

# 高速扩展裂纹尖端的理想弹塑性场\*

· 林 拜 松

(中南矿冶学院, 1984年7月收到)

## 摘 要

在理想弹塑性材料中, 高速扩展裂纹尖端的应力分量都只是 $\theta$ 的函数. 利用这个条件以及定常运动方程、应力应变关系与屈服条件, 我们得到反平面应变和平面应变两者的一般解. 将这两个一般解分别用于扩展Ⅲ型裂纹和Ⅰ型裂纹, 我们就求出了Ⅲ型裂纹和Ⅰ型裂纹的高速扩展尖端的理想弹塑性场和理想塑性场.

## 一、前 言

关于高速定常扩展裂纹尖端的理想塑性场问题, Слепян<sup>[1]</sup>与 Achenbach 和 Dunayev-ky<sup>[2]</sup>用不同方法研究过反平面应变和平面应变两种情形. 对于Ⅲ型裂纹, 两者的结果相同. 对于平面应变Ⅰ型裂纹, 两者的结果有些不同, 但当扩展速度趋于零时, 两者的结果就完全相同. 然而, [1]中没有给出高速扩展平面应变Ⅰ型裂纹尖端场的显式表达式, 而[2]中只给出适用于低速扩展的解. 另外, 还没有人研究过高速扩展裂纹尖端的理想弹塑性场. 为此, 本文提出一个十分简单的方法来解决上述问题.

同静止裂纹的尖端场一样<sup>[3,4]</sup>, 在理想弹塑性材料中, 高速扩展裂纹尖端的应力分量也都只是 $\theta$ 的函数. 在高速扩展裂纹尖端的应力分量都只是 $\theta$ 的函数的条件下, 利用定常运动方程、应力应变关系及屈服条件, 我们就得到反平面应变和平面应变两者的一般解. 将这两个一般解分别用于扩展Ⅲ型裂纹和Ⅰ型裂纹, 我们求出了Ⅲ型裂纹和Ⅰ型裂纹的高速定常扩展尖端的理想弹塑性场和理想塑性场的显式表达式, 它们适用于任何扩展速度的解.

对于扩展Ⅲ型裂纹, 本文的尖端理想塑性场与[1]和[2]的相同, 这表明本文的方法是正确的. 至于平面应变Ⅰ型裂纹, 当尖端的扩展速度趋于零时, 本文的尖端理想塑性场与[1]和[2]的相同, 但本文却给出适用于任何扩展速度的尖端场的显式表达式. 另外, 本文还给出了高速扩展裂纹尖端的理想弹塑性场的显式表达式.

值得指出的是, 如果Ⅰ型裂纹和Ⅰ-Ⅲ复合型裂纹的尖端也沿其裂纹线方向高速扩展, 则本文得到的平面应变一般解可以用来确定高速扩展Ⅰ型裂纹和Ⅰ-Ⅲ复合型裂纹尖端的理想弹塑性场和理想塑性场. 其组合方法与[3]和[4]的相同, 本文不再叙述.

图1表示一沿其裂纹线方向高速扩展裂纹的尖端几何.  $(x_1, y_1, z_1)$ 和 $(x, y, z)$ 分别是静止坐标系和运动坐标系. 运动坐标系的原点在高速扩展裂纹的尖点上. 裂纹尖端的速度为

\* 钱伟长推荐.

$c = \text{const.}$  设裂纹作定常运动, 则有如下关系:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

今后取:  $\alpha = c/\sqrt{\mu/\rho} \leq 1$  (1.2)

其中,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  为剪切波波速,  $\mu$  为剪切弹性模量,  $\rho$  是材料的密度.

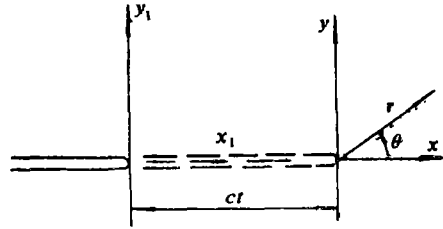


图 1

## 二、反平面应变

对于反平面应变情形, 不为零的量是:  $z$  方向的位移分量  $W(x, y)$  及剪应力分量  $\tau_{xz}(x, y)$ ,  $\tau_{yz}(x, y)$ . 于是, 相对于运动坐标系  $(x, y, z)$  的基本方程为:

1) 定常运动方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \rho c^2 \frac{\partial W_x}{\partial x} = 0 \quad (W_x = \partial W / \partial x) \quad (2.1)$$

2) 屈服条件

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (2.2)$$

若取

$$\tau_{xz} = -k \sin \omega, \quad \tau_{yz} = k \cos \omega \quad (2.3)$$

则(2.2)恒被满足.  $k$  是剪切屈服极限.

3) 应力应变关系

塑性应力应变关系为:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{2\lambda}{c} \tau_{xz}, \quad \frac{\partial W_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{2\lambda}{c} \tau_{yz} \quad (2.4)$$

$\lambda$  是 Prandtl-Reuss 流动方程中的非负比例因子. 弹性应力应变关系为:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \quad (2.5)$$

从(2.4)中消去  $2\lambda/c$  得:

$$\tau_{xz} \frac{\partial W_x}{\partial y} - \tau_{yz} \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left( \tau_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \tau_{yz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

由于理想弹塑性材料中的应力分量都是有限的, 所以高速扩展裂纹尖端的弹塑性应力分量都只是  $\theta$  的函数. 由此得知  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  和  $\omega$  都只是  $\theta$  的函数. 由(2.1) 看出  $W_x$  亦只是  $\theta$  的函数. 这样, 在高速定常扩展裂纹尖端的塑性区内, 问题就归结为确定  $\theta$  的函数  $\omega$  和  $W_x$ .

利用变换

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.7)$$

和(2.3), (2.1)和(2.6)就变成:

$$(\cos \omega - \cot \theta \sin \omega) \frac{d\omega}{d\theta} + \alpha^2 \frac{\mu}{k} \frac{dW_x}{d\theta} = 0, \quad \frac{k}{\mu} \frac{d\omega}{d\theta} + (\cos \omega - \cot \theta \sin \omega) \frac{dW_x}{d\theta} = 0 \quad (2.8)$$

由(2.8)得到下面两种塑性区;

1) 非均匀区 ( $d\omega/d\theta \neq 0, dW_x/d\theta \neq 0$ )

非均匀区存在条件是 (2.8) 的系数行列式为零, 即

$$\cos\omega - \cot\theta \sin\omega = \alpha \tag{2.9}$$

由此得到:

$$\sin\omega = [(1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} - \alpha \cos\theta] \sin\theta, \quad \cos\omega = (1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cos\theta + \alpha \sin^2\theta \tag{2.10}$$

从而该区的应力分量为:

$$\tau_{xz} = -k [(1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} - \alpha \cos\theta] \sin\theta, \quad \tau_{yz} = k [(1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cos\theta + \alpha \sin^2\theta] \tag{2.11}$$

利用 (2.9), (2.8) 变成一个方程:

$$\frac{k}{\alpha\mu} \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{dW_x}{d\theta} = 0 \tag{2.12}$$

由此得到: 
$$W_x = -\frac{k\omega}{\alpha\mu} + c_1 \tag{2.13}$$

积分常数  $c_1$  由边界条件来确定.

2) 均匀区 ( $d\omega/d\theta = dW_x/d\theta = 0$ )

在均匀区内有

$$\omega = c_2, \quad W_x = c_3 \tag{2.14}$$

常数  $c_2$  和  $c_3$  由边界条件和连续条件来确定. 这样, 均匀区就是均匀应力区.

现在来研究弹性区. 将变换 (2.7) 用于 (2.1) 和 (2.5) 得到:

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \alpha^2 \mu \sin\theta \frac{dW_x}{d\theta} &= 0 \\ \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} - \mu \frac{dW_x}{d\theta} = 0, \quad \sin\theta \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} + \mu \cos\theta \frac{dW_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.15}$$

该方程组非零解存在条件是:

$$\sin\theta = \pm \frac{1}{\alpha} \tag{2.16}$$

这表明弹性非均匀区不存在. 所以, 弹性区只能是均匀区. 在弹性均匀区内有:

$$\tau_{xz} = c_4, \quad \tau_{yz} = c_5, \quad W_x = c_6 \tag{2.17}$$

常数  $c_i$  ( $i=4 \sim 6$ ) 由边界条件及弹性应力应变关系来确定.

对于高速扩展 III 型裂纹, 其尖端的理想弹塑性场由塑性非均匀区和弹性均匀区组成:

1) 塑性非均匀区 ( $0 \leq \theta \leq \theta_1$ )

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -k [(1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} - \alpha \cos\theta] \sin\theta, \quad \tau_{yz} = k [(1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cos\theta + \alpha \sin^2\theta] \\ W_x &= -\frac{k}{\alpha\mu} \cos^{-1} [(1 - \alpha^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cos\theta + \alpha \sin^2\theta], \quad \theta_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned} \right\} \tag{2.18}$$

2) 弹性均匀区 ( $\theta_1 + \varepsilon \leq \theta \leq \pi$ )

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(\pi), \quad \tau_{yz} = 0, \quad W_x = \frac{\tau_{xz}(\pi)}{\mu} \tag{2.19}$$

其中  $\varepsilon$  是一个微小角, 它随  $\tau_{xz}(\pi) \rightarrow -k$  而趋于零.

显然, 当  $\tau_{xz}(\pi) = -k$  时, 我们有  $\varepsilon = 0$ . 于是弹性均匀区变成塑性均匀区.

3) 塑性均匀区 ( $\theta_1 \leq \theta \leq \pi$ )

$$\tau_{xz} = -k, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \omega = \pi/2, \quad W_x = -\frac{\pi k}{2\alpha\mu} \quad (2.20)$$

这样, 高速扩展 III 型裂纹尖端的理想塑性场由 (2.18) 和 (2.20) 组成. 它们与文献 [1] 和 [2] 的相同. 这表明本文的方法是正确的.

### 三、平 面 应 变

在运动坐标系  $(x, y, z)$  中, 平面应变定常运动裂纹的基本方程为:

1) 定常运动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_-}{\partial x} + \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho c^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial \sigma_-}{\partial y} + \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho c^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中,  $\sigma_- = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ ;  $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = (1+\nu)(\sigma_x + \sigma_y)/3$ ;  $u$  和  $v$  分别是沿  $x$  和  $y$  轴的位移分量;  $u_x = \partial u / \partial x$ ,  $v_x = \partial v / \partial x$ ;  $\nu$  是泊松比.

2) 屈服条件

$$\sigma_-^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad (3.2)$$

若取

$$\sigma_- = -k \cos \omega, \quad \tau_{xy} = -k \sin \omega \quad (3.3)$$

则 (3.2) 恒被满足.

3) 应力应变关系

塑性应力应变关系为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\lambda}{c} \sigma_- + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma_- + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right] \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\lambda}{c} \sigma_- + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\sigma_- + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right] \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{2\lambda}{c} \tau_{xy} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

弹性应力应变关系为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\nu}{2\mu} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \frac{\nu}{2\mu} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

同反平面应变情形一样, 未知量  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $u_x$  和  $v_x$  都只是  $\theta$  的函数. 于是, 在高速扩展平面应变裂纹尖端的塑性区内, 问题归结为确定这四个未知量.

利用 (2.7), (3.1), (3.3) 和 (3.4), 我们导出下列方程组:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos(\omega-\theta) \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{a \sin\theta}{k} \frac{d\sigma}{d\theta} - \alpha^2 \left(\frac{\mu}{k}\right) \sin\theta \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\
 \sin(\omega-\theta) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{a \cos\theta}{k} \frac{d\sigma}{d\theta} - \alpha^2 \left(\frac{\mu}{k}\right) \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\
 \sin\theta \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{\mu}{k} \cos(\omega-\theta) \frac{du_x}{d\theta} - \frac{\mu}{k} \sin(\omega-\theta) \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\
 -\sin\theta \frac{d\omega}{d\theta} - \sin\omega \sin\theta \frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{\mu}{k} (\sin\omega \sin\theta + \cos(\omega-\theta)) \frac{du_x}{d\theta} \\
 - \frac{\mu}{k} \sin\theta \cos\omega \frac{dv_x}{d\theta} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left( a = \frac{3}{2(1+\nu)}, \quad b = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \right)$$

由(3.6)得到下面两种塑性区:

1) 非均匀区 ( $d\omega/d\theta \neq 0, d\sigma/d\theta \neq 0, du_x/d\theta \neq 0, dv_x/d\theta \neq 0$ )

非均匀区存在条件是 (3.6) 的系数行列式为零, 即

$$\cos(\omega-2\theta) = \pm a \sin\theta \sqrt{1-2\nu+\varphi} \quad (\varphi = 1 - (1-2\nu)\alpha^2 \sin^2\theta) \quad (3.7)$$

由此得到:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin\omega &= f \sin 2\theta - \sqrt{1-f^2} \cos 2\theta \\
 \cos\omega &= f \cos 2\theta + \sqrt{1-f^2} \sin 2\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (f = \alpha \sqrt{1-2\nu+\varphi} \sin\theta) \quad (3.8)$$

利用 (3.6) 的前三式解出  $d\sigma/d\theta, du_x/d\theta$  和  $dv_x/d\theta$ , 然后积分得到:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma &= -\frac{2k}{3} (1+\nu) \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega + \sigma_0 \\
 u_x &= \frac{k}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{f \sin(\omega-\theta)}{\alpha^2 \sqrt{1-f^2} \sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-f^2}} \right\} d\omega + u_{x_0} \\
 v_x &= \frac{k}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{1-f^2}} - \frac{f \cos(\omega-\theta)}{\alpha^2 \sqrt{1-f^2} \sin\theta} \right\} d\omega + v_{x_0}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

从而该区的诸应力分量为:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} - k \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega - kf \cos 2\theta - k \sqrt{1-f^2} \sin 2\theta \\
 \sigma_y &= \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} - k \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega + kf \cos 2\theta + k \sqrt{1-f^2} \sin 2\theta \\
 \sigma_z &= -\frac{3\nu\sigma_0}{1+\nu} - 2\nu k \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega \\
 \tau_{xy} &= k \sqrt{1-f^2} \cos 2\theta - kf \sin 2\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 本文的结果与 [1] 和 [2] 的相同。但是, [1] 中未给出显式表达式 (3.8)~(3.10), 而 [2] 中只给出含  $\alpha$  一次方的渐近解, 它仅适用低速扩展裂纹。

2) 均匀区 ( $d\omega/d\theta = d\sigma/d\theta = du_x/d\theta = dv_x/d\theta = 0$ )

在均匀区内有

$$\omega = d_1, \quad \sigma = d_2, \quad u_x = d_3, \quad v_x = d_4 \quad (3.11)$$

常数  $d_i$  ( $i=1\sim 4$ ) 由边界条件及连续条件来确定。

现在来研究弹性区.利用(2.7)、(3.1)和(3.5),我们得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \frac{d\sigma_x}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} - \alpha^2 \mu \sin\theta \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\ -\cos\theta \frac{d\sigma_y}{d\theta} + \sin\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} - \alpha^2 \mu \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\ \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{d\sigma_x}{d\theta} - \frac{\nu}{2\mu} \frac{d\sigma_y}{d\theta} - \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\ \frac{\nu}{2\mu} \frac{d\sigma_x}{d\theta} - \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{d\sigma_y}{d\theta} - \cos\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\ \sin\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} + \mu \cos\theta \frac{du_x}{d\theta} - \mu \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

由(3.12)可知,该方程组非零解的存在条件是:

$$A \cot^4 \theta + B \cot^2 \theta + C = 0 \quad (3.13)$$

其中

$$A = 2(1-\nu), \quad B = 4(1-\nu) - \alpha^2, \quad C = (1-\alpha^2)(2-2\nu-\alpha^2) \quad (3.14)$$

由式(3.13)得到:

$$\cot\theta = \pm \left[ \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

该式表明非零解的弹性区不存在.所以,弹性区只能是均匀区,在该区内有

$$\sigma_x = d_5, \quad \sigma_y = d_6, \quad \tau_{xy} = d_7, \quad u_x = d_8, \quad v_x = d_9 \quad (3.16)$$

常数 $d_i$  ( $i=5\sim 9$ )由边界条件和弹性应力应变关系来确定.

显然,只要裂纹沿裂纹线方向扩展,则高速扩展平面应变裂纹尖端的理想弹塑性场就由弹性区和塑性区组成,而其理想塑性场则由塑性非均匀区和均匀区组成.现以I型裂纹为例来说明之.

对于I型裂纹,我们有下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \theta=0: \tau_{xy}=0, \sigma_y > 0, v=0 \\ \theta=\pi: \tau_{xy}=0, \sigma_y=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

根据(3.17),我们知道,平面应变高速扩展I型裂纹尖端的理想弹塑性场由一个塑性非均匀区、一个塑性均匀区和一个弹性均匀区所组成:

1) 塑性均匀区 ( $0 \leq \theta \leq \theta_1$ )

$$\left. \begin{aligned} \omega=0, \sigma=\sigma_0, u_x=u_{x0}, v_x=v_{x0} \\ \sigma_x = \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} - k, \quad \sigma_y = \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} + k, \quad \sigma_z = \frac{3\nu\sigma_0}{1+\nu}, \quad \tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

2) 塑性非均匀区 ( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ )

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{k}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{f \sin(\omega-\theta)}{\alpha^2 \sqrt{1-f^2} \sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-f^2}} \right\} d\omega + u_{x0} \\ v_x &= \frac{k}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{1-f^2}} - \frac{f \cos(\omega-\theta)}{\alpha^2 \sqrt{1-f^2} \sin\theta} \right\} d\omega + v_{x0} \\ \sigma_x &= \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} - k \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega - k f \cos 2\theta - k \sqrt{1-f^2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} - k \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega + kf \cos 2\theta + k\sqrt{1-f^2} \sin 2\theta \\ \sigma_z &= \frac{3\nu\sigma_0}{1+\nu} - 2\nu k \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega \\ \tau_{xy} &= k\sqrt{1-f^2} \cos 2\theta - kf \sin 2\theta \end{aligned} \right\}$$

3) 弹性均匀区 ( $\theta_2 + \varepsilon \leq \theta \leq \pi$ )

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(\pi), \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_z = \nu\sigma_x(\pi) \\ u_x &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_x(\pi), \quad v_y = -\frac{\nu}{2\mu} \sigma_x(\pi) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

其中  $\varepsilon$  是一微小角, 它随  $\sigma_x(\pi) \rightarrow 2k$  而趋于零。

显然, 当  $\sigma_x(\pi) = 2k$  时,  $\varepsilon = 0$ , 于是, 弹性均匀区就变成塑性均匀区。

4) 塑性均匀区 ( $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$ )

$$\left. \begin{aligned} \omega = \pi, \quad \sigma_x = 2k, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 2\nu k, \quad \tau_{xy} = 0 \\ u_x &= \frac{k}{\mu} \left\{ \left| \int_0^\omega \left[ \frac{f \sin(\omega-\theta)}{\alpha^2 \sqrt{1-f^2} \sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-f^2}} \right] d\omega \right|_{\omega=\pi} \right\} + u_{x0} \\ v_x &= \frac{k}{\mu} \left\{ \left| \int_0^\omega \left[ \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{1-f^2}} - \frac{f \cos(\omega-\theta)}{\alpha^2 \sqrt{1-f^2} \sin\theta} \right] d\omega \right|_{\omega=\pi} \right\} + v_{x0} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

现在来确定未定常数。令 (3.7) 中的  $\omega = 0$  和  $\omega = \pi$ , 就得到确定  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的公式为:

$$\cos 2\theta_1 = f(\alpha, \nu, \theta_1) \quad (3.22)$$

和  $\cos 2\theta_2 = -f(\alpha, \nu, \theta_2) \quad (3.23)$

由  $\theta = \theta_2$  处  $\sigma_y = 0$  得到确定  $3\sigma_0/2(1+\nu)$  的公式为

$$\frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} = k + k \left| \int_0^\omega \frac{1-\alpha^2 \sin\theta}{\sqrt{1-f^2}} d\omega \right|_{\omega=\pi} \quad (3.24)$$

根据对称性,  $\theta = 0$  处,  $v_x = 0$ , 所以有

$$v_{x0} = 0 \quad (3.25)$$

将 (3.18) 中的  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  代入弹性应力应变关系得到:

$$u_{x0} = \frac{3(1-2\nu)\sigma_0}{4\mu(1+\nu)} - \frac{k}{2\mu} \quad (3.26)$$

根据上述理由, 高速扩展平面应变 I 型裂纹尖端的理想塑性场由 (3.18), (3.19) 和 (3.21) 组成。当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 本文的结果与 [1] 和 [2] 的相同。

### 参 考 文 献

- [1] Слепян Л. И., Динамика трещины в упругопластическом теле, *Изв. АН СССР МТТ*, 11,2 (1976), 144—153.
- [2] Achenbach, J. D. and V. Dunayevsky, Fields near a rapidly propagating crack-tip in an elastic perfectly-plastic material, *J. Mech. Phys. Solids*, 29, 4 (1981), 283—303.
- [3] 林拜松, 静止裂纹尖端的理想塑性应力场, *应用数学和力学*, 6, 5 (1985), 415—421.
- [4] 林拜松, 静止裂纹尖端的理想弹塑性应力场, *应用数学和力学*, (待发表).

## Elastic Perfectly-Plastic Fields at a Rapidly Propagating Crack-Tip

Lin Bai-song

*(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)*

### Abstract

All the stress components at a rapidly propagating crack-tip in an elastic perfectly-plastic material are functions of  $\theta$  only. Making use of this condition and the equations of steady-state motion, stress-strain relations and yield conditions, we obtain the general solutions in both the cases of anti-plane and in-plane strain. Applying these two general solutions to propagating Mode II and Mode I cracks respectively, the elastic perfectly-plastic and the perfectly plastic fields at the rapidly propagating tips of Mode II and Mode I cracks are derived.