

应力波放大器二维数值分析*

周光泉 刘孝敏

(中国科技大学, 1984年8月14日收到)

摘 要

运用动态有限元方法, 对应力波在锥形应力波放大器中传播特性进行了二维数值分析, 对影响透射波放大系数和波形的几何因素、输入脉冲形状、脉冲升时等进行了讨论, 可供应力波铆接器设计之参考。计算结果与在 Hopkinson 杆上实验测得值以及特征线计算值进行了比较, 其与实验结果吻合程度是令人相当满意的, 与一维特征线方法相比, 其计算精度也得到较大改善, 特别是在透射波峰值压力附近。

一、引 言

利用弹性波在横截面收缩杆中传播时其强度会增强的特点研制成的所谓应力波放大器^[1-2], 是应力波开发应用中的一个重要元件, 在国外已被应用于某些特殊工艺中。在我国由于工业和国防等方面的急需, 特别是在航空事业中高强度合金材料的铆接已成为一个急待解决的技术课题, 应用应力波放大器原理研制新型铆接装置已势在必行。王礼立等在一维假定下运用特征线方法对应力波在锥形放大器中传播特性进行了理论分析, 并修正了国外专利中的有关计算公式^[3-4], 与实验结果比较, 有着相当好的一致, 但在透射波峰值应力附近相差较大, 估计这是由于忽略横向惯性效应, 采用了一维应力波近似理论的结果。这就自然想到对该问题进行二维理论分析。等截面弹性杆中应力波传播的二维分析, 自 Pochhammer 的著名论文发表以来^[5], 一些作者从数值分析的角度陆续发表了一些文章, 估计了波在杆中传播时横向惯性的影响^[6]。但在变截面杆中波传播问题的二维分析尚不多见, 作者本人曾在美国就波沿台阶杆传播问题, 在无屈服弹/粘塑性本构理论^[7-9]假设下通过有限元方法进行有关的数值分析, 讨论了动态应力集中问题, 以及几何、物理诸因素的影响等。

本文采用有限元法分析研究了锥形应力波放大器中应力波的传播特性, 讨论了横向惯性影响, 与一维特征线解进行了比较, 探讨了应力波放大器几何尺寸、输入波形状等因素对于放大效果的影响, 最后与 Hopkinson 杆上实测结果作了比较。

二、计算方案简介

假设物体 Ω 占据一有限的欧几里德空间, 且有体力和面力作用其上, 该物体的运动为

* 刘人怀推荐。

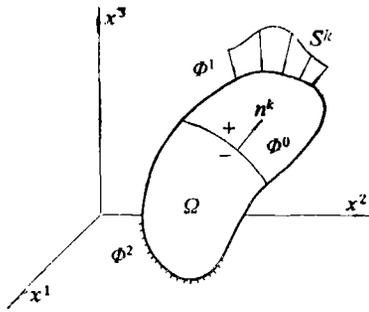


图 1

$x^i = x^i(X^a, t)$, X^a 为物质坐标, x^i 为欧拉坐标, (图 1).

根据虚功原理, 可得:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \rho \ddot{x}^k \delta x_k dV + \int_{\Omega} t^{km} \delta x_{k,m} dV - \int_{\Omega} \rho f^k \delta x_k dV - \oint_{\Phi^1} S^k \delta x_k da = 0 \quad (2.1)$$

其中 ρ ——质量密度, \ddot{x}^k ——加速度, t^{km} ——Cauchy 应力, f^k ——体力密度, S^k ——面力, 逗号表示协变导数.

由奥-高定理可得运动微分方程如下:

$$t_{;m}^{km} + \rho f^k = \rho \ddot{x}^k \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内})$$

接触间断上的跳跃条件为:

$$(t_{+}^{km} - t_{-}^{km}) n_m = 0 \quad (\text{在 } \Phi^0 \text{ 上})$$

面力边界条件为:

$$t^{km} n_m = S^k(t) \quad (\text{在 } \Phi^1 \text{ 上})$$

位移边界条件为:

$$x^i(X^a, t) = \kappa^i(t) \quad (\text{在 } \Phi^2 \text{ 上})$$

仅仅考虑 $t=0$ 时刻为均匀的初始条件:

$$x^i(X^a, 0) = X^a \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内})$$

$$\dot{x}^i(X^a, 0) = v^i(X^a) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内})$$

空间离散采用有限元方法. 为了避免构造刚度矩阵, 下面我们引入基函数的概念. 基函数 φ^a 由节点 a 周围的所有单元的插值函数所确定. 如果用 g^a 代表函数 g 的节点值, 则有:

$$g = \sum_{a=1}^A g^a \varphi^a(x^a)$$

其中 A 为节点总数. 基函数的集合 $\{\varphi_k^a\} = \{\varphi^a\} \times \{\varphi^a\} \times \{\varphi^a\}$ 定义了变分 δx_k 的一个 $3A$ 维子空间.

利用基函数, 整个物体的运动可表为:

$$x^k = \sum_{a=1}^A x^{ka}(t) \varphi_k^a \quad (\text{对 } k \text{ 不求和})$$

速度可表为:

$$\dot{x}^k = \sum_{a=1}^A \dot{x}^{ka}(t) \varphi_k^a \quad (\text{对 } k \text{ 不求和})$$

加速度可表为:

$$\ddot{x}^k = \sum_{a=1}^A \ddot{x}^{ka}(t) \varphi_k^a + \left\{ \begin{matrix} k \\ pm \end{matrix} \right\} v^p v^m \quad (\text{对 } k \text{ 不求和})$$

在基函数构成的子空间中虚功原理变成如下形式:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{x}^k \varphi_k^a dV + \int_{\Omega} t^{km} \varphi_{k,m}^a dV - \int_{\Omega} \rho f^k \varphi_k^a dV - \oint_{\Phi^1} S^k \varphi_k^a da = 0 \quad \{k, a\} \cup \Phi^1 \quad (2.2)$$

在轴对称和平面应变情况下, 问题简化为二维, 采用四节点等参数四边形单元进行空间

离散 (图 2), 同时引进双线性等参数插值函数:

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= (1-a)(1-b)/4 \\ \varphi^2 &= (1+a)(1-b)/4 \\ \varphi^3 &= (1+a)(1+b)/4 \\ \varphi^4 &= (1-a)(1+b)/4\end{aligned}$$

则任意函数 g 在单元内的值可由下式给出:

$$g = \sum_{i=1}^4 g^i \varphi^i(a, b)$$

其中 g^i 为函数 g 的节点值.

特别是坐标 r, z 与局部坐标 a, b 有如下关系:

$$r = \sum_{i=1}^4 r^i \varphi^i(a, b), \quad z = \sum_{i=1}^4 z^i \varphi^i(a, b)$$

当节点 1 周围的所有单元都被考虑后, 则由每个单元内的插值函数可求得基函数 φ^1 . 在基函数的名义下, 我们可以把计算组织到“一个单元接着一个单元”的过程中, 这时 Galerkin 方程之一变成:

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Omega_n} \rho \ddot{x}^k \theta_k^n dV + \int_{\Omega_n} t^{im} \theta_{i,m}^n dV - \int_{\Omega_n} \rho f^k \theta_k^n dV - \oint_{\phi_n^1} S^k \theta_k^n dS \right\} = 0 \quad (\text{对 } k \text{ 不求和}) \quad (2.3)$$

其中 $\theta_k^n = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \varphi_k^3, \varphi_k^4) |_{\Omega_n}$, N 为单元总数.

利用如下记号, 方程 (2.3) 可写为更简明的形式:

$$\begin{bmatrix} \theta_1^n \\ \theta_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^1 & 0 & \varphi^2 & 0 & \varphi^3 & 0 & \varphi^4 & 0 \\ 0 & \varphi^1 & 0 & \varphi^2 & 0 & \varphi^3 & 0 & \varphi^4 \end{bmatrix} = [A(a, b)] \quad (2 \times 8)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,1}^n \\ \theta_{3,3}^n \\ \theta_{2,2}^n \\ \theta_{1,3}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ 1/r & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^n \\ \theta_3^n \end{bmatrix} = [d] [A] = [B] \quad (4 \times 2 \quad 2 \times 8 \quad 4 \times 8)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^3 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} u_1 \\ \ddot{w}_1 \\ u_2 \\ \ddot{w}_2 \\ u_3 \\ \ddot{w}_3 \\ u_4 \\ \ddot{w}_4 \end{bmatrix} = [A] [\ddot{q}] \quad (8 \times 1)$$

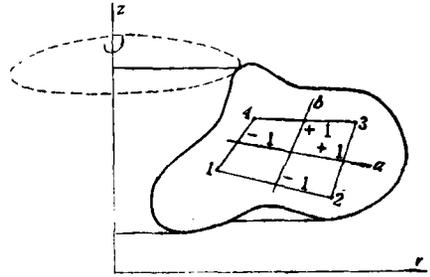


图 2

$$\begin{bmatrix} t^{11} \\ t^{33} \\ t^{22} \\ t^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{rr} \\ t_{zz} \\ t_{\theta\theta} \\ t_{rz} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 4 \times 1 \\ [t] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rho f^1 \\ \rho f^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho f_r \\ \rho f_z \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2 \times 1 \\ [f] \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} S^1 \\ S^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2 \times 1 \\ [S] \end{matrix}$$

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Omega_n} \rho [A]^T [A] dV [\ddot{q}] + \int_{\Omega_n} [B]^T [t] dV - \int_{\Omega_n} [A]^T [f] dV - \oint_{\phi_n^i} [A]^T [S] dS \right\} = 0 \quad (2.4)$$

这就是一个单元接着一个单元的算式。进一步可将上式简写为：

$$[M] \ddot{q} = F - T$$

其中

$$[M] = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \rho [A]^T [A] dV \quad (\text{质量矩阵})$$

$$F = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Omega_n} [A]^T [f] dV + \oint_{\phi_n^i} [A]^T [S] dS \right\}$$

$$T = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} [B]^T [t] dV$$

在时刻 j 运动方程是：

$$[M] \ddot{q}_j = F_j - T_j$$

即

$$\ddot{q}_j = [M]^{-1} (F_j - T_j)$$

采用中心差分法可得速度和位移差分表达式如下：

$$p_{j+\frac{1}{2}} = p_{j-\frac{1}{2}} + (\Delta t_{j-\frac{1}{2}} + \Delta t_{j+\frac{1}{2}}) [M]^{-1} (F_j - T_j) / 2$$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t_{j+\frac{1}{2}} p_{j+\frac{1}{2}}$$

以上就是二维有限元大型编码程序 HONDO 的基本思想^[10-11]。本文采用 HONDO 对所研究的问题进行了二维数值分析，在运用中我们对程序作了某些改进。

三、程序的校验

HONDO 是第一个用有限元方法编成的有关波传播的大型编码程序，更因为我们在使用中对其进行了某些改进，因此首先对程序本身进行一些计算与分析以显示其所能达到的精确度看来是必要的。为此我们在一维假定下计算了应力波沿放大器传播问题（图3），并与特征线解进行了比较。

设初始时刻有一梯形端部载荷作用其上（图4~5右上角）。

杆材为不锈钢，其材料常数为：

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 7.8 \text{g/cm}^3 \\ E &= 2.0 \times 10^{12} \text{ dyn/cm}^2 \\ \nu &= 0.0 \end{aligned}$$

其中 ρ_0 , E , ν 分别是密度、杨氏模量、泊松比。

其他数据为：

$$D/L=1, \quad d/D=1/3, \quad L=1\text{cm}$$

$$p_0=1.0 \times 10^9 \text{ dyn/cm}^2$$

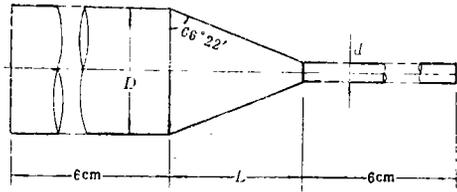


图 3

因为问题是轴对称的，因此只要研究杆的一半就足够了，在计算中，我们共划分了 560 个单元（等参数四边形单元），705 个节点。

计算结果按无量纲参数进行整理。图4和图5分别表示了 $z=4L$ 截面上和 $z=7L$ （锥顶）处应力变化曲线，为了比较起见，图中用虚线（或点线）画出了特征线结果。比较数值结果与特征线结果，我们发现它们有着相当好的一致性。如果将单元再细分一些，其吻合程度可望得到进一步提高。

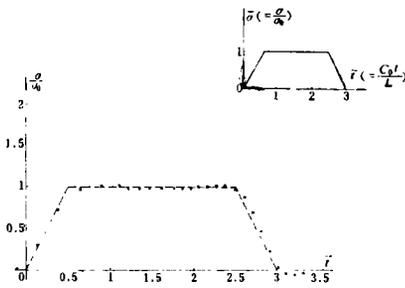


图 4

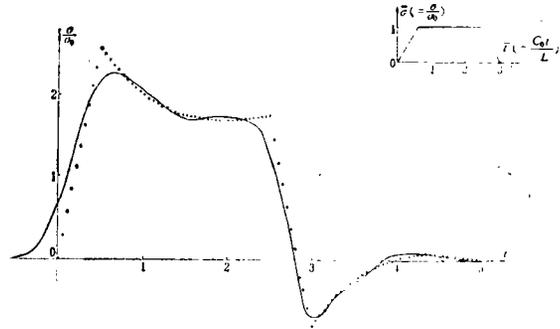


图 5

四、计算结果与讨论

为了探讨应力波放大器二维效应，我们分别针对三种不同的输入脉冲（梯形、矩形、三角形）以及不同的 $\alpha (=D/L)$ 值进行了计算，泊松比 ν 取作 0.3, $d/D=1/3, L=1\text{cm}$ 。计算结果同样按无量纲参数进行整理。除了 $D/L=1/5$ 外，网格划分均为 560 单元，705 个节点（前者为 280 单元，423 个节点）。

首先我们来考察直杆部分，当计及二维效应（即取 $\nu=0.3$ ）时，其波形随时间变化表示在图 6 和图 7 之中，虚线代表一维理论结果，从图中明显看出，一维结果只是使输入脉冲在杆中发生平移而不改变其形状，即梯形的为梯形，矩形仍为矩形，但是二维计算同考虑到横向惯性的影响，波形发生很大的弥散，可以看出杆越粗（见图 6）弥散现象愈烈，反之杆越细弥散效应愈微弱，以致很接近一维理论结果。从实验曲线与理论结果的比较中也可以看出应力波在杆中传播不可能是一维假定下所得到的规则形状，而是或多或少存在弥散现象。由此说明对应力波放大器进行二维数值分析以便更好地指导应力波铆接新工艺的发展，看来是势在必行的。

我们知道，在应力波放大器中，起控制因素的应该是锥形段的几何尺寸，即 D/L 和 d/D

的大小, 以及输入脉冲的形状, 因为经费的原因, 在我们的计算中 d/D 始终被固定为 $1/3$ 。令 $\alpha=d/L$, 则我们首先考察了在二维计算中不同 α 的影响, 图 8 表示了输入脉冲为梯形脉冲时

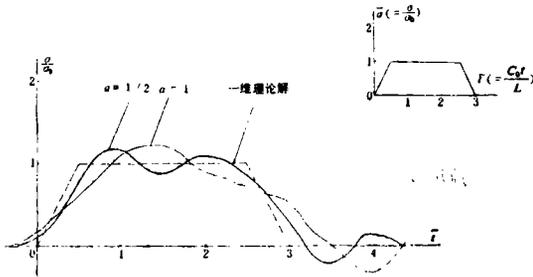


图 6

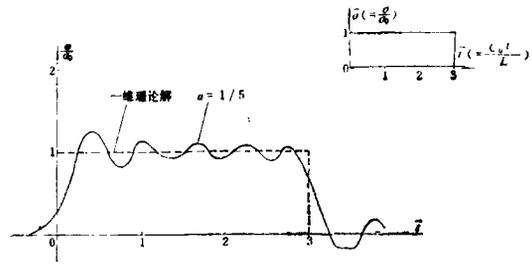


图 7

在锥顶的轴线附近所得结果, 可以看出 α 有着明显的影响, α 愈小放大倍数愈高, 例如当 $\alpha=2, 1, 1/2$ 时, 放大倍数分别为 $1.784, 2.227$ 和 2.548 。且在 $\alpha=1/2$ 时还可明显观察到二次压缩脉冲, 其强度仍可达初始脉冲强度的 1.754 倍, 显然, 这对于应力波铆接工艺是有益的。在 d/D 固定, 锥长 L 不变情况下, α 愈小表明杆愈细, α 愈大则杆愈粗, 这就是说, 为了获得较好的铆接效果, 将杆径适当作得小一些, 看来是适宜的。

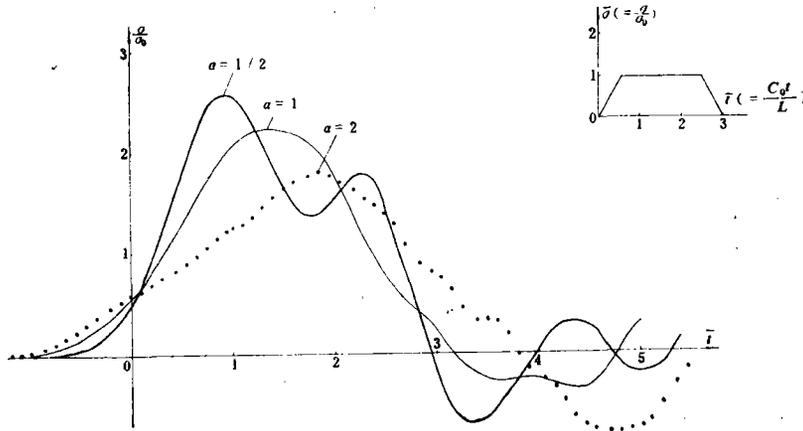


图 8

图9, 10, 11, 12分别表示了某些 α 值情况下矩形、梯形、三角形脉冲二维计算结果与一维理论解的比较, 首先可以看出二维结果与一维理论值之间有着显著的区别, 一般说来, 二维曲线的峰值要比一维时为低, 同时二维曲线表现出明显的振荡, 但其总的变化趋势还是和一维时一致的。其次, 我们看出, 凡是一维曲线呈尖角的地方, 二维曲线均将之圆滑化, 因此, 在二维曲线中不再有尖角出现, 应该说这是更为合理的。此外还可以看出(见图13), 在同样的几何条件下, 如 $\alpha=d/L=1/2, d/D=1/3$ 时, 不同形状的输入脉冲(矩形, 梯形, 三角形), 即使其幅度和持续时间一样, 但其放大倍数 σ/σ_0 相差甚远, 矩形脉冲的放大倍数为 2.668 , 梯形I为 2.548 , 梯形II为 2.277 , 三角形为 1.834 , 可见在进行应力波铆接时, 尽可能缩短脉冲上升时间, 使输入脉冲愈接近矩形则愈为有利。

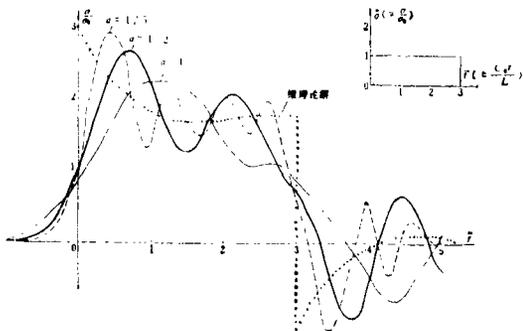


图 9

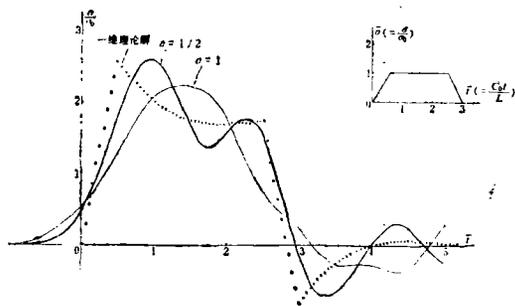


图 10

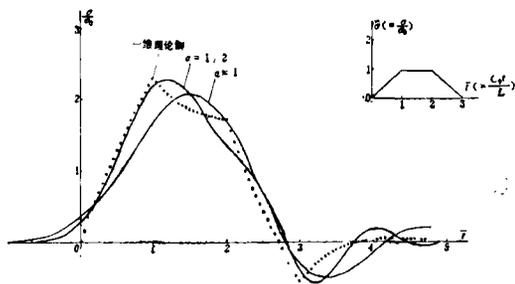


图 11

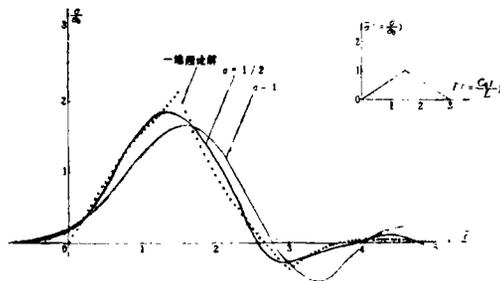


图 12

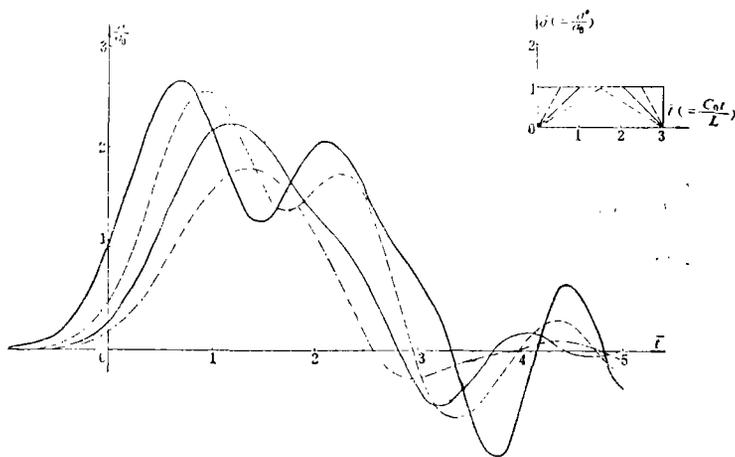


图 13

五、与实验结果的比较

在文献[4]中，将一维特征线计算结果与在 Hopkinson 压杆上对应力波放大器的实验结果作了比较研究，总的来说，计算值与实测值有相当好地一致，仅在透射波峰值应力附近相差较大。为了进一步改进计算结果，本文采用了二维计算方案，计及了横向惯性效应。为与文献[4]一致起见，实验用应力波放大器的形状尺寸以及实验的典型示波记录沿用该文的数据和结果。对应力波铆接研究来说最关心的是第一个压缩脉冲，在计算中，我们将实测入射波波

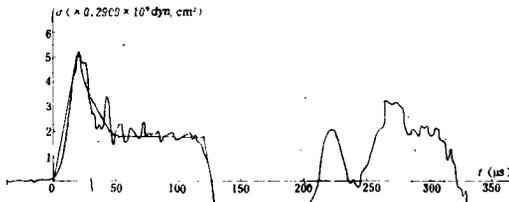


图 14

形记录曲线的第一个脉冲作了一些修正, 图14中入射波形部分的小圆点表示了这种情况. 化作无量纲形式则如图15中虚线所示形状. 根据这一实测入射波用有限元法进行了二维数值计算, 图14中实线表示了由这个计算所得的放大器小端透射波波形, 为比较起见图中还给出了特征线计算结果(点线). 与特征线结果相比, 波幅峰值有所下降, 而透射波的恒应力段(特征线结果), 这时由于计及横向惯性效应的结果, 表现出了某些振荡, 但其平均值仍然等于特征线恒应力值.

为了与实测结果相比较起见, 我们把无量纲坐标中的透射波计算结果转画到示波记录曲线上, 如图16所示. 图中小黑点

对应于本计算结果, 小四方点为特征线计算值. 从图中可以看出二维计算结果与实验测定吻合程度是相当好的, 这不但表现在透射波的上升阶段, 而且在特征线算得的透射波恒值应力段也充分地显示了横向惯性效应的影响, 如果将有限元网格再分得细一些, 计算结果可望与实测曲线将符合得更好. 与特征线计算结果相比较, 透射波峰值压力也有所下降而更趋近实验测得值, 但仍有一定差别.

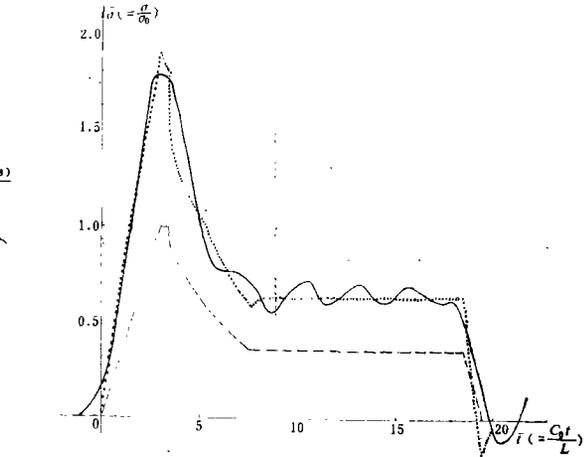


图 15

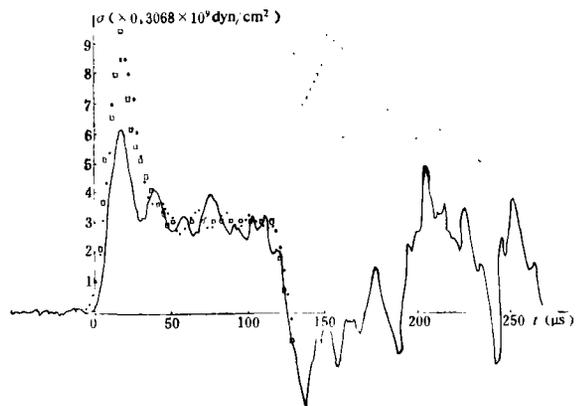


图 16

六、结 论

根据上面的分析, 不难得出如下几点看法

1) 锥体径长比 α 对放大效果影响很大, α 愈小放大倍数愈大, 反之, 随着 α 增大, 不但放大倍数下降, 而且当 α 大到一定程度, 比如 $\alpha=2$ 时, 由卸载引起的拉应力反而增大, 这对放大器寿命带来不利影响, 因此, 在可能情况下, 应使得锥体径长比尽量地小.

2) 由相同脉冲宽度和幅度的三角形、梯形、矩形脉冲即不同上升时间的脉冲的计算结果表明, 脉冲升时大小直接影响力波放大器的放大效果, 升时越短放大效果越好, 因此建议调节放电参数和锥体尺寸, 使应力脉冲接近矩形.

3) 在 α 较小, 即杆子较细时, 二维计算结果无论在直杆部分还是在锥形段均与一维理论解或一维特征线结果相接近, 考虑横向惯性后只是使得计算结果在一维解附近发生微小的振荡。由同样的观察不难看出, 当 α 值较大时, 二维结果与一维解的偏差是相当可观的。因此在 α 较小(例如 $\alpha \leq 1/2$)时, 可忽略横向惯性效应将问题当一维处理。反之则必须计及横向惯性进行二维数值分析。

4) 二维计算结果与实测波形比, 其一致性较之一维特征线计算有进一步的改进, 尤其在特征线解表现恒值的部分如今也充分地显露了横向惯性效应而与实验结果更加接近, 波峰值与实测值之间的偏差也有所降低。

参 考 文 献

- [1] Leftheris, B. P., *Method and Apparatus for Deforming a Metal Workpiece, for Upsetting Rivets and for Blind Reveting*, U. S. Patent 3731370 (1973).
- [2] Leftheris, B. P., *Method and Apparatus for Deforming Metal*, U. S. Patent 3824824 (1974).
- [3] 王礼立、李远清、胡时胜、奉孝忠, 钛合金应力波铆接的可行性试验, 中国科技大学学报, (1983).
- [4] 王礼立、胡时胜, 应力波在锥形应力波放大器中传播的研究, 中国科技大学学报, (1983).
- [5] Pochhammer, L., *Journal für Mathematik (Greele)*, Bd. 81 (1876), 324 (See Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944, P. 289).
- [6] Bertholf, L. D., Feasibility of two-dimensional numerical analysis of the Split-Hopkinson pressure bar system, *JAM*, 3 (1974), 137—144.
- [7] Zhou, G. Q., Y. Chen, Numerical solutions of the dynamic responses of an elastic-viscoplastic bar to end loads, *Proceedings of Ninth U. S. National Congress of Applied Mechanics*, Symposium held at Cornell Univ, (1982, 6).
- [8] Zhou, G. Q., H. Ghoneim, Y. Chen, Numerical Experiments with Two-Dimensional Elastic-Visoplastic Bars, *International Journal of Computer and Structure*, 18,4 (1984), 591—601.
- [9] 周光泉, 关于无屈服粘塑性理论, 爆炸与冲击杂志, 4(1983), 25—34.
- [10] Key, S. W., HONDO—A Finite Element Computer Program for Large Deformation Dynamic Response of Axisymmetric Solids, SLA-74-0039 (1974).
- [11] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Mill(1971).

Two-Dimensional Numerical Analysis of Stress - Wave - Amplifier

Zhou Guang-quan Liu Xiao-min

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and
Technology of China, Hefei)*

Abstract

Using dynamic finite element method, the propagation of stress waves in two-dimensional conically shaped stress-wave-amplifiers has been analysed. The effects of geometrical factors, input-pulse shape and pulse rise-time on amplifying multiplication as well as wave shape of transmission waves are discussed. The consistency between numerical results and experimental results based on Hopkinson bar is satisfactory. The numerical accuracy has been improved comparing with characteristic method.