应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性动力学的通解*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1984年3月16日收到）

摘 要

本文从分析含时矢量的Stokes-Helmholtz分解着手，给出了均匀各向同性介质中弹性动力学Lamé方程的通解。

前 言

弹性动力学Lamé 方程（或Navier方程）的通解，一直是地球物理学和爆炸力学等专业所关心的问题。在解决这个问题之前，让我们首先回顾一下弹性静力学业已取得的结果。

在弹性静力学中，用位移 $u_i(i=1, 2, 3)$表示的平衡方程即 Lamé 方程[1~3]在引用Poisson 比ν后，形式变为

$$\partial_k\partial_k u_i+\frac{1}{1-2\nu}\partial_i(\partial_k u_k)=0 \tag{a}$$

这个方程的通解先由 Boussinesq[4]和Галёркин[5]求得，其形式为

$$\left.\begin{aligned}&u_i=-B\partial_i\phi+\partial_k\partial_k\varphi_i\\&B=\frac{1}{2(1-\nu)},\quad \phi=\partial_k\varphi_k\\&\partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k\varphi_i)=0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

即位移u_i可以用三个双调和函数φ_i来表示。其后，这个方程的通解又由Neuber和Папкович[6]求得。其形式为

$$\left.\begin{aligned}&u_i=-B\partial_i\phi+P_i\\&B=\frac{1}{2(1-\nu)},\quad \phi=\phi_0+\frac{1}{2}x_kP_k\\&\partial_k\partial_kP_i=0,\quad \partial_k\partial_k\phi_0=0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

即位移 u_i 又可以用四个调和函数ϕ_0和P_i来表示。除此之外，还有 Тер-Мкртичьян 形式的通解，它证明了位移u_i只需三个调和函数就可以表示出来。在这里我们不作详述。

这种由Boussinesq-Галёркин和Nenber-Папкович开创的求解方法，当然可以推广到弹性静力学的应变相容方程(Saint Venant方程)、Beltrami应力相容方程和 Крутков应力函数张量相容方程[7]中去。应变相容方程为

* 钱伟长推荐。

$$\partial_k\partial_k\varepsilon_{ji}+\frac{1}{1-2\nu}\partial_j\partial_i\theta=0 \quad (\theta=\varepsilon_{kk}) \tag{d}$$

它的相当于(b)式和(c)式的通解为：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ji}=-B\partial_j\phi_i+\partial_k\partial_k\varphi_{ji}\\ \phi_i=\partial_i\varphi_{kk}\\ \partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k\varphi_{ji})=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\varepsilon_{ji}=-B\partial_j\phi_i+P_{ji}\\ \phi_j=\mathring{\phi}_i+\frac{1}{2}x_iP_{kk}\\ \partial_k\partial_kP_{ji}=0,\ \partial_k\partial_k\mathring{\phi}_i=0\end{cases}$$

$$B=\frac{1}{2(1-\nu)} \tag{e}$$

考虑到ε_{ji}的对称性，因而双调和函数φ_{ji}或调和函数P_{ji}的数目并没有想象的那么多。

Beltrami应力相容方程为

$$\partial_k\partial_k\sigma_{ji}+\frac{1}{1+\nu}\partial_j\partial_i\Theta=0 \quad (\Theta=\sigma_{kk}) \tag{f}$$

它的相当于(b)式和(c)式的通解，可用(e)式套出，只要作如下的变换即可：

$$\varepsilon_{ji}\to\sigma_{ji},\qquad B\to B'=\frac{1}{2+\nu} \tag{g}$$

Крутков应力函数张量相容方程为：

$$\partial_k\partial_k\psi_{ji}-\frac{1}{2-\nu}\partial_j\partial_i\psi_{ji}=0 \tag{h}$$

它的相当于(b)式和(c)式的通解为[8]

$$\begin{cases}\psi_{ji}=B''\partial_j\phi_i-\partial_k\partial_k\varphi_{ji}\\ \phi_i=-\partial_k\varphi_{ki}\\ \partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k\varphi_{ji})=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\psi_{ji}=B''\partial_j\phi_i-P_{ji}\\ \phi_i=\dot{\phi}_i-\frac{1}{2}x_kP_{ki}\\ \partial_k\partial_kP_{ji}=0,\ \partial_k\partial_k\dot{\phi}_i=0\end{cases}$$

$$B''=\frac{3+(2-\nu)\delta_{ji}}{1-4\nu+\nu^2} \tag{i}$$

由于应力函数张量ψ_{ji}也是对称张量，因此，双调和函数φ_{ji}或调和函数P_{ji}的数目同样没有想象的那么多。

弹性静力学问题的解决[8]，为弹性动力学问题的求解树立了楷模。但是弹性动力学问题较之弹性静力学远为复杂，至今没有人能给出均匀各向同性介质中动力学Lame′方程的简单形式的通解。以往在讨论弹性动力学问题时，总是将波动分解为纵波(P 波)和横波(S 波)，然后矢量合成，然而这种方法并不能准确地给出某一方向的位移、应变和应力，因而其结果只能被看成是半定量的。本文在给出弹性动力学 Lamé 方程通解的基础上，正好能给予这个问题以圆满的解决，并能使人们对弹性动力学有更多的知识。

一、关于Stokes-Helmholtz分解

人们所熟知的，一个矢量u_i的Stokes-Helmholtz分解可以写成

$$u_i=A\partial_i\phi+e_{ijk}\partial_jF_k \tag{1.1}$$

(凡拉丁字母角标取1、2、3)

式中ϕ为标量势，F_k为矢量势分量，A为比例常数，e_{ijk}为 Ricci 符号(Levi-Civita 符号)[9]。由于$\partial_k F_k=0$，可将F_k以

$$F_k=e_{kmn}\partial_m\varphi_n \tag{1.2}$$

代入。Stokes-Helmholtz分解则可写成

$$u_i=A\partial_i\phi+\partial_i(\partial_k\varphi_k)-\partial_k\partial_k\varphi_i \tag{1.3}$$

这种标准的Stokes-Helmholtz分解是弹性静力学中求得Boussinesq-Галёркин通解和Neuber-Папкович通解的基础，在特殊情况下，说得确切一点，在矢量u_i不显含时间t的情况下，Stokes-Helmholtz分解是完全正确的。但是，在矢量u_i显含时间t的一般情况下，这种Stokes-Helmholtz分解便不再成立了。为了说明这一点，我们令

$$u_\mu=A\partial_\mu\phi+e_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha F_\nu \tag{1.4}$$

(凡希腊字母角标取1、2、3、4)

这里$x_4=ict$，$i=\sqrt{-1}$。同样，由于$\partial_\nu F_\nu=0$，可再设

$$F_\nu=e_{\nu\beta\gamma}\partial_\beta\varphi_\gamma \tag{1.5}$$

这里$\varphi_4=0$。利用由

$$e_{\mu\alpha\beta}\ e_{\nu\rho\sigma}=\begin{vmatrix}\delta_{\mu\nu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\beta\nu}\\ \delta_{\mu\rho} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\beta\rho}\\ \delta_{\mu\sigma} & \delta_{\alpha\sigma} & \delta_{\beta\sigma}\end{vmatrix} \tag{1.6}$$

得到的公式

$$e_{\mu\alpha\nu}e_{\nu\beta\gamma}=\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\gamma}-\delta_{\mu\gamma}\delta_{\alpha\beta} \tag{1.7}$$

可将(1.4)式化为

$$u_\mu=A\partial_\mu\phi+\partial_\mu(\partial_\nu\varphi_\nu)-\partial_\nu\partial_\nu\varphi_\mu \tag{1.8}$$

(1.8)式虽然与(1.3)式样子相象，但其内容完全不同。在我们所研究的含时问题中，$\varphi_4=0$，$x_4=ict$，因而可得

定理1 当矢量u_i显含时间t的时候，其正确分解应为

$$u_i=A\partial_i\phi+\partial_i(\partial_k\varphi_k)-(\partial_k\partial_k-\frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t)\varphi_i \tag{1.9}$$

显而易见，它比(1.3)式要多出最后一项来。定理 1 是我们求得弹性动力学通解的关键。

二、弹性动力学的第一种通解

弹性动力学的不计外场力的Lamé方程为

$$(\lambda+\mu)\partial_i(\partial_k u_k)+\mu\partial_k\partial_k u_i=\rho\partial_t\partial_t u_i \tag{2.1}$$

式中λ、μ为Lamé常数，ρ为弹性介质的密度，u_i为位移分量。

由(1.9)式，设

$$u_i=A\partial_i\phi+B\partial_i(\partial_k\varphi_k)-B\partial_k\partial_k\varphi_i+\partial_t\partial_t\varphi_i \tag{2.2}$$

将(2.2)式代入Lamé方程(2.1)式，有

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)A\partial_k\partial_k(\partial_i\phi)-\rho A\partial_t\partial_t(\partial_i\phi)\\&+\mu B\partial_l\partial_l\partial_i(\partial_k\varphi_k)+[(\lambda+\mu)-\rho B]\partial_t\partial_t\partial_i(\partial_k\varphi_k)\\&+(\mu+\rho B)\partial_k\partial_k(\partial_t\partial_t\varphi_i)-\mu B\partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k\varphi_i)-\rho\partial_t\partial_t\partial_t\partial_t\varphi_i=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

令

$$\varphi=\partial_k\varphi_k \tag{2.4}$$

则(2.3)式成为

$$
\begin{aligned}
&[(\lambda+2\mu)A+\mu B]\partial_l\partial_l\partial_i(\partial_k\varphi_k)+[(\lambda+\mu)-\rho(A+B)]\partial_t\partial_t\partial_i(\partial_k\varphi_k)\\
&\quad+(\mu+\rho B)\partial_k\partial_k(\partial_t\partial_t\varphi_i)-\mu B\partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k\varphi_i)-\rho\partial_t\partial_t\partial_t\partial_t\varphi_i=0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

当

$$A=-\frac{\mu}{\rho},\qquad B=\frac{\lambda+2\mu}{\rho} \tag{2.6}$$

时，(2.5)式等号左端第一项和第二项为零，此时(2.5)式化为

$$-\frac{\lambda+3\mu}{\rho}\partial_k\partial_k(\partial_t\partial_t\varphi_i)+\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\rho^2}\partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k\varphi_i)+\partial_t\partial_t\partial_t\partial_t\varphi_i=0 \tag{2.7}$$

今以

$$c_P=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\qquad c_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.8}$$

分别表示纵波和横波波速，并代入(2.7)式，得

$$[c_P^2c_S^2\partial_l\partial_l(\partial_k\partial_k)-(c_P^2+c_S^2)\partial_k\partial_k(\partial_t\partial_t)+\partial_t\partial_t\partial_t\partial_t]\varphi_i=0$$

即

$$(c_P^2\partial_l\partial_l-\partial_t\partial_t)(c_S^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\varphi_i=0 \tag{2.9}$$

(2.9)式表明函数φ_i满足双重波动方程．但要注意，每一重波动方程中的波速不同．

至此，将(2.6)式，(2.8)式及(2.4)式代入(2.2)式，可得弹性动力学的Sternberg-Eubanks-Gurtin通解[10]：

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_i=(c_P^2-c_S^2)\partial_i\phi-(c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\varphi_i\\
&\phi=\partial_k\varphi_k,\qquad c_P^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad c_S^2=\frac{\mu}{\rho}\\
&(c_P^2\partial_l\partial_l-\partial_t\partial_t)(c_S^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\varphi_i=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.10}
$$

式中φ_i称为Somigliana势．

由(2.10)式可以看出，弹性静力学的Boussinesq-Галёркин解是它的特例．

三、弹性动力学的第二种通解

弹性动力学的通解(2.10)式还可以进一步变换．设

$$\psi_i=(c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\psi_i \tag{3.1}$$

由(2.9)式可得

$$(c_S^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\psi_i=0 \tag{3.2}$$

即ψ_i为满足d'Alembert方程(3.2)式的横波函数．

利用(2.4)式，可以得到

$$(c_P^2\partial_l\partial_l-\partial_t\partial_t)\phi=\partial_k(c_P^2\partial_l\partial_l-\partial_t\partial_t)\varphi_k$$

即可得方程

$$(c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\phi=\partial_k\psi_k \tag{3.3}$$

在波函数$\psi_k(x_j,\ t)$中，将自变量x_j换为$\left(\dfrac{c_S}{c_P}\right)x_j$，则可得到方程(3.3)式的解为

$$\phi=\phi_0+\frac{1}{2c_Pc_S}x_k\psi_k\left(\frac{c_S}{c_P}x_j,t\right) \tag{3.4}$$

式中ϕ_0为满足d'Alembert方程

$$(c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\phi_0=0 \tag{3.5}$$

的纵波函数．(3.4)式是(3.3)式的解的证明，可以将d'Alembert算子作用到(3.4)式上直接得到：

$$(c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\phi=(c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\phi_0+\frac{1}{2}x_k\left(\frac{1}{c_Pc_S}\right)(c_S^2\partial_l\partial_l-\partial_t\partial_t)\psi_k+\partial_k\psi_k$$

（不记宗量的ψ_k，其自变量仍为x_j,t）

于是，又有

定理2 均匀各向同性介质中弹性动力学以位移表示的运动方程即Lamé方程的通解，可以用下述组合的三个横波函数ψ_i和一个纵波函数ϕ_0来表示：

$$\left.\begin{aligned}
&u_i=(c_P^2-c_S^2)\partial_i\phi-\psi_i(x_j,t)\\
&\phi=\phi_0+\frac{1}{2c_Pc_S}x_k\psi_k\left(\frac{c_S}{c_P}x_j,t\right)\\
&c_P^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad c_S^2=\frac{\mu}{\rho}\\
&(c_S^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\psi_i=0,\ (c_P^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\phi_0=0
\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

可以看出，弹性静力学的Neuber–Папкович解是定理2的特例．

需要注意的是，双重波函数φ_i和波函数ψ_i及ϕ_0的选取，必须根据问题的具体情况和边界条件及初始条件适当选择．适当的波函数，能使弹性动力学问题全部解决．

进而，我们由文[11]和[12]知道，如果$\psi_a(a=0、1、2、3)$满足波动方程

$$\left(\sum_1^4\sigma^aK_a\right)\psi=0 \tag{3.7}$$

式中$\sigma^k(k=1、2、3)$为Pauli矩阵，σ^4为2×2单位矩阵，$K_a=-i\partial_a$，$K_4=iK_0=\frac{1}{c}\partial_t$，$c$可以是$c_P$或$c_S$；则$\psi_a$一定满足方程(3.2)式和(3.5)式．因此如果我们将ψ_a的定义域解析延拓到复平面，就可以用场方程(3.7)式来代替(3.2)式和(3.5)式了．

用类似本文的方法，还可以得到蠕流动力学的两类通解[13]．

参考文献

[1] 钱伟长、叶开源，弹性力学，科学出版社，(1956)．

[2] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшип，连续介质力学，彭旭麟译，人民教育出版社，(1958)．

[3] 湯川秀樹，现代物理学の基礎[第1版]，卷一，古典物理学，岩波书店，(1975)．

[4] Boussinesq. J., Applications des potentiels a' l'étnde de l'equilibre et du mouvement des sdides élastiques, Paris (1885).

[5] Галёркин Б. Г., К общему решению задачи теории упругости в трех измерениях с помощью функций напряжении и меремещений, *Дан СССР*, серия A (1931), 281—286.

[6] Папкович П. Ф., Обзор некоторых общих решений основных дифференциальных уравнений покоя изотронного упругого тела, *ПММ*., 1, 1, (1937), 117—132.

[7] Крутков Ю. А., Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости, *М*., *АН*. *СССР*, (1949).

[8] 沈惠川，动力应力函数张量及弹性静力学的通解，中国科学技术大学学报，**14**，增刊1，JCUST 84016，(1984)，95—102.

[9] 沈惠川，动力应力函数张量，应用数学和力学，**3**，6(1982)，829—834.

[10] Eringen. A. C. and E. S, Suhubi，弹性动力学 Vol.2，p12，戈革译，石油工业出版社，(1983).

[11] 沈惠川，单色弹性波谱的分裂，应用数学和力学，**5**，4，(1984) 541—551.

[12] 沈惠川，弹性基上的薄板在测向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，**5**，6，(1984)，817—827.

[13] 沈惠川，均匀不可压缩蠕流动力学的通解，自然杂志，**7**，10(1984)，799；**7**，12(1984)，940.

General Solution of Elastodynamics

Shen Hui-chuan

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

The elastodynamic problem is investigated due to Stokes-Helmholtz separation of the vector with time, and the general solutions of Lamé equation are derived. The medium is assumed to be homogeneous and isotropic.