(\xi,\eta)-\int_0^a V_{1y0}w_{y0}(x)dx+\int_0^a V_{1yb}w_{yb}(x)dx=\int_0^a\int_0^b \rho\omega^2 w(x,y)w_1(x,y;\ \xi,\eta)dxdy$$

$$+\int_0^a M_{y0}(x)\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=0}dx-\int_0^a M_{yb}(x)\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b}dx \tag{3.1}$$

据[4]我们有

$$w_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{D\pi^4 ab}\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.2}$$

$$V_{1y0}=\frac{4}{\pi ab}\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\left[\left(\frac{n}{b}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.3}$$

$$V_{1yb}=\frac{4}{\pi ab}\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\left[\left(\frac{n}{b}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]\cdot\cos n\pi\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{3.4}$$

并且假设

$$\left.\begin{aligned}w(\xi,\eta)&=\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\\ w(x,y)&=\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\right\} \tag{3.5a,b}$$

$$\left.\begin{aligned}w_{y0}(x)&=\sum_{m=1,2}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi x}{a}\\ w_{yb}(x)&=\sum_{m=1,2}^{\infty}b_m\sin\frac{m\pi x}{a}\\ M_{y0}(x)&=\sum_{m=1,2}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi x}{a}\\ M_{yb}(x)&=\sum_{m=1,2}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{a}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

将式(3.2)～(3.6)代入式(3.1)，我们得到诸系数

$$A_{mn}=\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{D\pi^4}}\left\{\frac{2}{\pi b}[a_m-(-1)^n b_m]\left[\left(\frac{n}{b}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]+\frac{2}{D\pi^3 b}[A_m-(-1)^n B_m]\left(\frac{n}{b}\right)\right\} \tag{3.7}$$

并且将式(3.7)代入式(3.5a)，我们得到

$$
\begin{aligned}
w(\xi,\eta)=&\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2\dfrac{m^2\pi^2}{a^2}\dfrac{b^2}{\pi^2}+\left(\dfrac{m^4\pi^4}{a^4}-\dfrac{\rho\omega^2}{D}\right)\dfrac{b^4}{\pi^4}}\\
&\cdot\left\{\frac{2b^3}{\pi}[a_m-(-1)^n b_m]\left[\left(\frac{n}{b}\right)^3+(2-\nu)\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]\right.\\
&\left.+\frac{2b^3}{D\pi^3}[A_m-(-1)^n B_m]\left(\frac{n}{b}\right)\right\}\cdot\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

注意到附录中式(A.10)～(A.13)，我们得到

$$
\begin{aligned}
w(\xi,\eta)=&-\sum_{m=1,2}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi\xi}{a}\cdot\frac{1}{4\lambda^2}\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}\right.\right.\\
&\left.-\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}\right]+\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}\right.\\
&\left.\left.-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}\right]\right\}+\sum_{m=1,2}^{\infty}b_m\sin\frac{m\pi\xi}{a}\cdot\frac{1}{4\lambda^2}\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\right.\\
&\cdot\left[\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}\right]-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}\right.\\
&\left.\left.+\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}\right]\right\}+\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{1}{D}A_m\sin\frac{m\pi\xi}{a}\cdot\frac{1}{4\lambda^2}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}\right.\\
&\left.-\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}\right]-\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{1}{D}B_m\sin\frac{m\pi\xi}{a}\\
&\cdot\frac{1}{4\lambda^2}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\left(\eta-\frac{b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

这里 $\lambda^4=\dfrac{\rho\omega^2}{D}$，$\alpha_m^2=\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2+\lambda^2$，$\beta_m^2=\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2-\lambda^2$.

现在应该说明的是，在区间$(0\leqslant\xi\leqslant a,\ 0\leqslant\eta\leqslant b)$将式(3.1)中的$w(\xi,\eta)$展成正弦三角级数时，作奇性延拓之后在$\eta=0$，$\eta=b$出现第一类间断点，因此有

$$
\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}=\begin{cases}w(\xi,\eta) & (0<\eta<b)\\ 0 & (\eta=0,b)\end{cases}
$$

但是，当我们根据附录在 $0<\eta<b$ 区间将式(3.8)转换为(3.9)时，由于双曲线函数已适用于区间 $0\leqslant\eta\leqslant b$ 且在 $\eta=0$ 和 $\eta=b$ 端点是连续可微的，故式(3.9)将必定适用于区间 $0\leqslant\eta\leqslant b$。

式(3.9)必须满足诸边界条件

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=0 \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)_{\eta=b}=0 \tag{3.11}$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial\eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\eta}\right]_{\eta=0}=0 \tag{3.12}$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial\eta^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\eta}\right]_{\eta=b}=0 \tag{3.13}$$

执行这些边界条件，我们分别得到

$$\begin{aligned}
&-a_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.\\
&\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\beta_m\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\beta_m\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}\\
&+b_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.\\
&\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\beta_m\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}\\
&+\frac{1}{D}A_m\left(\frac{\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\\
&-\frac{1}{D}B_m\left(\frac{\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\beta_m\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)=0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
&-a_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.\\
&\left.+\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\beta_m\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\operatorname{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\operatorname{sh}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$+b_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\alpha_m\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\beta_m\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\beta_m\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{D}A_m\left(\frac{\alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\alpha_m\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\beta_m\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{D}B_m\left(\frac{\alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\alpha_m\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\beta_m\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)=0 \quad (3.15)$$

$$-a_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\beta_m\left(\frac{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)+\frac{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$+b_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\beta_m\left(\frac{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{D}A_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\beta_m\left(\frac{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{D}B_m\left\{\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\beta_m\left(\frac{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}=0 \quad (3.16)$$

$$-a_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\beta_m\left(\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$+b_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^2\beta_m\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{D}A_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\beta_m\left(\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{D}B_m\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\alpha_m\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\beta_m\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\,\beta_m\frac{b}{2}}{\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}}\right)\right\}=0 \tag{3.17}$$

如果 $[i,j]$ $(i,j=1,2,3,4)$ 表示 a_m，b_m，A_m 和 B_m 的相应诸系数，那么式(3.14)～(3.17)可以被写成简单的形式

$$[1,1]a_m+[1,2]b_m+[1,3]A_m+[1,4]B_m=0 \tag{3.14$'$}$$

$$[2,1]a_m+[2,2]b_m+[2,3]A_m+[2,4]B_m=0 \tag{3.15$'$}$$

$$[3,1]a_m+[3,2]b_m+[3,3]A_m+[3,4]B_m=0 \tag{3.16$'$}$$

$$[4,1]a_m+[4,2]b_m+[4,3]A_m+[4,4]B_m=0 \tag{3.17$'$}$$

将 $[i,j]$ 排成矩阵并且以 Δ 表之，则我们得到

$$\Delta=\begin{bmatrix}[1,1] & [1,2] & [1,3] & [1,4]\\ [2,1] & [2,2] & [2,3] & [2,4]\\ [3,1] & [3,2] & [3,3] & [3,4]\\ [4,1] & [4,2] & [4,3] & [4,4]\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

我们称 Δ 为频率矩阵。

四、应用频率矩阵求解频率方程

利用广义简支边和引入频率矩阵对于求解两对边简支另两对边为各种支持的矩形板的频率方程是非常方便的。

由频率矩阵的不同元素组成的诸零行列式就代表相应边界条件的诸频率方程。

对于通过板的中心且平行于 x 轴的轴而言，有不对称，对称和反对称三种情况。让我们在下面分别讨论这三种情况。

（一） 不对称振型

1． $\eta=0$ 边简支和 $\eta=b$ 边固定

对于这种情况，应执行边界条件 (3.15)。让 $a_m=b_m=A_m=0$ 和 $B_m\neq0$，并且取 Δ 中的元素 [2,4] 为零，则我们得到频率方程

$$\alpha_m \mathrm{ch}\alpha_m b \sin\beta'_m b-\beta'_m \mathrm{sh}\alpha_m b\cos\beta'_m b=0 \tag{4.1}$$

这里 $\lambda^2>\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$ 和 $\beta'^2_m=\lambda^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$。

2． $\eta=0$ 边简支和 $\eta=b$ 边自由

在这种情况下，应满足边界条件 (3.17)。让 $a_m=A_m=B_m=0$ 和 $b_m\neq0$ 并且取 Δ 中的 [4,2] 元素为零，对于 $\lambda^2<\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，频率方程成为

$$\begin{aligned}&-\alpha_m\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\beta_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\alpha_m b\,\mathrm{sh}\beta_m b\\&+\beta_m\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{sh}\alpha_m b\,\mathrm{ch}\beta_m b=0\end{aligned} \tag{4.2}$$

对于 $\lambda^2>\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，为

$$\begin{aligned}&-\alpha_m\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\beta'^2_m+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\alpha_m b\sin\beta'_m b\\&+\beta'_m\left[\beta'^2_m+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{sh}\alpha_m b\cos\beta'_m b=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

3． $\eta=0$ 边固定和 $\eta=b$ 边自由

边界条件 (3.14) 和 (3.17) 必须同时满足。让 $a_m=B_m=0$ 和 $b_m\neq0$，$A_m\neq0$ 并且利用 Δ 中诸元素 [1,2]，[1,3]；[4,2]，[4,3] 组成的零行列式，对于 $\lambda^2<\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，频率方程为

$$\begin{aligned}&\left\{\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\alpha_m b-\left[\beta_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\beta_m b\right\}\\&\cdot\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\alpha_m b-\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\beta_m b\right\}\end{aligned}$$

$$-\left\{\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\alpha_m b-\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)\left[\beta_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\beta_m b\right\}$$

$$\cdot\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\alpha_m b-\left(\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\beta_m b\right\}=0 \quad (4.4)$$

对于 $\lambda^2>\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，为

$$\left\{\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{ch}\alpha_m b+\left[\beta_m'^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\cos\beta_m' b\right\}$$

$$\cdot\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{ch}\alpha_m b+\left[\beta_m'^2+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\cos\beta_m' b\right\}$$

$$-\left\{\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\alpha_m b+\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m'}\right)\left[\beta_m'^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\sin\beta_m' b\right\}$$

$$\cdot\left\{\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\alpha_m b-\left(\frac{\beta_m'}{\alpha_m}\right)\left[\beta_m'^2+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\sin\beta_m' b\right\}=0 \quad (4.5)$$

对于这三种非对称情况，应取 $n=1,2,3,\cdots$。

（二） 对称振型

1\. 两对边固定

执行边界条件 (3.14) 或 (3.15) 并且让 $a_m=b_m=0$ 和 $A_m=B_m\neq0$，从 (3.18) 我们得到

$$\{[1,3]+[1,4]\}=0 \quad (4.6)$$

因而频率方程成为

$$\alpha_m\text{sh}\alpha_m\frac{b}{2}\cos\beta_m'\frac{b}{2}+\beta_m\text{ch}\alpha_m\frac{b}{2}\sin\beta_m'\frac{b}{2}=0 \quad (4.7)$$

2\. 两对边自由

执行边界条件 (3.16) 或 (3.17) 并且让 $A_m=B_m=0$ 和 $a_m=b_m\neq0$，从(3.18) 我们得到

$$\{[3,1]+[3,2]\}=0 \quad (4.8)$$

对于 $\lambda^2<\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，频率方程成为

$$-\alpha_m\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\beta_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\alpha_m\frac{b}{2}\text{ch}\beta_m\frac{b}{2}$$

$$+\beta_m\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{ch}\,\alpha_m\frac{b}{2}\text{sh}\beta_m\frac{b}{2}=0 \quad (4.9)$$

对于 $\lambda^2>\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，为

$$\alpha_m\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\beta_m'^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{sh}\alpha_m\frac{b}{2}\cos\beta_m'\frac{b}{2}$$

$$+\beta_m'\left[\beta_m'^2+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\text{ch}\alpha_m\frac{b}{2}\sin\beta_m'\frac{b}{2}=0 \quad (4.10)$$

对于这两种情况，我们应取 $n=1,3,5,\cdots$.

（三） **反对称振型**

1. 两对边固定

执行边界条件 (3.14) 或 (3.15) 并且让 $a_m=b_m=0$ 和 $A_m=-B_m\neq 0$，从 (3.18) 我们得到

$$\{[1,3]-[1,4]\}=0 \tag{4.11}$$

因而频率方程成为

$$\alpha_m \mathrm{ch}\alpha_m \frac{b}{2}\sin\beta'_m\frac{b}{2}-\beta'_m \mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}\cos\beta'_m\frac{b}{2}=0 \tag{4.12}$$

2. 两对边自由

执行边界条件(3.16) 或 (3.17) 并且让 $A_m=B_m=0$ 和 $a_m=-b_m\neq 0$，从 (3.18) 我们得到

$$\{[3,1]-[3,2]\}=0 \tag{4.13}$$

对于 $\lambda^2<\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，频率方程成为

$$-\alpha_m\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\beta_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}\mathrm{sh}\beta_m\frac{b}{2}$$
$$+\beta^m\left[\beta_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}\mathrm{ch}\beta_m\frac{b}{2}=0 \tag{4.14}$$

对于 $\lambda^2>\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$，为

$$-\alpha_m\left[\alpha_m^2-(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\beta_m'^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{ch}\alpha_m\frac{b}{2}\sin\beta'_m\frac{b}{2}$$
$$+\beta'_m\left[\beta_m'^2+(2-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[\alpha_m^2-\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\mathrm{sh}\alpha_m\frac{b}{2}\cos\beta'_m\frac{b}{2}=0 \tag{4.15}$$

对于这两种反对称情况，我们应取 $n=2,4,6,\cdots$.

对于(一)、(二)、(三)，我们应取 $m=1,2,3,\cdots$.

我们所得的前述诸频率方程都与文 [7] 的相同.

附 录

为计算直梁和矩形板的自然频率，我们将在下面给出从三角级数到双曲线函数的某些转换公式.

对于在弹性基上受横向载荷与拉伸复合作用的简支梁，如图 3 所示，有微分方程

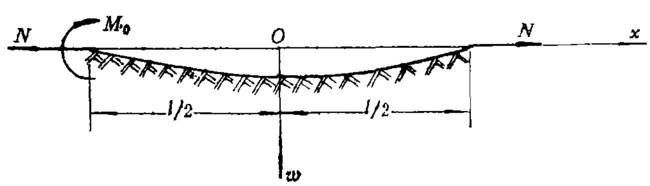

图 3

$$\frac{d^4w}{dx^4}-\frac{N}{EJ}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{k}{EJ}w=0 \tag{A.1}$$

使用符号

$$2\eta=\frac{N}{EJ},\qquad p^2=\frac{k}{EJ}$$

则方程 (A.1) 成为

$$\frac{d^4w}{dx^4}-2\eta\frac{d^2w}{dx^2}+p^2w=0 \tag{A.2}$$

当 $\eta^2>p^2$ 时，(A.2) 的全解是

$$w(x)=A\,\mathrm{sh}\alpha x+B\,\mathrm{ch}\alpha x+C\,\mathrm{sh}\beta x+D\,\mathrm{ch}\beta x \tag{A.3}$$

这里

$$\alpha=\sqrt{\eta+\sqrt{\eta^2-p^2}},\qquad \beta=\sqrt{\eta-\sqrt{\eta^2-p^2}}$$

(A.3) 必须满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}&w\left(\frac{l}{2}\right)=0,\qquad w\left(-\frac{l}{2}\right)=0\\&w''\left(\frac{l}{2}\right)=0,\qquad w''\left(-\frac{l}{2}\right)=\frac{M_0}{EJ}\end{aligned}\right\} \tag{A.4}$$

执行边界条件 (A.4)，(A.3) 成为

$$w(x)=-\frac{M_0}{2EJ}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(-\frac{\mathrm{sh}\alpha x}{\mathrm{sh}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\alpha x}{\mathrm{ch}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\beta x}{\mathrm{sh}\beta\frac{l}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\beta x}{\mathrm{ch}\beta\frac{l}{2}}\right) \tag{A.5}$$

取如图 4 所示的坐标轴，(A.5) 成为

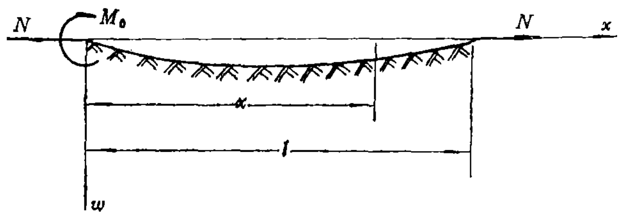

图 4

$$w(x)=-\frac{M_0}{2EJ}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[-\frac{\mathrm{sh}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\beta\frac{l}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\beta\frac{l}{2}}\right] \tag{A.6}$$

该问题也可用能量法来求解. 对于图 4 所示坐标轴，总势能等于

$$\Pi_p=\frac{1}{2}EJ\int_0^l\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2dx+\frac{N}{2}\int_0^l\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^l kw^2dx-M_0\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} \tag{A.7}$$

假设

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi x}{l} \tag{A.8}$$

并且利用最小势能原理，我们求得

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{\frac{m\pi}{l}M_0}{\frac{EJ\pi^4}{2l^3}\left(m^4+2\eta m^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}\right)}\sin\frac{m\pi x}{l} \tag{A.9}$$

比较 (A.6) 与 (A.9)，我们得到

$$\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{m\sin\frac{m\pi x}{l}}{m^4+2\eta m^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}}=-\frac{\pi^3}{4l^2}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[-\frac{\mathrm{sh}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{sh}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\beta\frac{l}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\beta\frac{l}{2}}\right] \tag{A.10}$$

当在梁的 $x=l$ 处作用一外弯矩 M_0 时，利用相似的方法，我们得到转换公式的形式为

$$\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{m\cos m\pi\sin\frac{m\pi x}{l}}{m^4+2\eta m^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}}=\frac{\pi^3}{4l^2}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{\mathrm{sh}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\mathrm{ch}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\alpha\frac{l}{2}}-\frac{\mathrm{sh}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\beta\frac{l}{2}}-\frac{\mathrm{ch}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\beta\frac{l}{2}}\right] \tag{A.11}$$

把 (A.10) 和 (A.11) 对 x 取二阶导数，我们分别得到

$$\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{m^3\sin\frac{m\pi x}{l}}{m^4+2\eta m^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}}=-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{\alpha^2\mathrm{sh}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\alpha\frac{l}{2}}-\frac{\alpha^2\mathrm{ch}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\alpha\frac{l}{2}}-\frac{\beta^2\mathrm{sh}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\beta\frac{l}{2}}+\frac{\beta^2\mathrm{ch}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\beta\frac{l}{2}}\right] \tag{A.12}$$

和

$$\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{m^3\cos m\pi\sin\frac{m\pi x}{l}}{m^4+2\eta m^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}}=-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{\alpha^2\mathrm{sh}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{\alpha^2\mathrm{ch}\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\alpha\frac{l}{2}}-\frac{\beta^2\mathrm{sh}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sh}\beta\frac{l}{2}}-\frac{\beta^2\mathrm{ch}\beta\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\beta\frac{l}{2}}\right] \tag{A.13}$$

参 考 文 献

[1] 付宝连，计算直梁横向振动自然频率的一个新方法，东北重型机械学院学报，3(1983).

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社出版，(1956).

[3] 付宝连，求解挠曲方程的一个新方法，东北重型机械学院第三届科学报告会，(1981).

[4] 付宝连，应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程，应用数学和力学，3, 3(1982).

[5] 朱雁滨、付宝连，再论在一集中载荷作用下悬臂矩形板的弯曲，东北重型机械学院学报，1 (1984).

[6] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, (1956).

[7] Gorman, D. J., *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*, Elsevier, New York, Amsterdam, Oxford.

Application of the Reciprocal Theorem for Calculating the Natural Frequencies of Rectangular Elastic Thin Plates

Fu Bao-lian

(*Northeast Heavy Machinery Institute, Qiqihaer*)

Abstract

This paper further extends the applications of reciprocal theorem for calculating the natural frequencies of rectangular elastic thin plates on the basis of [1]. Applying the present method, there is no need to solve governing differential equations, it is only necessary to solve a simple integral equation after using the reciprocal theorem between the basic system and the actual system.

Using the idea of the generalized edge simply supported and introducing the frequency matrix, then all frequency equations of the rectangular plates with two opposite edges simply supported and other two opposite edges variously supported are obtained together.

This is a simple, convenient and general method for calculating the frequency equations of the rectangular plates.