应用数学和力学，第6卷第10期（1985年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

薄壳理论中的Schrödinger方程*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1984年11月30日收到）

摘　　要

本文是文[50]和[51]的继续．在本文中：

（1） 将常曲率弹性薄壳的小挠度问题的 Love-Kirchhoff 方程化归为 Schrödinger 方程的求解，并特别指出了它在轴对称问题中的形式；

（2） 作为小挠度的例子，求得了等厚度球形薄壳在中面力和轴对称外场联合作用下的振动问题的通解，其中的轴对称外场与文[50]不同，它现在是空间位置的函数，而不再是时间的函数；

（3） 将扁壳大挠度问题的 von Kármán-Власов 方程化归为 AKNS 方程的形式，其一维问题成为简单的 Schrödinger 方程的本征值问题，从而使非线性问题成为可解的线性问题．

一、前　　言

在文[49]中，我们从弹性动力学的通解[48]出发，将线弹理论中的基本方程化归为Dirac方程的求解；在文[50]和[51]中，我们业已证明，弹性薄板的小挠度问题和大挠度问题，都可以归结为量子理论中 Schrödinger 方程的本征值问题．本文是文[50]和[51]的继续，在本文中我们将证明，弹性薄壳的小挠度问题抑或大挠度问题，同样可以归结为 Schrödinger 方程的本征值问题．

壳体理论的发展历史，在文[38]、[57]、[58]、[59]和[62]中有详尽的介绍和评述．薄壳的小挠度理论，可以追溯到 A. E. H. Love 和 G. R. Kirchhoff，甚至可以从 L. Euler, J. Bernoulli 和 B. de St. Venant 的论文中找到它的雏形．现代壳体理论的创始人是 Th. von Kármán，钱学森[24]和钱伟长等人．钱伟长先生是首先应用张量工具于壳体，并给出各类壳体微分方程以统一形式（板壳的内禀统一理论)的第一个人[55][4]．文[55]的前半部分是 J. L. Synge 教授的成果，而后半部分则完全是钱先生的研究成果．他们的论文载于《Th. von Kármán 纪念文集》中[56]．（内中有一篇 A. Einstein 的论文）钱先生提出的那组非线性微分方程，被国际上称作“钱伟长方程”．他的开创性工作至今仍被誉为是“划时代的工作”．

迄今为止，力学工作者在薄壳的理论和应用方面，已作了大量值得称道的工作．本文参考文献中所列的论文，就是其中的一部分，当然是主要的一部分．其中流芳百世的工作，属于钱伟长[4~14]、[55]，von Kármán，钱学森[24]、[61]、[68]，Reissner[39-45]，Timoshenko[58]、[59]

---

* 钱伟长推荐．

和 Власов[72]。今年年初，钱伟长先生还发表了两篇有关柱壳的论文[13~14]。

薄壳问题同薄板问题一样，都存在非线性跳跃现象[62]。在文[51]中我们曾经指出，文[36]认为，非线性的弹性系统从一个平衡状态跳越到另一个平衡状态，可以与量子力学中能量跃迁相比拟。为了定量地研究这种非线性跳跃，引入 Schrödinger 方程是完全必要的。

在文[50]、[51]和本文中，我们在引入 Schrödinger 方程的同时，我们还引入了旋量及其运算[15]、[18]、[63]。这不仅是为了提高解题的精确性，而且可以作为方法论提出来。

文[56]认为，Schrödinger 方程是有着广泛适用范围的重要方程，它是自然界中为数不多的基本方程之一。本文将常用的一些薄壳问题的基本方程纳入 Schrödinger 方程的范畴，不仅使非线性问题变得易于解决，而且使自然界显得更加和谐，使描述自然现象的语言变得更加简单。

由于本文以此为宗旨，因而我们避烦就简仅讨论常曲率、等厚度和等刚度的弹性薄壳问题。其他较复杂的问题，可以用修正本文的结果来得到。另一方面，从根本上来讲，弹性壳体的基本方程本身也是近似的，所谓"精确解"只有相对的意义，故而对实际工程问题而言，只要曲率、厚度和刚度在小幅度内渐变，本文得到的结论又是足够精确的。

本文同前几篇文章[49~52]一样，在需要引入的时候，都假定所有力学量均已解析延拓到复平面上，并且已定义为 Helbert 空间中的多维矢量。

二、常曲率薄壳小挠度问题的Schrödinger方程

小挠度弹性薄壳的基本方程可以归纳为 Love-Kirchhoff 的形式[30]、[38]、[58,59]、[62]、[72]：

$$D\nabla^4 W-\nabla_k^2 F+N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=Q \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 F+\nabla_k^2 W=0 \tag{2.2}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \nabla_k^2=k_y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_x\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

而k_x，k_y表示 x 方向和 y 方向的初曲率，D 为抗弯刚度，E 为 Young 模量，h 为壳厚，Q 为侧向载荷，W为挠度，F为应力函数。在动力学问题（即振动问题）中，

$$Q=-\frac{\rho h}{g}\partial_t\partial_t W \tag{2.4}$$

式中ρ为介质密度，g 为重力加速度。

取简单情况，当壳体中面力是沿边界切向的均布压力T 所引起时，方程（2.1）式成为

$$D\nabla^4 W-\nabla_k^2 F+T\nabla^2 W=Q \tag{2.5}$$

将（2.4）式代入（2.5）式，得到薄壳小挠度振动问题的基本方程如下：

$$\left(\frac{\rho h}{g}\partial_t\partial_t+D\nabla^2\nabla^2+T\nabla^2\right)W=\nabla_k^2 F,\quad \frac{1}{Eh}\nabla^4 F+\nabla_k^2 W=0 \tag{2.6}$$

方程（2.2）式还可以写成

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{Eh}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+k_y W\right]+\frac{2}{Eh}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{Eh}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+k_x W\right]=0 \tag{2.7}$$

若规范

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-Ehk_yW,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-Ehk_xW,\ \frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}=0 \tag{2.8}$$

则（2.7）式恒满足。将（2.8）式代入（2.6）式，可以得到关于挠度W的线性方程

$$(\partial_t\partial_t+\xi^2\nabla^2\nabla^2+\eta^2\nabla^2+\zeta^2)W=0 \tag{2.9}$$

式中

$$\xi^2=\frac{Dg}{\rho h},\ \eta^2=\frac{Tg}{\rho h},\ \zeta^2=\frac{Eg}{\rho}(k_x^2+k_y^2) \tag{2.10}$$

方程（2.9）式的色散关系为

$$\omega^2=\xi^2k^4-\eta^2k^2+\zeta^2 \tag{2.11}$$

它与弹性基上的薄板在侧向动载荷和中面力联合作用下的小挠度问题[50]相同。

与文[50]相同，我们引入 Flügge 标准矩阵[18]、[63]

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\ \gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\\ \gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix},\ \gamma_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \tag{2.12}$$

同时，使挠度W定义为 Hilbert 空间中的一个四维矢量：

$$W=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4)^T \tag{2.13}$$

就可以用新方程组

$$[\gamma_4\partial_t-i(-\xi\gamma_3\nabla^2+\eta\gamma_\kappa\partial_\kappa+\zeta)]\psi=0 \tag{2.14}$$

来代替原方程（2.9）式了，（式中$\kappa=1,2$）。重复指标按 Einstein 约定求和。

（2.12）式中，

$$\gamma_1=\sigma_2\otimes\sigma_1,\ \gamma_2=\sigma_2\otimes\sigma_2,\ \gamma_3=\sigma_2\otimes\sigma_3,\ \gamma_4=\sigma_3\otimes\sigma_4 \tag{2.15}$$

其中符号$\otimes$表示直积（Krönecker 积），而$\sigma_\kappa(\kappa=1,2,3)$为 Pauli 矩阵，$\sigma_4$为$2\times2$单位矩阵。

一般来说，当有标量外场势函数B和矢量外场势函数$A_\kappa(\kappa=1,2)$存在时，用经典规则，对应于方程组（2.14）式的推广的方程组应为

$$[\gamma_4\partial_t-i\gamma_3(-\xi\nabla^2+B)-i\gamma_\kappa(\eta\partial_\kappa+iA_\kappa)-i\zeta]\psi=0 \tag{2.16}$$

式中$B(x_i,t)$，$A_\kappa(x_i,t)$为外场的频率算符，具有频率的量纲，$i=1,2$。

方程组（2.14）式与方程（2.9）式在没有其他外场作用下是等效的；二者的区别仅在于所给初始条件和边值条件的方式不同。但在有外场作用时，这种等效性便不复存在。在解决诸如波谱分裂之类的问题时，方程组（2.16）式的优越性是显而易见的。

对方程组（2.16）式等号左右两端同时左乘$\gamma_4=\sigma_3\otimes\sigma_4$，则（2.16）式成为

$$[\partial_t+\sigma_1\otimes\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\sigma_1\otimes\sigma_\kappa(\eta\partial_\kappa+iA_\kappa)-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta]\psi=0\qquad(\kappa=1,2) \tag{2.17}$$

方程（2.17）式可以写成 Schrödinger 方程的形式：

$$i\partial_t\psi=\hat{\Omega}\psi \tag{2.18}$$

式中$\hat{\Omega}$为总频率算符：

$$\hat{\Omega}=-i[\sigma_1\otimes\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\sigma_1\otimes\sigma_\kappa(\eta\partial_\kappa+iA_\kappa)-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta] \tag{2.19}$$

现在我们来考虑轴对称问题，并且没有矢量外场势函数 A_κ：

$$A_\kappa=0 \quad (\kappa=1,2);\ x=x_1=r\cos\varphi,\ y=x_2=r\sin\varphi \tag{2.20}$$

经过简单运算，可求得

$$\hat{\Omega}=-i\left[\sigma_1\otimes\sigma_3\left(-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B\right)+\eta\gamma_r\frac{\partial}{\partial r}-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta\right] \tag{2.21}$$

式中 γ_r 原为

$$\gamma_r=\begin{pmatrix}0&0&0&e^{-i\varphi}\\0&0&e^{i\varphi}&0\\0&e^{-i\varphi}&0&0\\e^{i\varphi}&0&0&0\end{pmatrix} \tag{2.22}$$

由于轴对称问题中W与幅角 φ 无关，因此 γ_r 中的 φ 可取任意值，我们取 $\varphi=0$，得

$$\gamma_r=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\sigma_1\otimes\sigma_1 \tag{2.23}$$

从而，在轴对称问题中，总频率算符为

$$\hat{\Omega}=-i\left[\sigma_1\otimes\sigma_3\left(-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B\right)+\eta\sigma_1\otimes\sigma_1\frac{\partial}{\partial r}-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta\right] \tag{2.24}$$

下面，我们将给出方程（2.17）式在轴对称问题中的通解.

三、等厚度球形薄壳在中面力和轴对称外场联合作用下的小挠度振动

由上可知，球形薄壳在中面力和轴对称外场联合作用下的振动方程为

$$\left\{\partial_t+\sigma_1\otimes\sigma_3\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B\right]+\eta\sigma_1\otimes\sigma_1\frac{\partial}{\partial r}-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta\right\}\psi=0 \tag{3.1}$$

在文[50]中我们曾经处理过外场与时间 t 成正比和反比的问题，这里我们要处理外场与空间位置 r 成比例的问题.

设
$$\psi=\sum_\omega\psi_\omega=\sum_\omega A_\omega(r)e^{i\omega t} \tag{3.2}$$

式中ω为圆频率，r 为半径. 由于方程（3.1）式是关于 ψ 的线性方程，可以先对某一频率 ω 求解然后迭加，因而暂时可以略去角标 ω. 将（3.2）式代入（3.1）式，得

$$\left\{\sigma_1\otimes\sigma_3\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B\right]+\eta\sigma_1\otimes\sigma_1\frac{\partial}{\partial r}+i(\omega-\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta)\right\}A=0 \tag{3.3}$$

将（3.3）式等号左右两端同时左乘$\sigma_1\otimes\sigma_3$，得

$$\left\{\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B\right]+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_2\frac{\partial}{\partial r}+i(\sigma_1\otimes\sigma_3\omega-i\sigma_2\otimes\sigma_3\zeta)\right\}A=0 \tag{3.4}$$

令
$$A=\phi c \tag{3.5}$$

其中ϕ为函数矩阵，c 为常数矢量：

$$c=(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)^T$$

$$\phi=\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

式中$c_\mu(\mu=1,2,,3,4)$为待定函数．矩阵ϕ的选择，必须使（3.4）式成为

$$\left[\phi^{-1}\left\{\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B\right]+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_2\frac{\partial}{\partial r}\right\}\phi+i\sigma_1\otimes\sigma_3\omega+\sigma_2\otimes\sigma_3\zeta\right]c=0 \tag{3.7}$$

即
$$\sigma_1\otimes\sigma_3\phi=\phi\sigma_1\otimes\sigma_3,\quad \sigma_2\otimes\sigma_3\phi=\phi\sigma_2\otimes\sigma_3 \tag{3.8}$$

略经计算，便可知满足方程（3.8）式的ϕ必须具有形式

$$\phi=\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_3 & 0 & 0 \\ \phi_4 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & -\phi_3 \\ 0 & 0 & -\phi_4 & \phi_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

另外，方程（3.7）式成立的充分条件是

$$\phi^{-1}\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+B+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_2\frac{\partial}{\partial r}\right]\phi=N \tag{3.10}$$

式中N为某一个 4×4 常数矩阵．由（3.10）式，方程（3.7）式可以分解为如下两组方程：

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_2\frac{\partial}{\partial r}+B\right]\phi c=\phi Nc \tag{3.11}$$

及
$$[N+i\sigma_1\otimes\sigma_3\omega+\sigma_2\otimes\sigma_3\zeta]c=0 \tag{3.12}$$

常数矩阵N不是任取的，它必须使

$$\det[N+i\sigma_1\otimes\sigma_3\omega+\sigma_2\otimes\sigma_3\zeta]=0 \tag{3.13}$$

否则$c=0$是没有意义的平凡解；再者它又必须使方程组（3.11）式相容．研究表明，N的最简单形式是

$$N=\lambda\sigma_4\otimes\sigma_4 \tag{3.14}$$

不难验证

$$\phi(\lambda\sigma_4\otimes\sigma_4)=\lambda\sigma_4\otimes\sigma_4\phi \tag{3.15}$$

从而（3.11）式成为

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_2\frac{\partial}{\partial r}+B\right]A=NA$$

即
$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_2\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]A=0 \tag{3.16}$$

这时，将（3.14）式代入（3.13）式，有

$$\det[\lambda\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_1\otimes\sigma_3\omega+\sigma_2\otimes\sigma_3\zeta]=0 \tag{3.17}$$

从中决定λ的取值：

$$\lambda=\pm\lambda_0,\quad \lambda_0=(\zeta^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

由（3.14）式和（3.18）式，可得方程（3.12）式的解为

$$c_3=-\frac{i(\omega+\zeta)}{\lambda}c_1,\quad c_2=\frac{i(\omega-\zeta)}{\lambda}c_4 \tag{3.19}$$

而且c系数之间有下列关系：

$$c_2c_3=-c_1c_4 \tag{3.20}$$

而从 c 矢量的独立分量只有两个。

引入变换

$$A=\beta u \tag{3.21}$$

式中 u 是四维函数列矢量，而

$$\beta=(\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_3\otimes\sigma_1) \tag{3.22}$$

将 (3.21) 式和 (3.22) 式代入方程 (3.16) 式，并且在方程两边同时左乘

$$\beta^{-1}=\frac{1}{2}(\sigma_4\otimes\sigma_4-i\sigma_3\otimes\sigma_1) \tag{3.23}$$

利用关系

$$\beta^{-1}\sigma_4\otimes\sigma_2\beta=\sigma_3\otimes\sigma_3 \tag{3.24}$$

就可以达到分离矩阵方程 (3.16) 式的目的。这时，u_1 和 u_4 满足方程

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]u=0 \tag{3.25}$$

而 u_2 和 u_3 满足 (3.25) 式的共轭方程

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-i\eta\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]u^*=0 \tag{3.26}$$

如果方程

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]f=0 \tag{3.27}$$

已经解出，并且其解为 f_1 和 f_2，同时 (3.26) 式的解为 f_1^* 和 f_2^*，则 u 的解可表为

$$\left.\begin{aligned}&u_1=b_1(f_1+\alpha_1f_2)=b_1f_1',\ u_2=b_2(f_1^*+\alpha_2f_2^*)=b_2f_2'\\&u_3=b_3(f_1^*+\alpha_3f_2^*)=b_3f_3',\ u_4=b_4(f_1+\alpha_4f_2)=b_4f_4'\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

其中 b_μ 和 $\alpha_\mu\,(\mu=1,2,3,4)$ 可以由 (3.5) 式和 (3.21) 式联立确定:

$$A=\phi c=\beta u$$

即

$$\begin{pmatrix}\phi_1&\phi_3&0&0\\\phi_4&\phi_2&0&0\\0&0&\phi_1&-\phi_3\\0&0&-\phi_4&\phi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1'&if_2'&0&0\\if_1'&f_2'&0&0\\0&0&f_4'&-if_3'\\0&0&-if_4'&f_3'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ib_4\\ib_3\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

取 $c_1=b_1$，$c_2=b_2$，$c_3=ib_4$，$c_4=ib_3$，比较上式，应有

$$\phi_1=-i\phi_4=f_1'=f_4',\ \phi_2=-i\phi_3=f_2'=f_3' \tag{3.30}$$

将 (3.30) 式代入 (3.28) 式，可得

$$\alpha_1=\alpha_4,\ \ \alpha_2=\alpha_3;\ \ \phi_1=f_1+\alpha_1f_2,\ \ \phi_2=f_1^*+\alpha_2f_2^* \tag{3.31}$$

可以证明[69]，α_1 和 α_2 不是独立的，而应是

$$\alpha_1=\alpha,\qquad \alpha_2=\alpha_1^*=\alpha^* \tag{3.32}$$

为此，可令

$$A=c\phi \tag{3.33}$$

式中 c 为常数矩阵，而 ϕ 为函数矢量，即

$$\phi=(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_2,\ \phi_1)^T,\qquad c=\begin{pmatrix}c_1&ic_2&0&0\\ic_1&c_2&0&0\\0&0&-ic_4&c_3\\0&0&c_4&-ic_3\end{pmatrix} \tag{3.34}$$

而

$$c^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & -i\frac{1}{c_1} & 0 & 0 \\ -i\frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{1}{c_4} & \frac{1}{c_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3} & i\frac{1}{c_3} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

将（3.33）式和（3.34）式代入方程（3.16）式，并在方程两边同时左乘 c^{-1}，得

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\sigma_4\otimes\sigma_3\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]\phi=0 \tag{3.36}$$

此方程可以分离成下面两个共轭方程

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]\phi_1=0$$

和

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-i\eta\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]\phi_2=0 \tag{3.37}$$

或者将 ϕ_1 和 ϕ_2 的角标互换一下所得到的另一组共轭方程。由（3.37）式可以显而易见：

$$\phi_2=\phi_1^* \tag{3.38}$$

从而可以得到（3.32）式。最方便的是取

$$\alpha=ia \tag{3.39}$$

这时我们有

$$\phi_1=f_1+iaf_2,\qquad \phi_2=f_1^*-iaf_2^* \tag{3.40}$$

在求解方程（2.9）式的轴对称问题时，应给出两个初始条件和四个边界条件。一共是六个初、边值条件。在现在的解中，只有六个待定参数，即有两重值的 c_1，c_4，以及 ω 和 a。这与原方程的初、边值条件的个数相等。

最后的解可写为：

$$\left.\begin{aligned} &\psi=\sum_{\omega}A_\omega(r)e^{i\omega t},\qquad A_\omega(r)=\phi c \\ &\phi=\begin{pmatrix} \phi_1 & i\phi_2 & 0 & 0 \\ i\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & -i\phi_2 \\ 0 & 0 & -i\phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\ &\phi_1=f_1+iaf_2,\ \phi_2=f_1^*-iaf_2^*,\qquad c_3=-\frac{i(\omega+\zeta)}{\lambda}c_1 \\ &c_2=\frac{i(\omega-\zeta)}{\lambda}c_4,\qquad \lambda=\pm\lambda_0,\qquad \lambda_0=(\zeta^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

而 f_1 和 f_2 为下列方程的解

$$\left[-\xi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i\eta\frac{\partial}{\partial r}+B-\lambda\right]f=0 \tag{3.42}$$

从而现在的问题变为求解方程（3.42）式。需要指出的是，当$B(r)$与r成反比，或与r^2成反比的时候，（3.42）式的解为合流超越函数或Bessel函数[17]。因为此时（3.42）式可化为具有这种解的标准形式：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(a+\frac{b}{x}\right)\frac{d}{dx}+\left(\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)\right]y=0 \tag{3.43}$$

其中，当$B(r)$与r成反比时，（3.42）式的解又可为Kummer函数[28]，因为此时（3.42）式可化为具有这种解的标准形式：

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2}+(c-x)\frac{d}{dx}-a\right]y=0 \tag{3.44}$$

而当$B(r)$与r成正比时，通过变换$x=1/r$，（3.42）式的解仍可成为合流超越函数。因为此时（3.42）式可化为具有这种解的标准形式：

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2}+(ax^\rho+b)x\frac{d}{dx}+(\alpha x^{2\rho}+\beta x^\rho+\gamma)\right]y=0 \qquad (\rho=-1) \tag{3.45}$$

在求解Schrödinger方程（3.1）式时，有时候可利用Airy函数乘积的积分[32]、[71]。

四、扁壳大挠度问题的Schrödinger方程

在1949年出版的B. З. Власов的著作[72]中，作者将弹性薄板中大挠度问题的von Kármán方程推广到扁壳大挠度问题中，得到所谓von Kármán–Власов方程：

$$D\nabla^4W-\nabla_k^2F-Q=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2} \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4F+\nabla_k^2W=\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right] \tag{4.2}$$

式中
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\qquad \nabla_k^2=k_y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_x\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4.3}$$

而k_x，k_y，D，E，h，Q，W和F的意义与弹性薄壳的小挠度问题相同。

Власов列出的平衡方程建立在变形是局部的假设基础上[62]。换言之，所考虑的那部分壳体可以认为是扁平的。因此，在求解上述大挠度非线性方程组的时候，我们可以认为Gauss曲率K等于零[72]：

$$K=k_xk_y=0 \tag{4.4}$$

零Gauss曲率的假设，对柱形和锥形曲面的壳体是严格正确的，而对诸如球形壳体则在球半径相当大时是近似正确的。对“扁壳”而言，我们可以认为（4.4）式为真。

在常曲率条件下，设

$$W=W'-\frac{1}{2}(k_xx^2+k_yy^2) \tag{4.5}$$

并仍用W表示W'，有

$$D\nabla^4W=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+Q \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4F=\left[\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right]-k_xk_y \tag{4.7}$$

由于条件（4.4）式，可以认为（4.7）式与下式相当：

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 F=\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] \tag{4.8}$$

(4.6) 式和 (4.8) 式是我们考虑问题的出发点。它们在形式上与弹性薄板大挠度问题的von Kármán 方程相同，因而可以采用相同的方法来处理[51]。

我们设

$$F=D\phi,\quad W=\sqrt{\frac{2D}{Eh}}\,w,\quad Q=D\sqrt{\frac{2D}{Eh}}\,q \tag{4.9}$$

则 (4.6) 式和 (4.8) 式可以无量纲化为：

$$\nabla^4 w=\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]+q \tag{4.10}$$

$$\nabla^2\phi=2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] \tag{4.11}$$

方程 (4.11) 式还可以写成如下形式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=0 \tag{4.12}$$

若规范 $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{4.13}$$

则 (4.11) 式恒满足。将 (4.13) 式代入 (4.10) 式，可以得到关于挠度 w 的非线性方程

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{1}{2}\nabla w\cdot\nabla[\nabla w\cdot\nabla w]+q \tag{4.14}$$

暂不考虑侧向载荷 q，而令

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sqrt{6}\,p,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\sqrt{6}\,s,\qquad y\to iy \tag{4.15}$$

则 (4.14) 式可以写为

$$p_{,xxx}+s_{,yyy}-p_{,xyy}-s_{,xxy}=6[p^2p_{,x}+s^2s_{,y}-ps(p_{,y}+s_{,x})] \tag{4.16}$$

(4.16) 式要成立的充分条件为

$$p_{,xxx}-p_{,xyy}=6(p^2p_{,x}-psp_{,y}) \tag{4.17a}$$

和 $$s_{,yyy}-s_{,xxy}=6(s^2s_{,y}-pss_{,x}) \tag{4.17b}$$

(一) 第一种情况，一维问题

对一维问题而言，(4.17) 式化为

$$-6p^2p_{,x}+p_{,xxx}=0 \tag{4.18}$$

作 Miura 变换[34] (其反问题为 Riccati 方程)：

$$u=p^2+p_{,x} \tag{4.19}$$

则方程 (4.18) 式化为

$$-6u\,u_{,x}+u_{,xxx}=0 \tag{4.20}$$

方程 (4.20) 式有特解

$$u=\frac{2}{x^2} \tag{4.21}$$

由 (4.21) 式得到 u 的特解后，使方程 (4.19) 式成为 Riccati 方程。通过常用的Cole-

Hopf 变换

$$p=\frac{\psi_{,x}}{\psi} \tag{4.22}$$

可将 Riccati 方程（4.19）式化为

$$\psi_{,xx}-u\psi=0 \tag{4.23}$$

式中，u 为方程（4.20）式的解，即（4.21）式。

方程（4.20）与 KdV方程一样都具有 Galilei 不变性

$$u\to u-\lambda, \qquad x\to x+6\lambda t \tag{4.24}$$

由此，方程（4.23）式可推广为

$$-\psi_{,xx}+u\psi=\lambda\psi \tag{4.25}$$

此方程正好是将 u 作为势的关于 ψ 的 Schrödinger 方程。λ 为 Schrödinger 方程的本征值。

如果一维拱带的大挠度问题存在外场（这外场可以是侧向载荷），外场的势用 $U(x)$ 来表示，则在使用经典规则后，方程（4.25）式可推广为

$$(-\nabla^2+U+u)\psi=\lambda\psi \tag{4.26}$$

式中，u 可以理解为大挠度拱带的内能，U为外场的势能，$-i\nabla$ 为动量算符。

（二）第二种情况，一般的二维问题

由文[51]可知，(4.17) 式可以归结为下列 AKNS 方程[1~3],[56] 的求解：

时间发展方程 $\quad i\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi$

本征方程 $\quad L\psi=\zeta\psi \qquad (4.27)$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&L=\begin{pmatrix} i\dfrac{\partial}{\partial z} & -ip \\ ir & -i\dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A\end{pmatrix}, \quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad 2z=x+iy \\
&A=4\zeta^3+2pr\zeta+irp_{,z}-ipr_{,z} \\
&B=4ip\zeta^2-2p_{,z}\zeta+i(2p^2r-p_{,zz}) \\
&C=4ir\zeta^2+2r_{,z}\zeta+i(2pr^2-r_{,zz})
\end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

由方程（4.27）式和（4.28）式，我们可以得到下列方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}-6rpp_{,z}+p_{,zzz}=0, \quad \frac{\partial r}{\partial t}-6rpr_{,z}+r_{,zzz}=0 \tag{4.29}$$

如果我们仅考虑定态问题，并设

$$r=p-i\sqrt{3}\,s, \qquad y\to\sqrt{3}\,y \tag{4.30}$$

则（4.29）式第一式的实部与（4.17）式相同。

如果扁壳的大挠度问题存在外场作用（这外场可以是侧向载荷），外场的势用U^0，U^κ ($\kappa=1,2$) 来表示，则在使用经典规则后，$p_\mu=-i\partial_\mu$ ($\mu=0,1,2$；$\partial_0=\partial_t$) 应改为

$$p^0=-p_0\to D^0=p^0+U^0, \qquad p^\kappa=p_\kappa\to D^\kappa=p^\kappa+U^\kappa \qquad (\kappa=1,2) \tag{4.31}$$

从而，整个问题化为 AKNS 方程的求解。而 AKNS 方程的求解，则有成熟的散射反演方法[19]、[25、26]、[29]、[35]、[37]、[54]、[56] 和 Bäcklund 变换。当然，在采用 Bäcklund 变换之前，必须通过变换

$$\Gamma_1=\psi_2/\psi_1, \qquad \Gamma_2=\psi_1/\psi_2 \tag{4.32}$$

将AKNS 方程（4.27）式变成 Riccati 方程：

$$\Gamma_{1,z}=2i\zeta\Gamma_1+r-p\Gamma_1^2,\ \Gamma_{2,z}=-2i\zeta\Gamma_2+p-r\Gamma_2^2 \tag{4.33a,b}$$

和 $$\Gamma_{1,t}=i(2A\Gamma_1-C+B\Gamma_1^2), \qquad \Gamma_{2,t}=-i(2A\Gamma_2+B-C\Gamma_2^2) \tag{4.34a,b}$$

第一种情况作为特例，包含在第二种情况之内。而弹性薄板作为弹性薄壳的特例，也包含在本文的讨论之内。从而，全部板壳理论的基本方程，都可化归为 AKNS 方程的求解。

第一种情况的算例，可参看文[51]；第二种情况的算例，可参看 Ablowitz，加藤 Lamb，Miura，谷内等人的文章。

至此，我们已将弹塑性力学中的一些重要方程都化归为 Schrödinger 方程乃至 Dirac 方程的求解[47-52]。

参 考 文 献

[1] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, (1) Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lettes.*, 30 (1973), 1262—1264; (2) Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lettes.*, 31 (1973), 125—127.

[2] Ablowitz, M. J. and A. C. Newell, The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Phys.*, 14 (1973), 1277—1284.

[3] Agranovich, Z. S. and V. A. Marchenko, *The Inverse Problem of Scattering Theory*, English translation by B. D. Seckler, Gordon and Breach, New York (1963).

[4] Chien Wei-zang, The intrinsic theory of thin shells and plates; Part I, General theory, *Quart, Appl. Mech.*, 1 (1944), 297—327; Part II, Application to thin plates, ibid, 2 (1944), 43—59; Part III, Application to thin shells, ibid, 2 (1944), 120—135.

[5] Chien Wei-zang, Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, 2 (1947), 102—113.

[6] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，10 (1954)，209—238.

[7] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，《弹性圆薄板大挠度问题》(文集)，中国科学院 (1954).

[8] 钱伟长、郑思樑，轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解，清华大学学报，19，1 (1979)，27—47.

[9] 钱伟长，半圆弧波纹管的计算——细环壳理论的应用，清华大学学报，19，1 (1979)，84—99.

[10] 钱伟长、郑思樑，轴对称圆环壳的一般解，应用数学和力学，1，3 (1980)，287—299.

[11] 钱伟长、郑思樑，半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用，应用数学和力学，2，1 (1981)，97—111.

[12] 钱伟长、樊大钧、黄 黔，环壳理论与直交异性板计算三圆弧波纹膜片上的比较，应用数学和力学，5，1 (1984)，41—48.

[13] 钱伟长，带有环向加强肋的任意截面柱壳理论，上海工业大学学报，1 (1984)，1—30.

[14] 钱伟长，有加强肋的任意闭合截面（椭圆截面）柱壳在均布外压下的渐近解，上海工业大学学报 2 (1984)，1—40.

[15] Dirac, P. A. M.,《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965).

[16] Eckhaus, W. and A. van Harten, *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons*, North-Holland, Amsterdam (1981).

[17] Erdélyi, A.,《高级超越函数》，张致中译，科学技术出版社 (1957).

[18] Flügge, S.,《实用量子力学》，宋孝同等译，人民教育出版社（上册，1981)；（下册，1983).

[19] Gardner, C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving

the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Letters.*, **19** (1967), 1095—1097.

[20] Hilderand, F. B., E. Reissner and G. B. Thomas, Notes on the functions of the theory of small displacements of orthotropic shells, *National Advisory Committee for Aeromantics*, (NACA), Technical Note, №:1833 (1949).

[21] 黄迅成，孤立子及其数学理论，自然杂志，**5** (1982)，738.

[22] Johnson, W. M. and E. Reissner, On transverse vibrations of shallow spherical shells, *Q. Appl. Math.*, **XV**, 4 (1958), 467—480.

[23] Kaplan, A. and Y. C. Fung (冯元桢), A nonlinear theory of beding and buckling of thin elastic shallow spherical shells, *NACA*, TN. №:3213 (1954).

[24] von Kármán, Th. and Tsien Hsue-shen (钱学森), The buckling of spherical shells by external pressure, *J. Aero. Sci.*, **7** (1939), 43.

[25] 加藤祐辅，《散射理论の反演问题》，岩波书店 (1980).

[26] Yusuke, Kato (加藤祐辅), Inverse scattering method for initial value problem of the nonlinear equation of evolution, *Suppl. of the Prog. of Theor. Phys.*, **55** (1974), 247—284.

[27] Kaup, D. J. and A. C. Newell, An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 798—801.

[28] 小谷正雄、橋本英典，《特殊函数》，现代应用数学丛书之一，钱端壮译，上海科学技术出版社 (1962).

[29] Kruskal, M. D., R. M. Miura and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, V. Uniqueness and nonexistence of bolynomial conservation laws, *J. Math. Phys.*, **11** (1970), 952—960.

[30] Washizu, Kyuichiro (鷲津久一郎), *Variational Method in Elasticity and Plasticity*, Pergamon (1968).

[31] Lamb, G. L., On the connection between lossless propagation and pulse profile, *Physica*, **66** (1973), 298--314.

[32] Landau. L. D. (Ландау Л. Д.) and E. M. Lifshitz (E. M. Лифшиц), *A Course in Theoretical Physics*, Vol. **3**, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass (1958). 中译本，《理论物理学教程》，卷三，《量子力学》，严肃译，人民教育出版社 (1980).

[33] Loo Tsu-tao (罗祖道), Effects of large deflections and imperfections on the elastic buckling of cylinders under torsion and axial ompression, *Proc. of the 2-nd U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech.*, New York (1954), 345—357.

[34] Miura, R. M., Korteweg-de Vries equation and generalizations, Ⅰ. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 1202—1204.

[35] Miura, R. M., C. R. Gardner and M. D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalizations, Ⅱ. Existence of conservation lows and constants of motion, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 1204—1209.

[36] Налешкевич Я. (Naleszkiewicz, J.), Квантовые свойства явлений упрутой неустойчивости, *Бюлл. Польск, АН.*, **3**, 2 (1955), 59—72.

[37] Newton, R. G., *Scattering Thory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York (1966).

[38] Новожилов В. В., *Основы Нелимейной Теории Упругости*, Гостехиздат, Москва (1948). 中译本，《非线性弹性力学基础》，科学出版社 (1958).

[39] Reissner, E., A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells, *Am. J. Math.*, **63**, 1, Jan (1941).

[40] Reissner, E., Stresses and small displacements of shallow spherical shells, *J. Math. Phys.*, **25** (1946).

[41] Reissner, E., Transverse vibration of thin shallow elastic shells, *Q. Appl. Math.*, **13** (1955), 169—176.

[42] Reissner, E., On axi-symmetrical vibration of shallow spherical shells, *Q. Appl. Math.*, **13**, 3 (1955), 279—390.

[43] Reissner, E., On vibration of shallow spherical shells, *J. Appl. Phys.*, **17** (1956), 1038—1092.

[44] Reissner, E., On the determination of stresses and displacements for unsymmetrical deformations of shallow spherical shells, *J. Math. Phys.*, **38** (1959).

[45] Reissner, E., The edge effect in symmetric bending of shallow shells of revolution, *Pure. and Appl. Math.*, **12**, 2 (1959), 385.

[46] Reissner, M. E., On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Struc.*, **11**, 5 (1975), 569—573.

[47] 沈惠川，动力应力函数张量，应用数学和力学，**3**，6 (1982)，829—834；动力应力函数张量及弹性静力学的通解，中国科学技术大学学报，**14**，增刊 1，JCUST 84016 (1984)，95—102.

[48] 沈惠川，弹性动力学的通解，自然杂志，**7**，8 (1984)，633—634，其中（5）式中的 c_p/c_s 应为 c_s/c_p，见 7，10 (1984)，756；均匀不可压缩蠕流动力学的通解，自然杂志，**7**，10 (1984)，799，其中（4）式中的 ϕ 应为

$$\phi=-\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial\xi_k}\right),$$ 见 7，12 (1984)，940.

[49] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，**5**，4 (1984)，541—551.

[50] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，**5**，6 (1984)，817—827.

[51] 沈惠川，弹性大挠度问题 von Kármán 方程与量子本征值问题 Schrödinger 方程的关系，应用数学和力学，**6**，8 (1985)，711—723.

[52] 沈惠川，理想塑性问题中的一般方程，双调和方程和本征方程，应用数学和力学（待发表）.

[53] Stricklin, J. A., D. R. Novaratna and T. H. H. Pian (卞学镄), Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, *AIAA J.*, **4**, 11 (1966).

[54] Su, C. H. and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, Ⅲ. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 536—538.

[55] Synge, J. L. and Chien Wei-zang (钱伟长), The intrinsic theory of elastic shells and plates, *Appl. Mech. Th. von Kármán Annivers. Vol.* (1941), 103—120.

[56] 谷内俊弥、西原功修，《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社 (1981).

[57] Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York (1953). 中译本，《材料力学发展史》，常振檝译，上海科学技术出版社 (1961).

[58] Timoshenko, S. P. and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill (1961). 中译本，《弹性稳定理论》，张福范译，科学出版社 (1965).

[59] Timoshenko, S. P. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, New York (1940). 中译本，《板壳理论》，科学出版社 (1977).

[60] 朝永振一郎 (Tomonaga, S.), 《量子力学》, みすず書房 (1978).
[61] Tsien Hsue-shen (钱学森), The theory for the buckling of thin shells, *J. Aero. Sci.*, **9** (1942), 373—384.
[62] Вольмир А. С., *Гибкие Пласмики и Оболочки*, Гостехиздат, Москва (1956). 中译本, 《柔韧板与柔韧壳》, 卢文达等译, 科学出版社 (1959).
[63] Van der Waerden, B. L., *Group Theory and Quantum Mechanics*, Speringer-Verlag (1974). 中译本, 《群论与量子力学》, 赵展岳等译, 上海科学技术出版社 (1980).
[64] Wang Chi-teh (王启德) and G. Rao, A study of an analogues model giving the nonlinear characteristics in the buckling theory of sandwich cylinders, *J. Aero. Sci.*, 2 (1952).
[65] 和達三樹, ソリトニの研究の現状, 科学, **45** (1975), 131.
[66] 汤川秀樹 (Yukawa, H.), *The Basic of Modern Physics*, Vol. **3**,**4**, *Ouanturn Mechanics*, Iwanami (1978). 《現代物理学の基礎》, 巻三、四, 《量子力学》, 岩波書店 (1978).
[67] 张奠宙, 二十世纪数学发展一瞥, 自然杂志, **5** (1982), 179.
[68] von Kármán, Th. and Tsien Hsue-shen (钱学森), The buckling of spherical shells on external pressure, *J. Aero. Sci.*, **7** (1949), 43.
[69] Lee Koo. E., Wang Ren-chuan (王仁川) et al, Charged spin-1/2 particles in uniform electrical field, 中国科学技术大学学报, **13**, 2 (1983), 167—180.
[70] Новожилов В. В., *Теория Тонких Оболочек*, Пенинград (1962). (有中译本, 《薄壳理论》)
[71] 王仁川, Airy 函数乘积的积分, 中国科学技术大学学报, **10**, 3 (1980), 1—9; 物理学报, **30**, 1 (1981), 74—83.
[72] Власов В. З., 《壳体的一般理论》, 薛振东等译, 人民教育出版社 (1964).

The Schrödinger Equation of Thin Shell Theories

Shen Hui-chuan

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

This work is the continuation of [50] and [51]. In this paper:

(A) The Love-Kirchhoff equation of small deflection problem for elastic thin shell with constant curvature is classified as the same several solutions of Schrödinger equation, and it is shown clearly that its form is an axisymmetric problem;

(B) As an example for the small deflection problem, it is extracted that the general solution of vibration problem of thin spherical shell with equal thickness by the force in central surface and the axisymmetric external field, thus it is distinct from ref. [50]. It is a space-place function, and is not a time function.

(C) The von Kármán-Vlasov equation of large deflection problem for shallow shell is classified as the solution of AKNS equation, and in it the one-dimensinal problem is classified as the solution of simple Schrödinger equation for the eigenvalue problem. Furthermore, it is transformed from large deflection of shallow shell——from nonlinear problem to soluble linear problem.