

解任意形状扁轴对称体 Stokes 流动的连续奇点分布法

朱 敏 吴望一

(北京大学力学系, 1984年11月26日收到)

摘 要

本文以 Sampson 球形无穷级数作为基本奇点, 采用分段等强度和分段二次抛物物分布两种体内连续分布法解任意形状扁轴对称体的 Stokes 流动. 通过扁球的无界绕流问题, 对这两种方法的收敛性, 精度和适用范围做了检验和比较. 结果表明, 在一定的范围内, 无论是阻力系数或压力分布, 它们的计算结果都和精确解符合得很好, 而且, 随着分布函数逼近程度的提高, 其收敛性得到改善, 适用范围也随之扩大. 作为一般算例, 分别用这两种方法解决了卡西尼扁卵形体的绕流问题, 得到了一致的结果. 最后, 用分段二次连续分布法计算了具有一定生理意义的红细胞体的 Stokes 流动, 首次得到了它的阻力系数和表面压力分布.

一、引 言

在生物工程、化学工程和环境工程等学科中, 存在着诸如微生物运动、悬溶胶体的运输和气体体等等一大批与低雷诺数下绕流问题相关的题目, 而且有关物体的形状往往比较复杂, 例如, 红细胞的正常形状就是双凹的圆盘形.

在小雷诺数流动中, 扰动的衰减是非常缓慢的, 这给用有限元和有限差分法处理无界绕流问题带来困难. 因为当我们用有限区域逼近无界区域并在有限区域中应用有限元或有限差分法时, 被忽略掉的区域仍然会对数值计算的结果有着不可忽视的影响, 这便严重地影响了方法的精度及有效性. 因此, 在无界绕流问题中, 有限基本解方法得到了较为广泛的应用. 例如, 吴耀祖等^[1]用 Stokes 流子、双极子、四极子、旋转子和应力子等奇点的体内连续分布法, 求出了旋转椭球在各种来流条件下的解析解. 但是对于一般的任意物体, 利用这种方法很难求出解析解来. Gluckman 等人^[2]提出采用展弦比趋于零的扁球的无穷级数形式的 Stokes 流动解作为基本奇点, 采用环形奇点面分布法处理了任意凸形轴对称体的无界 Stokes 流动, 得到了和分析解及实验值相符合的长球及平头圆柱的阻力系数. 另外, Youngren 和 Acrivos^[3]将 Stokes 流子连续地分布在任意形状物体的表面, 采用类似于势流中 Hess 和 Smith^[6]处理方法来解决三维物体的无界 Stokes 流动. 但是上述两种方法都牵涉到数值积分问题, 因此, 计算量很大, 而且也不易推广到有界 Stokes 流动中去.

将 Sampson 球形奇点作为基本解, Weinbaum 等^[4]用强干扰法成功地解决了无界圆管

内的球串轴对称流动、单个球在两平板间的运动和从半无穷空间经过小孔到另一半无穷空间等问题。因此，如果能够用 Sampson 奇点求解任意物体的绕流问题，就完全可以用同样方法推广到以上一些对应的有界流动问题中去。

最近，吴望一等^{[6][7][8]}提出了将 Sampson 奇点分布在对称轴上的新方法，成功地解决了任意长轴对称体的绕流问题，取得了十分理想的结果。文[9]和本文正是在此思想基础上，提出将 Sampson 奇点环形地分布在物体中面上，用球形扰动的叠加逼近任意物体所引起的扰动，以此来解任意扁轴对称的 Stokes 流动。和处理长轴对称体的方法相类似，它也具有计算量小，精度高等优点，而且可以推广到一些有界流动中去。文[9]所采用的是离散分布，由于分布函数比较粗糙限制了适用范围。本文是文[9]的改进和发展，它采取的连续分布法使得这个问题得到很大程度的改善，并且在精度上也有显著提高。

以下先给出进行数值计算的理论基础及有关公式，然后，通过一些算例说明此方法的有效性。

二、连续奇点分布法的理论基础

设一速度为 U 的均匀来流缓慢地绕过一扁轴对称体，其对称轴与来流平行。取直角坐标系 $Oxyz$ 及柱坐标系 R, θ, z ，使 z 轴与物体的对称轴重合（见图1）。显然，这是一个轴对称流动，习惯上只须考虑 $\theta=0$ 的 ROz 平面上的流动即可。取 $L, U, \mu U/L, UL^2$ 为长度，速度，压力和流函数的特征参考量。其中 L 是物体的特征长度， μ 是流体的动力学粘性系数。

Stokes 流动的无量纲流函数 ψ 满足方程

$$D^2(D^2\psi)=0 \quad (2.1)$$

其中 D^2 是广义轴对称 Stokes 算子，解出 ψ ，无量纲轴向速度分量 v_z ，径向速度分量 v_R ，压力 p 可分别根据下列公式求出

$$v_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (D^2\psi), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (D^2\psi) \quad (2.3)$$

根据 Sampson^[10] 的建议，球心位于原点的圆球产生的扰动由下列无穷级数表出

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, z) + D_n F_n^{(2)}(R, z)] \\ v_R &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(6)}(R, z) + D_n F_n^{(6)}(R, z)] \\ \psi &= \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(R, z) + D_n F_n^{(4)}(R, z)] \\ p &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{n} F_{n-1}^{(1)}(R, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中 C_n, D_n 是待定的常数，函数 $F_n^{(k)}$ ($k=1, \dots, 6$) 分别为：

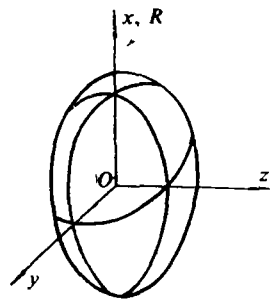


图 1

$$\left. \begin{aligned}
 F_n^{(1)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}} P_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(2)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \left\{ P_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] + 2J_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \right\} \\
 F_n^{(3)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} J_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(4)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-3}{2}} J_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(5)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(6)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 &\quad - 2z(R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} J_n \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中 P_n , J_n 分别为 n 阶 Legendre 多项式和 Gegenbauer 多项式, 我们称(2.4)式表示出来的奇点为 Sampson 球形奇点。

从物理直观上可以想象, 在物体内部的中面上分布 Sampson 奇点, 就是用球的扰动的叠加起来逼近物体的扰动。当然, 为了保证扰动是轴对称的, 奇点的分布必须是轴对称的, 就是说奇点一定要分布在以原点为中心的圆环上, 而且, 圆环上的奇点分布必须等强度。设 S 为奇点分布面, 位于 S 上的任意点 Q 的坐标为 $(a \cos \theta, a \sin \theta, \xi)$, 则 Q 上的 Sampson 奇点对 ROz 平面上任意一点 $P(R, 0, z)$ 所产生的扰动由下列无穷级数给出

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{v}_z &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_n F_n^{(1)}(R', z-\xi) + D_n F_n^{(2)}(R', z-\xi) \right] \\
 \bar{v}_R &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_n \frac{R-a \cos \theta}{R'} F_n^{(5)}(R', z-\xi) + D_n \frac{R-a \cos \theta}{R'} F_n^{(6)}(R', z-\xi) \right] \\
 \bar{v}_y &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[C_n \frac{a \sin \theta}{R'} F_n^{(5)}(R', z-\xi) + D_n \frac{a \sin \theta}{R'} F_n^{(6)}(R', z-\xi) \right] \\
 \bar{p} &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{n} F_n^{(1)}(R', z-\xi)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中, $R' = (R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$ 是 P 点到 Q 点的距离, 这样在 S 上分布的奇点具扰动的总和为:

$$v_z = \int_S \bar{v}_z dS, \quad v_R = \int_S \bar{v}_R dS, \quad p = \int_S \bar{p} dS \quad (2.7)$$

\bar{v}_y 的积分显然等于零。如果物体关于 ROy 平面也是对称的, 则流动前后对称。利用 $F_n^{(i)}$ 的奇偶性, 可推出 $D_{2n+1} = C_{2n+1} = 0$ 。考虑绕流问题, 还须要在(2.7)式中加上无穷远处的来流, 于是:

$$\left. \begin{aligned}
 v_z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^A [C_{2n}(a) F_{2n}^{(1)}(R', z) + D_{2n}(a) F_{2n}^{(2)}(R', z)] adad\theta \right\} \\
 v_R &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^A [C_{2n}(a) F_{2n}^{(5)}(R', z) + D_{2n}(a) F_{2n}^{(6)}(R', z)] adad\theta \right\} \\
 p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^A D_{2n}(a) \frac{4n-3}{n} F_{2n-1}^{(1)}(R', z) adad\theta \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

在物面上满足无滑移条件, 得到下列确定待定函数 $C_{2n}(a)$ 和 $D_{2n}(a)$ 的积分方程:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^A [C_{2n}(a) F_{2n}^{(1)}(\bar{R}', \bar{z}) + D_{2n}(a) F_{2n}^{(2)}(\bar{R}', \bar{z})] adad\theta &= -1 \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^A [C_{2n}(a) F_{2n}^{(5)}(\bar{R}', \bar{z}) + D_{2n}(a) F_{2n}^{(6)}(\bar{R}', \bar{z})] adad\theta &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中 A 是 S 的半径, \bar{R}, \bar{z} 是物面上各点的坐标. 要求出积分方程 (2.9) 的精确解是非常困难的, 为此, 我们采用下述近似方法. 为讨论方便起见, 假设物体前后对称.

三、分段离散近似处理

A) 分段等强度分布

将圆盘 S 的半径 OA 分成 M 段, 每段中的分布函数用常数代替. 假设第 j 段两端点的坐标为 d_j, d_{j+1} ($j=1, 2, \dots, M$), 则 (2.8) 式化为

$$\left. \begin{aligned}
 v_z &= 1 + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{nj} \left(\bar{H}_{2n}^{(1)} \Big|_{d_j}^{d_{j+1}} \right) + D_{nj} \left(\bar{I}_{2n}^{(1)} \Big|_{d_j}^{d_{j+1}} \right) \right] \\
 v_R &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{nj} \left(\bar{J}_{2n}^{(1)} \Big|_{d_j}^{d_{j+1}} \right) + D_{nj} \left(\bar{K}_{2n}^{(1)} \Big|_{d_j}^{d_{j+1}} \right) \right] \\
 p &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4n-3}{n} D_{nj} \left(\bar{H}_{2n-1}^{(1)} \Big|_{d_j}^{d_{j+1}} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{H}_n^{(i)} &= \int_0^{2\pi} H_n^{(i)} d\theta, \quad H_n^{(i)} = \int a^i F_n^{(i)}(R', z) da \\
 \bar{I}_n^{(i)} &= \int_0^{2\pi} I_n^{(i)} d\theta, \quad I_n^{(i)} = \int a^i F_n^{(2)}(R', z) da \\
 \bar{J}_n^{(i)} &= \int_0^{2\pi} J_n^{(i)} d\theta, \quad J_n^{(i)} = \int a^i F_n^{(5)}(R', z) \frac{R-a \cos \theta}{R'} da \\
 \bar{K}_n^{(i)} &= \int_0^{2\pi} K_n^{(i)} d\theta, \quad K_n^{(i)} = \int a^i F_n^{(6)}(R', z) \frac{R-a \cos \theta}{R'} da
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$i=0, 1, 2, 3$. 将(3.1)式中的无穷级数截断, 取 N 项作为其近似式, 在物面上取 $M \times N$ 个配置点, 在这些配置点上满足无滑移条件, 得到确定 C_{nj} 和 D_{nj} 的线性代数方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^N \left[C_{nj} \left(\bar{H}_{2n}^{(1)} \Big|_{d_i}^{d_{i+1}} \right) + D_{nj} \left(\bar{I}_{2n} \Big|_{d_i}^{d_{i+1}} \right) \right] &= -1 \\ \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^N \left[C_{nj} \left(J_{2n}^{(1)} \Big|_{d_i}^{d_{i+1}} \right) + D_{nj} \left(\bar{K}_{2n}^{(1)} \Big|_{d_i}^{d_{i+1}} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

求得 C_{nj} , D_{nj} 后代入(3.1)的截断表达式, 即可得出近似的速度场和压力场.

其阻力系数为

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^M D_{2j} (d_{j+1}^2 - d_j^2)}{1.5} \quad (3.4)$$

B) 分段二次分布

在每一段上取三个点, 除两个端点外, 再在线段的中间取一点, 设两端点和中点距离原点的距离为 d_{j1} , d_{j2} , d_{j3} , 它们之间的长度为 $h_1 = d_{j2} - d_{j1}$, $h_2 = d_{j3} - d_{j2}$, $h_3 = d_{j3} - d_{j1}$, 这些点上的强度分布函数值为 C_{nj_k} , D_{nj_k} ($k=1, 2, 3$), 则强度分布函数可近似为以这三点强度为系数的二次式

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj}(a) \\ D_{nj}(a) \end{array} \right\} &= \frac{(a-d_{j2})(a-d_{j3})}{h_1 h_3} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj_1} \\ D_{nj_1} \end{array} \right\} - \frac{(a-d_{j3})(a-d_{j1})}{h_2 h_1} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj_2} \\ D_{nj_2} \end{array} \right\} \\ &+ \frac{(a-d_{j1})(a-d_{j2})}{h_2 h_3} \left\{ \begin{array}{l} C_{nj_3} \\ D_{nj_3} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

将(3.5)式代入(2.8)式得到

$$\left. \begin{aligned} u_z &= 1 + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \left[S_{2n}^{(1)}(R, z) C_{n, 2(j-1)+1} + T_{2n}^{(1)}(R, z) C_{n, 2(j-1)+2} \right. \\ &+ W_{2n}^{(1)}(R, z) C_{n, 2(j-1)+3} + S_{2n}^{(2)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+1} \\ &+ T_{2n}^{(2)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+2} + W_{2n}^{(2)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+3} \left. \right] \\ u_n &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \left[S_{2n}^{(5)}(R, z) C_{n, 2(j-1)+1} + T_{2n}^{(5)}(R, z) C_{n, 2(j-1)+2} \right. \\ &+ W_{2n}^{(5)}(R, z) C_{n, 2(j-1)+3} + S_{2n}^{(6)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+1} \\ &+ T_{2n}^{(6)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+2} + W_{2n}^{(6)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+3} \left. \right] \\ p &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4n-3}{n} \left[S_{2n-1}^{(1)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+1} + T_{2n-1}^{(1)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+2} \right. \right. \\ &\left. \left. + W_{2n-1}^{(1)}(R, z) D_{n, 2(j-1)+3} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
\text{其中 } S_n^{(i)} &= \frac{1}{h_1 h_2} [d_{j_2} d_{j_3} L_{n,i}^{(1)} - (d_{j_2} + d_{j_3}) L_{n,i}^{(2)} + L_{n,i}^{(3)}] \\
T_n^{(i)} &= \frac{1}{h_1 h_2} [-d_{j_1} d_{j_3} L_{n,i}^{(1)} + (d_{j_3} + d_{j_1}) L_{n,i}^{(2)} + L_{n,i}^{(3)}] \quad (i=1, 2, 5, 6) \\
W_n^{(i)} &= \frac{1}{h_2 h_3} [d_{j_1} d_{j_2} L_{n,i}^{(1)} + (d_{j_1} + d_{j_2}) L_{n,i}^{(2)} + L_{n,i}^{(3)}] \\
L_{n,1}^{(k)} &= \bar{H}_n^{(k)} \begin{vmatrix} d_{j_3} \\ d_{j_1} \end{vmatrix}, \quad L_{n,2}^{(k)} = \bar{I}_n^{(k)} \begin{vmatrix} d_{j_3} \\ d_{j_1} \end{vmatrix}, \quad L_{n,3}^{(k)} = \bar{J}_n^{(k)} \begin{vmatrix} d_{j_3} \\ d_{j_1} \end{vmatrix}, \\
L_{n,0}^{(k)} &= \bar{K}_n^{(k)} \begin{vmatrix} d_{j_3} \\ d_{j_1} \end{vmatrix} \quad (k=1, 2, 3)
\end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$\bar{H}_n^{(k)}$, $\bar{I}_n^{(k)}$, $\bar{J}_n^{(k)}$, $\bar{K}_n^{(k)}$ 的定义见(3.2)式. 截断(3.6)式到 $n=N$, 这样就有 $2N(2M+1)$ 个系数待定. 在物面上取 $N(2M+1)$ 个配置点, 满足无滑移条件, 得到下列确定 C_{nj_k} , D_{nj_k} 的 $2N(2M+1)$ 阶线性方程组.

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^N & \left[S_{2n}^{(1)}(\bar{R}, \bar{z}) C_{n, 2(j-1)+1} + T_{2n}^{(1)}(\bar{R}, \bar{z}) C_{n, 2(j-1)+2} \right. \\
& + W_{2n}^{(1)}(\bar{R}, \bar{z}) C_{n, 2(j-1)+3} + S_{2n}^{(2)}(\bar{R}, \bar{z}) D_{n, 2(j-1)+1} \\
& \left. + T_{2n}^{(2)}(\bar{R}, \bar{z}) D_{n, 2(j-1)+2} + W_{2n}^{(2)}(\bar{R}, \bar{z}) D_{n, 2(j-1)+3} \right] = -1 \\
\sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^N & \left[S_{2n}^{(5)}(\bar{R}, \bar{z}) C_{n, 2(j-1)+1} + T_{2n}^{(5)}(\bar{R}, \bar{z}) C_{n, 2(j-1)+2} \right. \\
& + W_{2n}^{(5)}(\bar{R}, \bar{z}) C_{n, 2(j-1)+3} + S_{2n}^{(6)}(\bar{R}, \bar{z}) D_{n, 2(j-1)+1} \\
& \left. + T_{2n}^{(6)}(\bar{R}, \bar{z}) D_{n, 2(j-1)+2} + W_{2n}^{(6)}(\bar{R}, \bar{z}) D_{n, 2(j-1)+3} \right] = 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

其中 \bar{R} , \bar{z} 是物面上点的坐标.

将求出的 C_{nj_k} , D_{nj_k} ($k=1, 2, 3$)代回(3.6)的截断式即可得到问题的近似解.

如果取 $d_{j_2} = (d_{j_1} + d_{j_3})/2$, 则阻力系数公式为:

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^M [d_{j_1} D_{2, 2(j-1)+1} + 2(d_{j_1} + d_{j_3}) D_{2, 2(j-1)+2} + d_{j_3} D_{2, 2(j-1)+3}]}{6} (d_{j_3} - d_{j_1}) \quad (3.9)$$

C) $\bar{H}_n^{(i)}$, $\bar{I}_n^{(i)}$, $\bar{J}_n^{(i)}$, $\bar{K}_n^{(i)}$ 的计算公式

现在, 问题归结为如何计算 $\bar{H}_n^{(i)}$, $\bar{I}_n^{(i)}$, $\bar{J}_n^{(i)}$ 及 $\bar{K}_n^{(i)}$, 我们首先研究 $H_n^{(i)}$, $I_n^{(i)}$, $J_n^{(i)}$, $K_n^{(i)}$. 将 $n=0$ 的情况积出, 设 $\Delta = (R^2 + a^2 + z^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{1}{2}}$, 则有:

$$F_0^{(1)} = \Delta^{-1}, \quad F_0^{(2)} = 3\Delta, \quad F_0^{(5)} = -z(R'\Delta)^{-1}, \quad F_0^{(6)} = -\frac{3\Delta}{R'} z \quad (3.10)$$

代入(3.2)可积出得

$$\begin{aligned}
H_0^{(0)} &= \text{sh}^{-1} \frac{a - R \cos \theta}{(z^2 + R^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad H_0^{(1)} = \Delta + R \cos \theta H_0^{(0)} \\
H_0^{(2)} &= \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{2} R \cos \theta \right) \Delta + \left[\frac{3}{2} R^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} (R^2 + z^2) \right] \\
H_0^{(3)} &= \left[\frac{a^2}{3} + \frac{5}{6} a R \cos \theta + \frac{5}{2} R^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{3} (R^2 + z^2) \right] \Delta \\
&\quad + \left[\frac{5}{2} R^3 \cos^3 \theta - \frac{3}{2} R \cos \theta (R^2 + z^2) \right] H_0^{(0)} \\
I_0^{(0)} &= \frac{3}{2} (a - R \cos \theta) \Delta + \frac{3}{2} (z^2 + R^2 \sin^2 \theta) H_0^{(0)} \\
I_0^{(1)} &= \Delta^3 + R \cos \theta I_0^{(0)} \\
I_0^{(2)} &= 3 \left(\frac{a}{4} + \frac{5}{12} R \cos \theta \right) \Delta^3 + \left[\frac{5}{4} R^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{4} (R^2 + z^2) \right] I_0^{(0)} \\
I_0^{(3)} &= 3 \left[\frac{1}{5} a^2 + \frac{7}{20} R \cos \theta a + \frac{7}{12} R^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{15} (R^2 + z^2) \right] \Delta^3 \\
&\quad + \left[\frac{7}{4} R^3 \cos^3 \theta - \frac{3}{4} R \cos \theta (R^2 + z^2) \right] I_0^{(0)} \\
J_0^{(0)} &= -\frac{\cos \theta}{2} \ln \frac{\Delta + z}{\Delta - z} - \sin \theta \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{(a - R \cos \theta) z}{R \sin \theta \cdot \Delta} \right] \\
J_0^{(1)} &= z \cos \theta H_0^{(0)} + \frac{R \cos 2\theta}{2} \ln \frac{\Delta - z}{\Delta + z} - R \sin 2\theta \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{(a - R \cos \theta) z}{R \sin \theta \cdot \Delta} \right] \\
J_0^{(2)} &= -z (R H_0^{(0)} - \cos \theta H_0^{(1)}) - R^2 J_0^{(0)} + 2R \cos \theta J_0^{(1)} \\
J_0^{(3)} &= -z (R H_0^{(1)} - \cos \theta H_0^{(2)}) - R^2 J_0^{(1)} + 2R \cos \theta J_0^{(2)} \\
K_0^{(0)} &= 3z^2 J_0^{(0)} - 3z R H_0^{(0)} + 3z \cos \theta H_0^{(1)} \\
K_0^{(1)} &= 3z^2 J_0^{(1)} - 3z R H_0^{(1)} + 3z \cos \theta H_0^{(2)} \\
K_0^{(2)} &= -z (R I_0^{(0)} - \cos \theta I_0^{(1)}) - R^2 K_0^{(0)} + 2R \cos \theta K_0^{(1)} \\
K_0^{(3)} &= -z (R I_0^{(1)} - \cos \theta I_0^{(2)}) - R^2 K_0^{(1)} + 2R \cos \theta K_0^{(2)}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

由 $F_0^{(j)}$ 与 $\partial F_0^{(j)} / \partial z$ ($j=1, 2, 5, 6$) 之间的关系可得到递推公式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1} I_0^{(4)}}{\partial z^{n+1}} &= 3z \frac{\partial^n H_0^{(4)}}{\partial z^n} + 3n \frac{\partial^{n-1} H_0^{(4)}}{\partial z^{n-1}} \\
\frac{\partial^{n+1} K_0^{(4)}}{\partial z^{n+1}} &= -\frac{(n-1)}{z} \frac{\partial^n K_0^{(4)}}{\partial z^n} + 3z \frac{\partial^n J_0^{(4)}}{\partial z^n} + 6n \frac{\partial^{n-1} J_0^{(4)}}{\partial z^{n-1}} \\
&\quad + 3 \frac{n(n-1)}{z} \frac{\partial^{n-2} J_0^{(4)}}{\partial z^{n-2}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

再将(3.11)中的 $H_0^{(i)}$, $K_0^{(i)}$ 对 z 求 n 次导数, 整理后得到关系式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n H_0^{(0)}}{\partial z^n} &= \frac{1}{z^2 + R^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{2}{3} \frac{\partial^n I_0^{(0)}}{\partial z^n} - 2nz \frac{\partial^{n-1} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-1}} - n(n-1) \frac{\partial^{n-2} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-2}} \right. \\
&\quad \left. - (a - R \cos \theta) \frac{\partial^n \Delta}{\partial z^n} \right] \\
\frac{\partial^n H_0^{(1)}}{\partial z^n} &= \frac{\partial^n \Delta}{\partial z^n} + R \cos \theta \frac{\partial^n H_0^{(0)}}{\partial z^n} \\
\frac{\partial^n H_0^{(2)}}{\partial z^n} &= \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{2} R \cos \theta \right) \frac{\partial^n \Delta}{\partial z^n} + \left[\frac{3}{2} R^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} (R^2 + z^2) \right] \frac{\partial^n H_0^{(0)}}{\partial z^n} \\
&\quad - nz \frac{\partial^{n-1} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-1}} - \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{n-2} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-2}} \\
\frac{\partial^n H_0^{(3)}}{\partial z^n} &= \left[\frac{a^2}{3} + \frac{5}{6} R \cos \theta \cdot a + \frac{5}{2} R^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{3} (R^2 + z^2) \right] \frac{\partial^n \Delta}{\partial z^n} - \frac{4}{3} nz \frac{\partial^{n-1} \Delta}{\partial z^{n-1}} \\
&\quad - \frac{2}{3} n(n-1) \frac{\partial^{n-2} \Delta}{\partial z^{n-2}} + \left[\frac{5}{2} R^3 \cos^3 \theta - \frac{3}{2} R \cos \theta (R^2 + z^2) \right] \frac{\partial^n H_0^{(0)}}{\partial z^n} \\
&\quad - 3R \cos \theta \frac{\partial^{n-1} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-1}} - \frac{3}{2} R \cos \theta n(n-1) \frac{\partial^{n-2} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-2}} \\
\frac{\partial^n J_0^{(0)}}{\partial z^n} &= \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^n K_0^{(0)}}{\partial z^n} - 2nz \frac{\partial^{n-1} J_0^{(0)}}{\partial z^{n-1}} - n(n-1) \frac{\partial^{n-2} J_0^{(0)}}{\partial z^{n-2}} \right. \\
&\quad \left. + z \left(R \frac{\partial^n H_0^{(0)}}{\partial z^n} - \cos \theta \frac{\partial^n H_0^{(1)}}{\partial z^n} \right) + n \left(R \frac{\partial^{n-1} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-1}} - \cos \theta \frac{\partial^{n-1} H_0^{(1)}}{\partial z^{n-1}} \right) \right] \\
\frac{\partial^n J_0^{(1)}}{\partial z^n} &= \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^n K_0^{(1)}}{\partial z^n} - 2nz \frac{\partial^{n-1} J_0^{(1)}}{\partial z^{n-1}} - n(n-1) \frac{\partial^{n-2} J_0^{(1)}}{\partial z^{n-2}} \right. \\
&\quad \left. + z \left(R \frac{\partial^n H_0^{(1)}}{\partial z^n} - \cos \theta \frac{\partial^n H_0^{(2)}}{\partial z^n} \right) + n \left(R \frac{\partial^{n-1} H_0^{(1)}}{\partial z^{n-1}} - \cos \theta \frac{\partial^{n-1} H_0^{(2)}}{\partial z^{n-1}} \right) \right] \\
\frac{\partial^n J_0^{(2)}}{\partial z^n} &= z \left(\cos \theta \frac{\partial^n H_0^{(1)}}{\partial z^n} - R \frac{\partial^n H_0^{(0)}}{\partial z^n} \right) + n \left(\cos \theta \frac{\partial^{n-1} H_0^{(1)}}{\partial z^{n-1}} - R \frac{\partial^{n-1} H_0^{(0)}}{\partial z^{n-1}} \right) \\
&\quad - R^2 \frac{\partial^n J_0^{(0)}}{\partial z^n} + 2R \cos \theta \frac{\partial^n J_0^{(1)}}{\partial z^n} \\
\frac{\partial^n J_0^{(3)}}{\partial z^n} &= z \left(\cos \theta \frac{\partial^n H_0^{(2)}}{\partial z^n} - R \frac{\partial^n H_0^{(1)}}{\partial z^n} \right) + n \left(\cos \theta \frac{\partial^{n-1} H_0^{(2)}}{\partial z^{n-1}} - R \frac{\partial^{n-1} H_0^{(1)}}{\partial z^{n-1}} \right) \\
&\quad - R^2 \frac{\partial^n J_0^{(1)}}{\partial z^n} + 2R \cos \theta \frac{\partial^n J_0^{(2)}}{\partial z^n}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $\frac{\partial \Delta}{\partial z} = \frac{z}{\Delta}$, $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta} \left[1 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right)^2 \right]$, $\frac{\partial^{n+1} \Delta}{\partial z^{n+1}} (n \geq 2)$

可由下面递推公式求得:

$$\frac{\partial^{n+1} \Delta}{\partial z^{n+1}} = -\frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n C_i^n \frac{\partial^{n-i+1} \Delta}{\partial z^{n-i+1}} \frac{\partial^i \Delta}{\partial z^i} \right) \tag{3.14}$$

由(3.12)和(3.13)可求出任意阶的 $\frac{\partial^n H_0^{(i)}}{\partial z^n}$, $\frac{\partial^n I_0^{(i)}}{\partial z^n}$, $\frac{\partial^n J_0^{(i)}}{\partial z^n}$, $\frac{\partial^n K_0^{(i)}}{\partial z^n}$ ($i=0, 1,$

2, 3). 此外, 用归纳法易证

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(i)} &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n H_0^{(i)}}{\partial z^n} \\ I_n^{(i)} &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n I_0^{(i)}}{\partial z^n} + 2 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} z \frac{\partial^{n-1} H_0^{(i)}}{\partial z^{n-1}} - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2} H_0^{(i)}}{\partial z^{n-2}} \\ J_n^{(i)} &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n J_0^{(i)}}{\partial z^n} \\ K_n^{(i)} &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n K_0^{(i)}}{\partial z^n} + 2 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} z \frac{\partial^{n-1} J_0^{(i)}}{\partial z^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (n+1) \frac{\partial^{n-2} J_0^{(i)}}{\partial z^{n-2}} \end{aligned} \right\} (3.15)$$

到此我们求出了 $H_n^{(i)}$, $I_n^{(i)}$, $J_n^{(i)}$, $K_n^{(i)}$.

$$\text{函数 } \bar{H}_n^{(i)} = \int_0^{2\pi} H_n^{(i)} d\theta, \bar{I}_n^{(i)} = \int_0^{2\pi} I_n^{(i)} d\theta, \bar{J}_n^{(i)} = \int_0^{2\pi} J_n^{(i)} d\theta, \bar{K}_n^{(i)} = \int_0^{2\pi} K_n^{(i)} d\theta$$

不能解析地求出, 需要采用高斯公式进行数值积分. 做变换 $\theta = (1+x)\pi$, 则在 $[0, 2\pi]$ 上的积分化成 $[-1, 1]$ 上的积分. 设被积函数的一般形式为 $f(\theta)$, 有

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \pi \int_{-1}^1 f[(1+x)\pi] dx = \pi \sum_{i=1}^K W_i f(\xi_i) \quad (3.16)$$

其中 ξ_i 是节点坐标, W_i 是它的权. 在实际计算中 K 都取作 40.

四、椭球的绕流问题

在极坐标系中扁球的方程为

$$z = a \cos \varphi, \quad R = b \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, b > a) \quad (4.1)$$

其中 a , b 分别为短轴和长轴, φ 为极角, 根据扁球无界绕流问题的精确解 (参看 Happel 和 Brenner^[11]) 可推导出阻力系数和椭球面上压力分布的精确表达式为

$$\lambda = \left\{ \frac{3}{4} \sqrt{1 + \tau_0^2} [\tau_0 - (\tau_0^2 - 1) \text{ctg}^{-1} \tau_0] \right\}^{-1} \quad (4.2)$$

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\mu U / a} = \frac{3}{2} \lambda \frac{a^2 b z}{a^4 + c^2 z^2} \quad (4.3)$$

其中 $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ 是焦距, $\tau_0 = a/c$.

将 Sampson 球形奇点分布在半径为 c 的中心圆盘上, 取焦点到顶点的距离 $b-c$ 为特征长度. 将分布奇点的圆盘半径 c 等分为 M 段, 对于二次分布, 再在每段的中点取一个插值点, 它们距原点的距离分别为

$$d_{j1} = (j-1) \frac{c}{M}, \quad d_{j2} = \frac{c}{2M} (2j-1), \quad d_{j3} = j \frac{c}{M} \quad (j=1, \dots, M) \quad (4.4)$$

关于配置点的选取, 采用了极角等分原则, 它们的坐标为

$$z_i = a \cos \varphi_i, \quad R_i = b \sin \varphi_i, \quad \varphi_i = \frac{\pi}{L-1} (j-1) \quad (j=1, \dots, L) \quad (4.5)$$

其中 L 是配置点个数.

在边界点中, $\varphi=\pi/2$ 具有特殊的重要性, 因为它控制了物体在垂直于来流面上的投影边界, 从而影响阻力系数. 因此在配置点中应包含 $\varphi=\pi/2$ 点. 但是, 细致考察代数方程组 (3.3) 及 (3.8) 发现, 如取 $\varphi=0, \pi$ 或 $\varphi=\pi/2$ 为配置点, 系数矩阵有奇性, 为了避免这一点, 我们用其邻近点 $\varphi=\delta, \pi-\delta$ 和 $\varphi=\pi/2\pm\delta$ 代替它们, 这里取 $\delta=0.01^\circ$.

从结果数据表 1 中可看出, 用分段等强度分布, 当短长轴比 $a/b>0.5$ 时, 算出的阻力系数与精确解可有四位以上有效数重合; 但当 $a/b=0.5$ 时, 其结果就开始变坏了. 如果用分段二次连续分布, 它的有效范围可提高到 $a/b\geq 0.2$. 用这两种方法所得到的表面压力分布与精确解符合得也很好, 例如, 当 $a/b=0.7$ 时, 分别为四位和五位有效数重合.

与文[9]中的离散分布相比, 本文的连续分布法不但在精度上有所提高, 而且所需的配置

表 1 扁球的阻力系数和压力分布

分段等强度分布 $N=2$				分段二次连续分布 $N=2$			
M	3	5	精确解	M	1	2	精确解
MN	6	10		$(2M+1)N$	6	10	
$a/b=0.9$	0.98013		0.98013	$a/b=0.9$	0.98013	0.98013	0.98013
$a/b=0.8$	0.96058		0.96058	$a/b=0.8$	0.96058	0.96058	0.96058
$a/b=0.7$	0.94146	0.94147	0.94147	$a/b=0.7$	0.94147	0.94147	0.94147
$a/b=0.6$	0.92294	0.92299	0.92297	$a/b=0.6$	0.92298	0.92297	0.92297
$a/b=0.5$	0.90563	0.90541	0.90531	$a/b=0.5$	0.90538	0.90531	0.90531
				$a/b=0.4$	0.88916	0.88881	0.88881
				$a/b=0.3$	0.8749	0.8740	0.8740
				$a/b=0.2$	0.8586	0.8614	0.8614

$a/b=0.7$

等强度分布: $M=5 N=2$ 二次连续分布: $M=2 N=2$

I	$R(I)$	$z(I)$	p (等强度)	p (二次)	p (精确)
1	3.4982	0.0004	-0.00014	-0.00014	-0.00014
2	3.4451	0.4252	-0.13872	-0.13871	-0.13871
3	3.2873	0.8375	-0.25117	-0.25119	-0.25119
4	3.0296	1.2244	-0.32689	-0.32687	-0.32687
5	2.6798	1.5740	-0.37030	-0.37031	-0.37031
6	2.2486	1.8759	-0.39180	-0.39180	-0.39180
7	1.7491	2.1207	-0.40068	-0.40069	-0.40069
8	1.1965	3.3011	-0.40341	-0.40341	-0.40341
9	0.6075	2.4116	-0.40401	-0.40401	-0.40401
10	0.0006	2.4488	-0.40366	-0.40369	-0.40369

点数大为减少, 尤其是对短长轴比较小的情况效果尤为显著. 这便大大地减少了计算量, 但在适用范围上此法仍有限制, 即使对其中较好的二次连续分布法也只能算到 $a/b=0.2$, 不象文[6]中对长球那样一致有效. 其原因可能是由于在 θ 方向用数值积分的误差所引起的, 也可能由于短长轴比较小时, 扁球的边缘 (即 $\theta=\pi/2$ 处) 附近, 物体的形状较凸出, 这可能引起流场产生较剧烈的变化, 使现有的控制点掌握不住. 所以, 算出的局部结果在 $a/b<0.2$ 时与精确解相差较大. 而且 $\theta=\pi/2$ 附近局部区域的面积比长球情形来说要大, 导致扁球的计算结果要比长球情形稍差些.

五、卡西尼卵形体的绕流问题

为了说明这两种方法能适用于任意扁轴对称体，我们选取卡西尼卵形体作为一个算例。卡西尼卵形体有全凸和凹陷两种，可用来进一步检验方法的适用性。

扁卡西尼卵形体的极坐标方程为：

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\phi + \sqrt{a^4 - c^4} \sin^2 2\phi \quad (c > 0, a > c) \quad (5.1)$$

其中 ρ , ϕ 为极坐标系中的矢径和极角， c 是焦距，我们取 c 为变化参数，当 c 越大时，物体的凹陷程度也就越厉害。

奇点分布区域仍取作以 c 为半径的中心圆盘上，我们区分焦点 C 到端点 A 的距离 $AC < OB = \sqrt{a^2 - c^2}$ 和 $AC > OB$ 两种情况。取 AC 和 OB 中较小的一个作为特征长度。关于奇点环的划分和配置点的选取，我们采用与椭球相同的等分法，为了避免系数矩阵的奇异性，仍用 $\varphi = \delta$, $\pi - \delta$ 和 $\varphi = \pi/2 \pm \delta$ 代替 $\varphi = 0$, π 和 $\varphi = \pi/2$ 。 ($\delta = 0.01^\circ$)

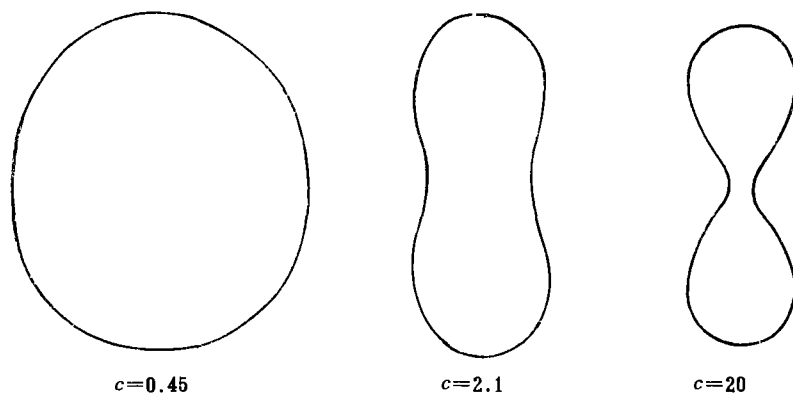


图 2

采用分段等强度和分段二次分布分别计算了 $c=0.45, 1.5, 2.1$ 三种情况 (图2)，用分段二次连续分布法又计算了 $c=5, 20$ 两种凹陷较深的情形 [见表2]，它们的阻力系数基本上都收敛到四位有效数字，与文 [9] 中的结果相比较，它们基本上是一致的，这说明结果可信。此外，我们还计算了物面上的压力分布，并将 $c=1.5$ 的结果列在表 2 中。

表 2

卡西尼卵形体的阻力系数和压力分布

分段等强度分布 $N=2$			分段二次连续分布 $N=2$			等强度: $M=5, N=2$; 二次: $M=2, N=2; c=1.5$				
M	3	5	M	2	3	I	$RN(I)$	$zN(I)$	p (等强度)	p (二次)
MN	6	10	$(2M+1)N$	10	14					
$c=0.45$	0.9822	0.9822	$c=0.45$	0.9822	0.9822	1	2.5000	0.0004	-0.0003	-0.0003
$c=1.5$	0.9330	0.9330	$c=1.5$	0.9330	0.9330	2	2.4202	0.4267	-0.2840	-0.2840
$c=2.1$	0.9188	0.9187	$c=2.1$	0.9186	0.9186	3	2.1943	0.7987	-0.4950	-0.4950
			$c=5$	0.9123	0.9123	4	1.8611	1.0745	-0.5990	-0.5990
			$c=20$	0.9108	0.9109	5	1.4777	1.2399	-0.6141	-0.6141
						6	1.1021	1.3134	-0.5873	-0.5872
						7	0.7695	1.3333	-0.5556	-0.5556
						8	0.4844	1.3301	-0.5335	-0.5334
						9	0.2337	1.3253	-0.5214	-0.5213
						10	0.0002	1.3229	-0.5175	-0.5176

六、红细胞体的绕流问题

在正常生理条件下,红细胞是一个扁轴对称体,它的厚度与向径的关系为(参看Y. C. Fung的文[12])

$$D(r) = \left(1 - \frac{r}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left[C_0 + C_2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 + C_4 \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 \right] \quad (6.1)$$

其中 R_0 是它的半径(图3)。

取 $r=0$ 时的厚度的一半 $C_0/2$ 为特征长度,奇点分布在以 $R_0 - C_0/2$ 为半径的中

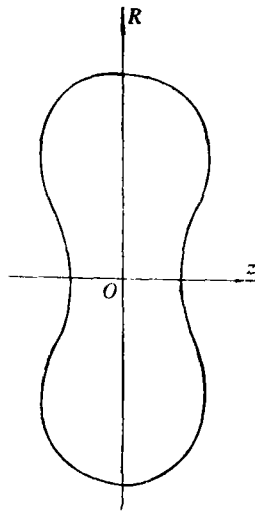


图 3

表 3 红细胞体的阻力系数和压力分布

N=3			
M	(2M+1)N	λ	
1	9	0.921	
2	15	0.921	
		M=2	N=3
I	RN(I)	zN(I)	p (二次)
1	3.6190	0.0034	-0.0019
2	3.5963	0.2204	-0.1188
3	3.5283	0.4508	-0.2253
4	3.4160	0.6946	-0.2825
5	3.2606	0.9441	-0.2963
6	3.0643	1.1809	-0.3461
7	2.8294	1.3790	-0.4243
8	2.5590	1.5127	-0.4810
9	2.2564	1.5644	-0.4921
10	1.9255	1.5312	-0.4515
11	1.5702	1.4282	-0.4273
12	1.1953	1.2856	-0.4129
13	0.4052	1.0883	-0.4081

心圆盘上。这里采用的是二次连续分布法, $C_2=7.2188$, $C_4=-5.3217$ 。配置点的取法类似于等分极角法

$$R_i = R_0 \cos \varphi_i, \quad z_i = 0.5D(R_i), \quad \theta_i = \frac{i-1}{[(2M+1)N-1]} \quad (i=1, \dots, (2M+1)N) \quad (6.2)$$

仍用 $\varphi = \delta$, $\varphi = \pi/2 - \delta$ 代替 $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ 。这里 $\delta = 0.1^\circ$ 。

计算结果列在表3中,阻力系数可以收敛到三位有效数字,它与形状差不多的卡西尼卵形体的阻力系数相差不大。此外,表3同时列出了红细胞表面上的压力分布。

参 考 文 献

- [1] Chwang, A. T. and T. Y. T. Wu, Hydromechanics of low-Reynolds-number flow, Part 2, Singularity method for Stokes flows, *J. Fluid Mech.*, 67 (1975), 787-815.
- [2] Gluckman, M. J., S. Weinbaum and R. Pfeffer, Axisymmetric slow viscous flow past an arbitrary convex body of revolution, *J. Fluid Mech.*, 55 (1972), 677-709.
- [3] Youngren, G. K. and A. Acrivos, Stokes flow past a particle of arbitrary shape, A

- numerical method of solution, *J. Fluid Mech.*, **69** (1975), 377—403.
- [4] Weinbaum, S., *Lectures on Mathematics in the Life Sciences* (1981), 114.
- [5] Smith, A. M. O. and J. L. Hess, *Prog. Aero. Sic.* (1966), 8.
- [6] 吴望一, 解任意形状非细长轴对称体 Stokes 流动的一种新方法, *中国科学, A 辑*, **2** (1984).
- [7] 吴望一、王少华, Stokes 流动中连续奇点线分布法的分段抛物近似, *力学学报*, **5** (1984).
- [8] 吴望一、何青, 蠕动流中连续奇点线分布法的分段线性近似, *应用数学和力学*, **5, 6** (1984), 793—800.
- [9] 吴望一、朱敏, 解任意形状扁轴对称体的环形奇点分布法. (待发表)
- [10] Sampson, R. A., On Stokes current-function, *Phil. Trans. R. Soc A*, **182** (1891), 449.
- [11] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall (1965).
- [12] Fung, Y. C., *Biomechanics*, Springer-Verlag, New York Inc. (1981).

The Method of Continuous Distribution of Singularities to Treat the Stokes Flow of the Arbitrary Oblate Axisymmetrical Body

Zhu Min Wu Wang-yi

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

This paper deals with the Stokes flow of the arbitrary oblate axisymmetrical body by means of constant density and quadratic distribution function approximation for the method of continuous distribution of singularities. The Sampson spherical infinite series are chosen as fundamental singularities. The convergence, accuracy and the range of application of both two approximations are examined by the unbounded Stokes flow past the oblate spheroid. It is demonstrated that the drag factor and pressure distribution both conform with the exact solution very well. Besides, the properties, accuracy and the range of application are getting better with improving of the approximation of the distribution function. As an example of the arbitrary oblate axisymmetrical bodies, the Stokes flow of the oblate Cassini oval are calculated by these two methods and the results are convergent and consistent. Finally, with quadratic distribution approximation the red blood cell is considered and for the first time the corresponding drag factor and pressure distribution on the surface of the cell are obtained.