应用数学和力学，第6卷第10期（1985年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

突然开始旋转的圆盘上的三维非定常边界层*

陈 允 明

（力学研究所，1984年8月26日收到）

摘 要

本文研究突然以常角速度ω开始旋转的圆盘上的三维非定常边界层．先求级数展开再用隐式差分把它延拓，得出了从$\omega t=0$时的涡线扩散连续过渡到Kármán定常解的完整解答．最后给出了力矩系数c_M，来流速度$w(\infty)$，物面流线倾角随时间ωt的变化以及与实验点的比较．

在叶轮机械的流体力学问题中，二维、三维无粘流理论已发展得很充分了．目前对其它各种效应的研究正在开展，如非定常效应、粘性效应（边界层理论）等．旋转物体的边界层中最基本也最简单的一个问题是定常旋转圆盘上的边界层（Kármán问题[1][2]），其自然的推广是突然起动的旋转圆盘以及角速度有周期变化的旋转圆盘上的边界层．它们既有理论意义（非定常效应加粘性效应加三维效应）又有实用背景．

Thiriot[3]首先研究了其中第一个问题，求出了速度在$\omega t=0$附近的展开的一阶项以及切向速度的二阶项g_1，其结果被许多书引用[4][5]．然而他求出的g_1有错，由于方程的非齐次项$-8h_0g_0'$系数差了一倍其结果大了近三分之一．此外，展开式只适用于$\tau<1$，而他却企图把其理论用到$\tau\geqslant1$区域去解释实验，这显然是不合理的．本文改正了他的错误，求出展式的全部二阶项g_1，f_1及h_1，并以此为初值数值延拓到无穷，得出了从起动直到达到定常状态的完整解答．

对于从静止状态突然以常数角速度ω开始旋转的圆盘边界层，相似变量除了Kármán引入的$\zeta=z\sqrt{\omega/\nu}$外，还多一个无量纲时间$\tau=\omega t$，它也表示z方向两个特征尺度之比：$\sqrt{\tau}=\sqrt{\nu t}/\sqrt{\nu/\omega}$，其中$\sqrt{\nu t}$代表粘性随时间的扩散距离，$\sqrt{\nu/\omega}$代表粘性最终能影响的距离．这里$r$，$\theta$，$z$和$u$，$v$，$w$分别为径向、周向、轴向的坐标和速度分量．$\nu$为运动粘性系数．

当$\sqrt{\nu t}\gg\sqrt{\nu/\omega}$即$\tau\gg1$时解应趋于定常解，所以我们寻求如下形式的解

$$u=\omega rf(\zeta,\tau),\quad v=\omega rg(\zeta,\tau),\quad w=\sqrt{\nu\omega}\,h(\zeta,\tau)$$

这时方程及边界条件如下

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta^2}-h\frac{\partial f}{\partial\zeta}+g^2-f^2=\frac{\partial f}{\partial\tau},\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial\zeta^2}-h\frac{\partial g}{\partial\zeta}-2fg=\frac{\partial g}{\partial\tau},\qquad \frac{\partial h}{\partial\zeta}+2f=0 \tag{1}$$

* 李家春推荐．

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=0:\quad f=h=0,\ g=1\\&\zeta\to\infty:\ f=g=0\\&\tau=0:\quad f=g=h=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这时z方向的动量方程可用来求压力p，若记$p=\rho\nu\omega P$则有

$$\frac{\partial P}{\partial\zeta}=\frac{\partial^2 h}{\partial\zeta^2}-h\frac{\partial h}{\partial\zeta}-\frac{\partial h}{\partial\tau}$$

显然，当$\sqrt{\nu t}\ll\sqrt{\nu/\omega}$（即$\tau=\omega t\ll 1$）时物理过程主要是 $z=0$处涡层的扩散，类似于突然起动的平板，所以恰当的相似变量应当是

$$\eta=z/2\sqrt{\nu t}=\zeta/2\sqrt{\tau}\tag{3}$$

这时一阶近似解仅仅是η的函数，τ的影响出现在高阶近似中． 我们将解展开为τ的级数

$$\left.\begin{aligned}&f=\tau f_0(\eta)+\tau^3 f_1(\eta)+\cdots\\&g=g_0(\eta)+\tau^2 g_1(\eta)+\cdots\\&h=-4[\tau^{\frac{3}{2}}h_0(\eta)+\tau^{\frac{7}{2}}h_1(\eta)+\cdots]\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

代入方程组 (1) 可得一阶近似[3][4]为

$$\left.\begin{aligned}&g_0''+2\eta g_0'=0,\ h_0'=f_0\\&f_0''+2\eta f_0'-4f_0=-4g_0^2\\&g_0(0)=1,\ g_0(\infty)=f_0(0)=f_0(\infty)=h_0(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

显然，$g_0=1-\mathrm{erf}(\eta)=\mathrm{erfc}(\eta)$误差函数．然后利用伽马函数引入[6][7]

$$\varphi_a(\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2a+1)}\int_\eta^\infty(x-\eta)^{2a}e^{-x^2}dx$$

它满足方程$\varphi_a''+2\eta\varphi_a'-4a\varphi_a=0$，并具有下述性质

$$\varphi_a(\infty)=0,\ \varphi_a(0)=1/(2^{2a}\Gamma(a+1)),\ \varphi_a'(\eta)=-\varphi_{a-\frac{1}{2}}(\eta)$$

由此不难求出

$$\left.\begin{aligned}&f_0(\eta)=\frac{8}{\pi}\varphi_1(\eta)-2[\varphi_{\frac{1}{2}}(\eta)]^2,\ f_0'(0)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\\&h_0(\eta)=\int_0^\eta f_0(x)dx\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

这时二阶近似为非齐次线性方程

$$\left.\begin{aligned}&g_1''+2\eta g_1'-8g_1=8f_0g_0-8h_0g_0'\\&f_1''+2\eta f_1'-12f_1=4f_0^2-8h_0f_0'-8g_0g_1\\&h_1'=f_1\\&g_1(0)=g_1(\infty)=f_1(0)=f_1(\infty)=h_1(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

对于这类二点边值问题可先解齐次方程的初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\psi_1''+2\eta\psi_1'-8\psi_1=0,\ \chi_1''+2\eta\chi_1'-12\chi_1=0\\&\psi_1(0)=\chi_1(0)=0,\ \psi_1'(0)=\chi_1'(0)=1\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

再求非齐次方程 (7) 的满足零初值条件 $G_1(0)=F_1(0)=G_1'(0)=F_1'(0)=0$ 的特解 $G_1(\eta)$和$F_1(\eta)$．于是二阶近似可表为：

$$g_1(\eta)=G_1(\eta)-G_1(\infty)\psi_1(\eta)/\psi_1(\infty),\ f_1(\eta)=F_1(\eta)-F_1(\infty)\chi_1(\eta)/\chi_1(\infty)\tag{9}$$

下面来研究由起动阶段到定常状态的连续过渡．首先由级数解 g_0，g_1，f_0，f_1等求出在

某个τ_0（我们取 $\tau_0=0.10$）时刻的解，例如

$$f(\zeta,\tau_0)=\tau_0 f_0(\zeta/2\sqrt{\tau_0})+\tau_0^3 f_1(\zeta/2\sqrt{\tau_0})$$

然后以此为$\tau=\tau_0$处的初值，直接对抛物型方程组(1)作数值积分。计算中对ζ用中心差分，对τ用具有二阶精度的隐式向前三点差分

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta^2}&=\frac{f_{i+1,j}+f_{i-1,j}-2f_{i,j}}{\Delta\zeta^2}+O(\Delta\zeta^2)\\ \frac{\partial f}{\partial\zeta}&=\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2\Delta\zeta}+O(\Delta\zeta^2)\\ \frac{\partial f}{\partial\tau}&=\frac{3f_{i,j}-4f_{i,j-1}+f_{i,j-2}}{2\Delta\tau}+O(\Delta\tau^2)\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

最后得到的是具三对角系数矩阵的线代数方程组；例如对f得到

$$a_i f_{i-1,j}+b_i f_{i,j}+c_i f_{i+1,j}=d_i\tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_i=2\Delta\tau/\Delta\zeta^2+4h_{i,j}\Delta\tau/\Delta\zeta,\ c_i=2\Delta\tau/\Delta\zeta^2-4h_{i,j}\Delta\tau/\Delta\zeta\\ &b_i=-4\Delta\tau/\Delta\zeta^2-3,\ d_i=-4f_{i,j-1}+f_{i,j-2}-2(g_{i,j}^2-f_{i,j}^2)\Delta\tau\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

其中$f_{i,j}$代表$f(i\Delta\zeta,\tau_0+j\Delta\tau)$。对于$g$也得到类似方程组，其中$a_i$，$b_i$，$c_i$都相同，只有常数项$d_i$改为

$$e_i=-4g_{i,j-1}+g_{i,j-2}+4g_{i,j}f_{i,j}\Delta\tau\tag{13}$$

这两个方程组可分别用追赶法求解。由于非线性，系数中含$f_{i,j}$，$g_{i,j}$以及$h_{i,j}$，所以必须用叠代法求解。由线性外插值得出系数中的$f_{i,j}$，$g_{i,j}$及$h_{i,j}$的初估值，再解方程组得到$f_{i,j}$等的

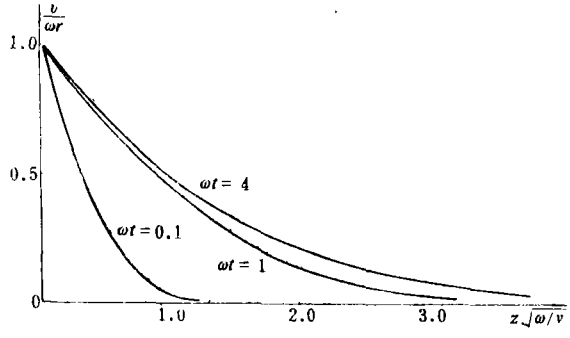

图 1

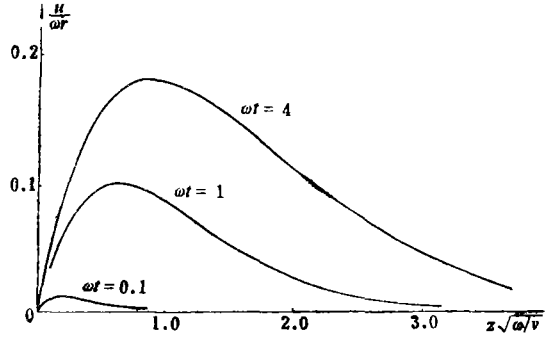

图 2

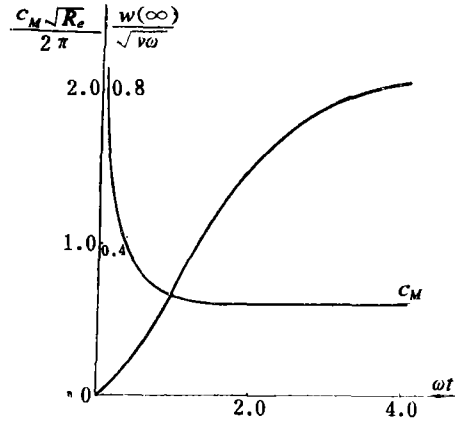

图 3

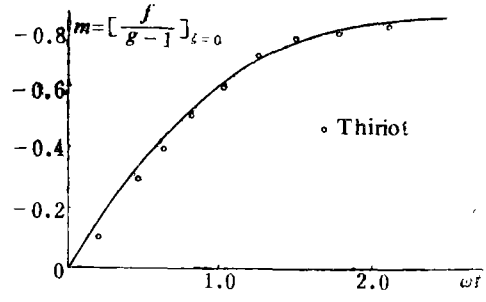

图 4

改进值，这样一次次叠代直到先后两次解的相对误差小于千分之一为止。又因为对 $\partial f/\partial\tau$ 等用了三点差分格式，求 $f_{i,j}$ 时需要知道 $f_{i,j-1}$ 及 $f_{i,j-2}$，所以出发时需要由级数解求出 $\tau=\tau_0$ 及 $\tau=\tau_0-\Delta\tau$ 两处的初值。

计算中取 $\Delta\zeta=0.05$，$\Delta\tau=0.05$（随 τ 的增大可增大 $\Delta\tau$），计算表明当 $\tau\geqslant5$ 时计算结果与定常解的相对误差已小于百分之一了。图 1、图 2 给出了在三个典型时刻 $f(\zeta,\tau)$ 和 $g(\zeta,\tau)$ 随 ζ 的变化。图3是力矩系数 c_M 和来流速度 $w(\infty)$ 随时间的变化。其中力矩及力矩系数为 $M=2\pi\mu\int_0^R r^2\frac{\partial v}{\partial z}dr$ 及 $c_M=2M\Big/\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2R^5\right)$。这些曲线清楚表明了随时间增加涡层逐渐向外扩散，由此力矩渐逐减小而由离心力引起的法向来流速度逐渐增大。而且可以看出 v 趋于定常值要比 u 或 w 快得多。图 4 是物面流线（对数螺线）倾角 $m=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=[f/(g-1)]_{\zeta=0}$ 随时间的变化，它与实验点[3][4]相当符合。函数 g_1 和 h_1 的值见表1：

表 1

η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$-g_1\times10^4$	181	327	424	474	484	466	428	379	326	272	222	177	138	106	79	58
$-f_1\times10^4$	49	91	120	136	140	133	120	103	85	68	52	39	29	20	14	10

参 考 文 献

[1] Kármán, Th., Über laminare und turbulente Reibung, *Z. angew. Math. Mech.*, 1 (1921), 233—252.

[2] White, F. M., *Viscous Fluid Flow* (First Edit), McGraw-Hill Book Company (1974).

[3] Thiriot, K-H., Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungzustandes, *Z. angew. Math. Mech.*, 20 (1940), 1—12.

[4] Dorfman, L. A., *Hydrodynamic Resistance and the Heat Loss of Rotating Solids*, (Translated by Kemmer), Oliver & Boyd Press (1963), 31.

[5] 洛强斯基，《层流边界层》，王殿儒等译自俄文，国防工业出版社，北京 (1965).

[6] Watson, E. J., Boundary layer growth, *Proc. Roy. Soc.*, A231 (1955), 104—116.

[7] 陈允明，非定常温度边界层，力学与实践，1, 1 (1979).

The Three-Dimensional Unsteady Boundary Layer over an Impulsively Started Rotating Disk

Y. M. Chen

(*Institute of Mechanics, Beijing*)

Abstract

The unsteady boundary lager over an impulsively started rotating disk was studied, a complete solution describing the smooth transition from vortex diffusion at $\omega t=0$ to Kármán's steady solution was obtained by series expansion and its numerical continuation. The inclination angly of body streamlines, together with experimental results, were given as function of time t as well as the moment coefficient c_M and on-coming velocity $w(\infty)$.