应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘性流体运动自型问题的分析解*

袁镒吾

（中南矿冶学院，1984年4月23日收到）

摘　要

本文用逐步逼近法得到了粘性流体运动的自型问题的微分方程(1.1～1.4)的分析解．Проснак(1969)用小参数法也得到了这些方程的解．但他把控制方程变换成为一组线性变系数微分方程．本文则把控制方程变换成为线性常系数微分方程．

一、问题的提出

1．引言　粘性流体运动自型问题的常微分方程为[1]

$$\varphi'''+\alpha\varphi\varphi''+\beta(1-\varphi'^2)=0,\qquad \varphi=\varphi(\eta) \tag{1.1}$$

边界条件为

$$\varphi(0)=c_0,\qquad \varphi'(0)=c_1,\qquad \varphi'(\infty)=c_3 \tag{1.2～1.4}$$

这里α，β，c_0，c_1及c_3——已知常数．c_2则是待决定的，它由下式决定

$$\varphi''(0)=c_2 \tag{1.5}$$

式(1.1)～(1.4)用计算机容易求得其数值解．本文则用逐步逼近法求其分析解．

文献[1]用小参数法也求得了式(1.1)～(1.4)的分析解．但是文献[1]把问题最后归结为求解一系列变系数线性常微分方程．本文则把问题最后归结为求解常系数线性常微分方程．

2．常数的物理意义　由于$\eta=0$及$\eta=\infty$分别对应于壁面上和粘流外部边界的情形，故式(1.2)～(1.5)中的常数将是这样的：

c_0表示垂直于壁面的速度分量，如果壁面是不可渗透的，则$c_0=0$．

c_1表示壁面的切向分速，即滑动速度，如无滑动，则$c_1=0$．

c_3表示粘流外部边界速度，如果流动是非粘性的，则

$$c_1=c_3 \tag{1.6}$$

c_2表示壁面摩擦，即壁的切向应力．

α及β主要取决于流动的几何性质[1]．

3．化简　取

$$c_3=1 \tag{1.7}$$

当无粘性时，$c_1=c_3=1$，即是说，壁面的切向分速等于粘流外部边界速度，此时，显然有$\varphi''(\eta)\equiv0$．所以，当滑动速度甚大时，可以认为$\varphi''(\eta)$很小，设其数量级为ε．式(1.1)中

* 钱伟长推荐．

其它的函数φ，φ'及φ'''的数量级则假设为1。令

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n \tag{1.8}$$

并令φ_0，φ_1，φ_2，…，φ_n的数量级分别为1，ε，ε^2，…，ε^n。

各函数的数量级记为

φ_0	φ_1	φ_2	φ_0'	φ_1'	φ_2'	φ_0''	φ_1''	φ_2''	φ_0'''	φ_1'''	φ_2'''
1	ε	ε^2	1	ε	ε^2	ε	ε^2	ε^3	1	ε	ε^2

把式(1.1)改写成下式，并记下各项的数量级（设β不接近于0）得

$$\underset{1}{\varphi'''}+\underset{1}{\beta(1-\varphi'^2)}=\underset{\varepsilon}{-\alpha\varphi\varphi''}$$

将式(1.8)代入上式得

$$\begin{aligned}&\varphi_0'''+\varphi_1'''+\varphi_2'''+\cdots+\beta[1-(\varphi_0'+\varphi_1'+\varphi_2'+\cdots)^2]\\&\quad=-\alpha(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots)(\varphi_0''+\varphi_1''+\varphi_2''+\cdots)\end{aligned} \tag{1.9}$$

边界条件为

$$\begin{aligned}&\varphi_0(0)=c_0,\ \varphi_n(0)=0,\ (n=1,2,3,\cdots)\\&\varphi_0'(0)=1,\ \varphi_1'(0)=c_1-1,\ \varphi_n'(0)=0,\ (n=2,3,4,\cdots)\\&\varphi_0'(\infty)=1,\ \varphi_n'(\infty)=0,\ (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned} \tag{1.10}$$

于是问题归结为在边界条件(1.10)下，求解式(1.9)。我们只求其近似解。

二、问题的求解

1. **现求式(1.9)及(1.10)的零级近似解** 在式(1.9)中，忽略数量级高于ε的各项得

$$\varphi_0'''+\beta(1-\varphi_0'^2)=0 \tag{2.1}$$

式(2.1)的满足边界条件(1.10)的解为

$$\varphi_0=c_0+\eta \tag{2.2}$$

它与文献[1]的零级近似解是一致的。它相应于非粘性问题的解。

2. **求一级近似解** 在式(1.9)中忽略数量级为ε^2及更高阶的各项得

$$\varphi_0'''+\varphi_1'''+\beta[1-\varphi_0'^2-2\varphi_0'\varphi_1']=-\alpha\varphi_0\varphi_0'' \tag{2.3}$$

将式(2.2)代入上式得

$$\varphi_1'''-2\beta\varphi_1'=0 \tag{2.4}$$

其解为

$$\varphi_1'=a_1\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)+a_2\exp(\sqrt{2\beta}\,\eta)$$

式中a_1及a_2为积分常数。为了使$\eta\to\infty$时，切向速度v_x不为∞，应取$a_2=0$。再由边界条件(1.10)，最后求得

$$\varphi_1'=(c_1-1)\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta) \tag{2.5}$$

$$\varphi_1=\frac{(c_1-1)}{\sqrt{2\beta}}[-\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)+1] \tag{2.6}$$

3. **求二级近似解** 求二级近似解时，我们忽略数量级为ε^3的各项，注意到式(1.9)的右边的数量级为ε，我们用$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2$代入式(1.9)的左边，而用$\varphi=\varphi_0+\varphi_1$代入式(1.9)的右边，略去数量级为$\varepsilon^3$的各项，我们得到决定$\varphi_2$的方程为

$$\varphi_0'''+\varphi_1'''+\varphi_2'''+\beta[1-\varphi_0'^2-\varphi_1'^2-2\varphi_0'\varphi_1'-2\varphi_0'\varphi_2']$$

$$=-\alpha\varphi_0\varphi_0''-\alpha\varphi_0\varphi_1''-\alpha\varphi_1\varphi_0'' \tag{2.7}$$

将式(2.2)，(2.6)及(2.5)代入上式得决定 φ_2 的微分方程

$$\varphi_2''-2\beta\varphi_2'-(c_1-1)^2\beta\exp(-2\sqrt{2\beta}\,\eta)$$
$$-\alpha(c_0+\eta)(c_1-1)\sqrt{2\beta}\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)=0 \tag{2.8}$$

式(2.8)是一个常系数非齐次二阶线性常微分方程，其满足边界条件(1.10)的解为

$$\varphi_2'=\left[-\frac{\alpha(c_1-1)}{4}\eta^2-\frac{\alpha(c_1-1)\sqrt{2\beta}}{4\beta}\left(\frac{1}{2}+c_0\sqrt{2\beta}\right)\eta\right.$$
$$\left.-\frac{(c_1-1)^2}{6}\right]\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)+\frac{(c_1-1)^2}{6}\cdot\exp(-2\sqrt{2\beta}\,\eta) \tag{2.9}$$

由式(2.2)，(2.6)及(2.9)容易求得 $\varphi_0''(0)$，$\varphi_1''(0)$ 及 $\varphi_2''(0)$。由式(1.5)于是求得在二级近似下

$$c_2=\varphi''(0)=\varphi_0''(0)+\varphi_1''(0)+\varphi_2''(0)$$
$$=-(c_1-1)^2\frac{\sqrt{2\beta}}{6}-(c_1-1)\left(\frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{8\beta}+\frac{\alpha c_0}{2}+\sqrt{2\beta}\right) \tag{2.10}$$

当 $\alpha=1$，$\beta=1$，$c_0=0$ 时，由式(2.10)得

$$c_2=-0.2357(c_1-1)^2-1.591(c_1-1) \tag{2.11}$$

当 $\alpha=2$，$\beta=1$，$c_0=0$ 时，由式(2.10)得

$$c_2=-0.2357(c_1-1)^2-1.7675(c_1-1) \tag{2.12}$$

当 $\alpha=1$，$\beta=1$，$c_1=0$ 时，由式(2.10)得

$$c_2=1.3551+c_0/2 \tag{2.13}$$

4. **求三级近似解** 将式(1.8)代入式(1.9)，略去数量级为 ε^4 的各项得

$$\varphi_0'''+\varphi_1'''+\varphi_2'''+\varphi_3'''+\beta[1-\varphi_0'^2-\varphi_1'^2-2\varphi_0'\varphi_1'-2\varphi_0'\varphi_2'-2\varphi_0'\varphi_3'-2\varphi_1'\varphi_2']$$
$$=-\alpha[\varphi_0\varphi_0''+\varphi_0\varphi_1''+\varphi_0\varphi_2''+\varphi_1\varphi_0''+\varphi_1\varphi_1''+\varphi_2\varphi_0'']$$

将式(2.2)，(2.6)及(2.9)代入上式得

$$\varphi_3'''-2\beta\varphi_3'=Q \tag{2.14}$$

$$Q=-\eta^3\cdot\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)\cdot\alpha^2(c_1-1)\frac{\sqrt{2\beta}}{4}-\eta^2\cdot\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)$$
$$\cdot\left[\alpha^2(c_1-1)\frac{3}{4}c_0\sqrt{2\beta}-\frac{1}{4}\alpha^2(c_1-1)\right]-\eta\cdot\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)$$
$$\cdot\left[-\alpha^2(c_1-1)\frac{3}{4}c_0-\frac{\alpha^2(c_1-1)\sqrt{2\beta}}{8\beta}+\frac{\alpha^2c_0^2(c_1-1)}{2}\cdot\sqrt{2\beta}\right.$$
$$\left.+\alpha\sqrt{2\beta}\frac{(c_1-1)^2}{6}\right]-\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)\left[-\alpha^2c_0^2\frac{(c_1-1)}{2}\right.$$
$$\left.-\alpha^2c_0(c_1-1)\frac{\sqrt{2\beta}}{8\beta}-\alpha(c_1-1)^2+\alpha\sqrt{2\beta}\frac{(c_1-1)^2}{6}\cdot c_0\right]$$
$$-\exp(-2\sqrt{2\beta}\,\eta)\left\{\frac{1}{2}\alpha\beta(c_1-1)^2\eta^2+\left[\alpha(c_1-1)^2\frac{\sqrt{2\beta}}{2}\right.\right.$$
$$\left.\cdot\left(c_0\sqrt{2\beta}+\frac{1}{2}\right)-\alpha\sqrt{2\beta}\frac{(c_1-1)^2}{3}\right]\eta-\beta(c_1-1)^2+\alpha(c_1-1)^2$$

$$+\frac{4\beta(c_1-1)^2}{3}+\frac{\beta}{3}(c_1-1)^3-\frac{\sqrt{2\beta}}{3}(c_1-1)^2\alpha c_0-\frac{\beta(c_1-1)^2}{3}\Big\}$$

$$+\frac{\beta}{3}(c_1-1)^3\cdot\exp(-3\sqrt{2\beta}\,\eta) \tag{2.15}$$

式(2.14)为常系数线性常微分方程，其满足边界条件(1.10)的解为

$$\begin{aligned}\varphi_3'=&a\cdot\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)+b\cdot\exp(\sqrt{2\beta}\,\eta)+(c\eta^4\\&+d\eta^3+e\eta^2+f\eta)\cdot\exp(-\sqrt{2\beta}\,\eta)+(g\eta^2+h\eta\\&+i)\cdot\exp(-2\sqrt{2\beta}\,\eta)+j\cdot\exp(-3\sqrt{2\beta}\,\eta)\end{aligned} \tag{2.16}$$

式中系数c，d，…，j由式(2.14)及(2.15)求得为

$$\left.\begin{aligned}
c=&\frac{1}{32}\alpha^2(c_1-1)\\
d=&\frac{\sqrt{2\beta}}{12\beta}\left[\alpha^2(c_1-1)\frac{3}{4}c_0\sqrt{2\beta}+\frac{1}{8}\alpha^2(c_1-1)\right]\\
e=&\frac{-\sqrt{2\beta}}{8\beta}\left[\frac{\sqrt{2\beta}}{16\beta}\alpha^2(c_1-1)-\alpha^2c_0^2(c_1-1)\frac{\sqrt{2\beta}}{2}-\alpha\sqrt{2\beta}\frac{(c_1-1)^2}{6}\right]\\
f=&-\frac{\sqrt{2\beta}}{4\beta}\left[\frac{1}{32\beta}\alpha^2(c_1-1)-\frac{1}{4}\alpha^2c_0^2(c_1-1)\right.\\
&-\frac{\alpha(c_1-1)^2}{12}+\frac{\alpha^2c_0^2(c_1-1)}{2}+\alpha^2c_0(c_1-1)\frac{\sqrt{2\beta}}{8\beta}\\
&\left.+\alpha(c_1-1)^2-\alpha\sqrt{2\beta}\frac{(c_1-1)^2}{6}\cdot c_0\right]\\
g=&-\alpha(c_1-1)^2/12\\
h=&\frac{1}{6\beta}\left[-\frac{11}{12}\alpha(c_1-1)^2\sqrt{2\beta}-\alpha(c_1-1)^2c_0\beta+\alpha\sqrt{2\beta}\cdot\frac{(c_1-1)^2}{3}\right]\\
i=&\frac{1}{6\beta}\left[-\frac{37}{18}\alpha(c_1-1)^2-\frac{\beta}{3}(c_1-1)^3-\frac{1}{3}\sqrt{2\beta}(c_1-1)^2\cdot\alpha c_0+\frac{4}{9}\alpha(c_1-1)^2\right]\\
j=&(c_1-1)^3/48
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

而系数a及b则由$\varphi_3'(0)=0$的条件及当$\eta\to\infty$时，φ_3'不为∞的条件求得为

$$a=-[i+(c_1-1)^3/48],\qquad b=0 \tag{2.18}$$

将式(2.9)及(2.16)对η积分，并利用边界条件(1.10)可求得$\varphi_2(\eta)$及$\varphi_3(\eta)$与式(2.2)及(2.6)一起构成所设问题的各级（0到三级）近似解。

将式(2.16)对η求导数，并利用式(2.18)可得

$$\varphi_3''(0)=f-\sqrt{2\beta}\,i+\sqrt{2\beta}(c_1-1)^3/48-3\sqrt{2\beta}\,j+h \tag{2.19}$$

当$c_0=0$，$\beta=1$，$\alpha=1$时，由式(2.19)可得

$$\varphi_3''(0)=0.0196(c_1-1)^3-0.0820(c_1-1)^2-0.0110(c_1-1) \tag{2.20}$$

当$c_0=0$，$\beta=1$，$\alpha=2$时，由式(2.19)得

$$\varphi_3''(0)=0.0196(c_1-1)^3-0.1640(c_1-1)^2-0.0442(c_1-1) \tag{2.21}$$

于是，三级近似时

$$c_2=\varphi_0''(0)+\varphi_1''(0)+\varphi_2''(0)+\varphi_3''(0) \tag{2.22}$$

式中$\varphi_0''(0)+\varphi_1''(0)+\varphi_2''(0)$及$\varphi_3''(0)$分别由式(2.10)及(2.19)决定。

当$\alpha=1$，$\beta=1$，$c_0=0$时，由式(2.11)，(2.20)及(2.22)可得

$$c_2=0.0196(c_1-1)^3-0.3177(c_1-1)^2-1.6020(c_1-1) \qquad (2.23)$$

当 $\alpha=2$，$\beta=1$，$c_0=0$ 时，由式(2.12)，(2.21)及(2.22)可得

$$c_2=0.0196(c_1-1)^3-0.3997(c_1-1)^2-1.8117(c_1-1) \qquad (2.24)$$

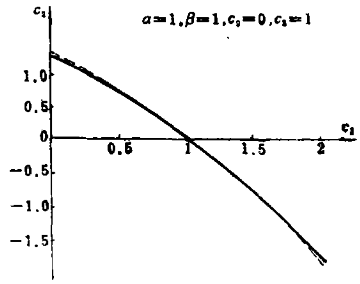

图 1

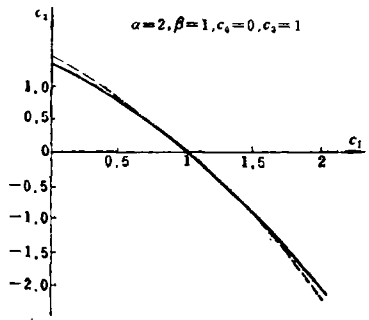

图 2

图 1 表示当 $\alpha=1$，$\beta=1$，$c_0=0$ 及 $c_3=1$ 时 c_2 与 c_1 的关系，实曲线表示准确结果（数值解）[1]，虚线表示本文的三级近似结果，即式(2.23)。三级近似结果的误差最大($c_1=0$)时才只2.5%。

图 2 表示当 $\alpha=2$，$\beta=1$，$c_0=0$ 及 $c_3=1$ 时，c_2 与 c_1 的关系。实曲线表示准确解[1]，虚线表示本文的三级近似结果，即式(2.24)。三级近似结果的误差最大($c_1=0$)时才只6%。

当 $\beta=1$，$\alpha=1$ 及 $c_1=0$ 时，由式(2.19)得

$$\varphi_3''(0)=0.0884c_0^2+0.0475c_0-0.0904 \qquad (2.25)$$

由式(2.13)及(2.25)得在三级近似下，当 $\beta=1$，$\alpha=1$ 及 $c_1=0$ 时

$$c_2=0.0884c_0^2+0.5475c_0+1.2647 \qquad (2.26)$$

表 1 表示当 $\alpha=1$，$\beta=1$ 及 $c_1=0$ 时，c_2 与 c_0 的关系。表中将本文的二级近似公式(2.13)，三级近似公式(2.26)与准确结果[1]进行了比较。

表 1

α	β	c_0	c_1	c_2 准确解	c_2 二级近似(2.13)	c_2 三级近似(2.26)
1	1	2.6640	0	3.2400	2.6871	3.3506
1	1	1.9265	0	2.6080	2.3184	2.6476
1	1	1.0095	0	1.9550	1.8599	1.9075
1	1	0.5000	0	1.5418	1.6051	1.5606
1	1	0	0	1.2326	1.3551	1.2647
1	1	−0.1107	0	1.1710	1.2997	1.2052
1	1	−1.1980	0	0.6864	0.7561	0.7357
1	1	−3.1905	0	0.3106	−0.2402	0.4178

表 2 把本文的三级近似结果即式(2.23)与(2.24)与 Проснак 的二级近似结果进行了比较，从表 2 可见，二者的精度基本相同。但本文把问题最后归结为求解常系数线性二阶常微分方程，而文献[1]则把问题最后归结为求解变系数线性二阶常微分方程。

表 2

α	β	c_0	c_1	c_2 精确值	c_2 文[1] 二级近似	c_2 本文 三级近似
1	1	0	0	1.2326	1.2764	1.2647
1	1	0	0.2	1.040	1.09	1.0680
1	1	0	0.3	0.946	0.97	0.9590
2	1	0	0	1.3120	1.3857	1.3924
2	1	0	0.2	1.12	1.19	1.1836
2	1	0	0.3	1.04	1.075	1.0656

参考文献

[1] Проснак В., О методе малого параметра в применении к некоторым автомодельным задачам движения вязкой жидкости, *Механика*, (1972), 3*133.

Analytical Solutions for the Selfsimilar Problems of Viscous Fluid Flow

Yuan Yih-wu

(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)

Abstract

This paper presents a step-by-step approximating method to obtain analytical solutions of the differential equations for the self-similar problems of viscous flow(1.1～1.4).

Prosnak(1969) obtained solutions of these equations by using a small parameter method, but he reduced the governing equations to a system of linear differential equations with variable coefficients. In this paper we reduce the governing equations to the linear differential equations with constant coefficients.