应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场*

林 拜 松

（中南矿冶学院，1984年11月3日收到）

摘 要

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是θ的函数的条件下，利用平衡方程，应力应变率关系、相容方程和屈服条件，本文导出了平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式．将这些一般解析表达式用于复合型裂纹，我们就可以得到Ⅰ－Ⅲ、Ⅱ－Ⅲ及Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式．

一、前 言

关于静止复合型裂纹尖端的理想塑性应力场，Shih[1]给出了Ⅰ－Ⅱ复合型平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场；我们用一个很简单的方法得到了平面应变和平面应力下Ⅰ－Ⅱ复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式[2]．但是，就我们所知，没有文献研究过Ⅰ－Ⅲ，Ⅱ－Ⅲ及Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ复合型裂纹尖端的理想塑性应力场．为此，本文提出一个简单方法来解决上述问题．

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是θ的函数的条件下，利用平衡方程、应力应变率关系，相容方程和屈服条件，我们导出了平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式．将这些一般解析表达式用于复合型裂纹，我们就可以得到Ⅰ－Ⅲ、Ⅱ－Ⅲ及Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式．为了避免重复，这里只给出Ⅰ－Ⅲ和Ⅱ－Ⅲ复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式．

二、基本方程式

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是θ的函数的条件下，理想塑性平面应变和反平面应变复合型裂纹问题在极坐标（r，θ）中的基本方程为：

* 钱伟长推荐．

1. 平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta}+2\sigma_-=0, \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta}+2\tau_{r\theta}=0\\&\frac{d\tau_{\theta z}}{d\theta}+\tau_{rz}=0, \qquad \sigma_-=\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{2}\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中σ_r、σ_θ为正应力分量，$\tau_{r\theta}$、τ_{rz}、$\tau_{\theta z}$为剪应力分量。

2. 应变率速度关系

以u,v和w表示的r方向、θ方向及z方向的速度分量都是极坐标r和θ的函数，于是，应变率速度关系为：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_r=\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_z=0\\&\dot{\gamma}_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}, \dot{\gamma}_{rz}=\frac{\partial w}{\partial r}, \dot{\gamma}_{\theta z}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中$\dot{\varepsilon}_r$、$\dot{\varepsilon}_\theta$和$\dot{\varepsilon}_z$为正应变率分量，$\dot{\gamma}_{r\theta}$、$\dot{\gamma}_{rz}$和$\dot{\gamma}_{\theta z}$为剪应变率分量。

3. 应力应变率关系

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_r=-\dot{\varepsilon}_\theta=\lambda\sigma_-, \quad \dot{\gamma}_{r\theta}=2\lambda\tau_{r\theta}\\&\dot{\gamma}_{rz}=2\lambda\tau_{rz}, \quad \dot{\gamma}_{\theta z}=2\lambda\tau_{\theta z}\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

其中λ为非负的比例因子。

4. 相容方程

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\dot{\varepsilon}_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\dot{\gamma}_{r\theta}}{\partial\theta}\right)=0\\&\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\dot{\gamma}_{\theta z})-\frac{\partial}{\partial\theta}(\dot{\gamma}_{rz})=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

5. Mises 屈服条件

$$\sigma_-^2+\tau_{r\theta}^2+\tau_{rz}^2+\tau_{\theta z}^2=k^2=\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2 \tag{2.5}$$

其中σ_s为材料的屈服极限。

由式(2.1)和(2.5)容易看出，只有四个方程来确定五个应力未知量σ_r、σ_θ、$\tau_{r\theta}$、τ_{rz}和$\tau_{\theta z}$。所以，平面应变和反平面应变复合型裂纹问题不是静定问题，我们必须将应力场和速度场联合在一起分析。

三、一般方程式的解

我们取σ_θ、$\tau_{\theta z}$和λ作为基本未知量，且引用$\varphi(\theta)$和$\psi(\theta)$使得

$$\sigma_\theta=\varphi(\theta),\quad \tau_{\theta z}=\psi(\theta) \tag{3.1}$$

于是，由式(2.1)得到用φ和ψ表示的应力分量为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{-}&=\frac{1}{4}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\\ \tau_{r\theta}&=-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta}\\ \tau_{rz}&=-\frac{d\psi}{d\theta}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

将(3.1)代入(2.3)得：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r&=-\dot{\varepsilon}_\theta=\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\\ \dot{\gamma}_{r\theta}&=-\lambda\frac{d\varphi}{d\theta}\\ \dot{\gamma}_{rz}&=-2\lambda\frac{d\psi}{d\theta}\\ \dot{\gamma}_{\theta z}&=2\lambda\psi\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

将(3.3)代入相容方程(2.4)得：

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\lambda\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)-\frac{4}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\frac{d\varphi}{d\theta}\right)\right)=0 \tag{3.4}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\lambda\psi)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\frac{d\psi}{d\theta}\right)=0 \tag{3.5}$$

而屈服条件(2.5)变成：

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)^2+\left(2\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2+(4\psi)^2+\left(4\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2=(4k)^2 \tag{3.6}$$

式(3.4)～(3.6)是控制φ、ψ和λ的三个非线性微分方程。因此，问题变成在给定的边界条件下求解这个方程组。

设函数$\lambda(\theta,r)$被给定为

$$\lambda=cr^n \tag{3.7}$$

其中c为一常数，n为一未定参数。

将式(3.7)代入式(3.4)和(3.5)，我们就分别得到控制φ的四阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+(4+2n-n^2)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=0 \tag{3.8}$$

和控制ψ的二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+(n+1)\psi=0 \tag{3.9}$$

现在我们分别讨论φ和ψ在$n=0$和$n=-1$时的一般解析表达式.

1. φ的一般解析表达式

1) $n=0$情形

当$n=0$时,(3.8)变成

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+4\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=0 \tag{3.10}$$

该方程的一般解为:

$$\varphi=c_1+c_2\theta+c_3\cos2\theta+c_4\sin2\theta \tag{3.11}$$

其中$c_i(i=1\sim4)$为四个积分常数.

2) $n=-1$情形

当$n=-1$时,(3.8)变成

$$\frac{d^4\varphi}{d\theta^4}+\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=0 \tag{3.12}$$

由此得到

$$\varphi=c_5+c_6\theta+c_7\cos\theta+c_8\sin\theta \tag{3.13}$$

其中$c_i(i=5\sim8)$为四个积分常数.

2. ψ的一般解析表达式

1) $n=0$情形

当$n=0$时,(3.9)变成

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\psi=0 \tag{3.14}$$

该方程的一般解为:

$$\psi=c_9\cos\theta+c_{10}\sin\theta \tag{3.15}$$

其中c_9和c_{10}为两个积分常数.

2) $n=-1$情形

当$n=-1$时,(3.9)变成

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2}=0 \tag{3.16}$$

(3.16)的积分给出:

$$\psi=c_{11}+c_{12}\theta \tag{3.17}$$

其中c_{11}和c_{12}为两个积分常数.

将φ和ψ的一般解析表达式代入(3.1)和(3.2),我们就得到理想塑性应力分量的一般解析表达式为:

1. $n=0$情形

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=c_1+c_2\theta-c_3\cos2\theta-c_4\sin2\theta\\ \sigma_\theta&=c_1+c_2\theta+c_3\cos2\theta+c_4\sin2\theta\\ \tau_{r\theta}&=-\frac{c_2}{2}+c_3\sin2\theta-c_4\cos2\theta\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\tau_{rz}&=c_9\sin\theta-c_{10}\cos\theta\\ \tau_{\theta z}&=c_9\cos\theta+c_{10}\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

2． $n=-1$情形

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=c_5+c_6\theta+\frac{c_7}{2}\cos\theta+\frac{c_8}{2}\sin\theta\\ \sigma_\theta&=c_5+c_6\theta+c_7\cos\theta+c_8\sin\theta\\ \tau_{r\theta}&=-\frac{c_6}{2}-\frac{c_7}{2}\sin\theta+\frac{c_8}{2}\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.20}$$

和

$$\tau_{rz}=c_{12},\quad \tau_{\theta z}=c_{11}+c_{12}\theta\tag{3.21}$$

理想塑性应力分量的一般解析表达式还必需满足屈服条件。为此，将(3.18)和(3.19)代入式(2.5)得：

$$\begin{aligned}&\frac{c_2^2}{4}+c_3^2+c_4^2-c_2c_3\sin2\theta+c_2c_4\cos2\theta\\ &\quad+c_9^2+c_{10}^2=k^2\end{aligned}\tag{3.22}$$

为了保证上式在裂纹尖端的某一应力区内处处成立，我们必须取

$$c_2=0\tag{3.23}$$

同样，将式(3.20)和(3.21)代入式(2.5)得：

$$\begin{aligned}&\frac{c_6^2}{4}+\frac{c_7^2}{4}+\frac{c_8^2}{4}+\frac{c_6c_7}{2}\sin\theta-\frac{c_6c_8}{2}\cos\theta\\ &\quad+c_{11}^2+c_{12}^2+2c_{11}c_{12}\theta+c_{12}^2\theta^2=k^2\end{aligned}\tag{3.24}$$

为了保证上式在裂纹尖端的某一应力区内处处成立，我们必须取

$$c_7=c_8=c_{12}=0\tag{3.25}$$

这样，平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式为：

1） 均匀应力区（$n=0$情形）

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=a_1+a_2\sin2(\theta-\theta_0)-a_3\cos2(\theta-\theta_0)\\ \sigma_\theta&=a_1-a_2\sin2(\theta-\theta_0)+a_3\cos2(\theta-\theta_0)\\ \tau_{r\theta}&=a_2\cos2(\theta-\theta_0)+a_3\sin2(\theta-\theta_0)\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\tau_{rz}&=b_1\sin\theta-b_2\cos\theta\\ \tau_{\theta z}&=b_1\cos\theta+b_2\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

2） 简单应力区（$n=-1$情形）

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_\theta=a_4+2a_5(\theta-\theta_0)\\ \tau_{r\theta}&=-a_5\end{aligned}\right\}\tag{3.28}$$

和

$$\tau_{rz}=0,\quad \tau_{\theta z}=b_3\tag{3.29}$$

其中$a_i(i=1\sim5)$为五个积分常数；$b_i(i=1\sim3)$是另外三个积分常数，θ_0是一个待定常数。

显然,式(3.26)和(3.27)分别与文献[2]中的式(3.8)和(2.9)相同;而式(3.28)和(2.29)则分别与文献[2]中的式(3.7)和(2.8)形式上相同。所以,文献[2]中反平面应变和平面应变二者的结果是本文的特殊情形。

以上分析表明,本文所得的上述表达式(3.26)～(3.29)是正确的。所以,Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型、Ⅰ-Ⅱ、Ⅰ-Ⅲ、Ⅱ-Ⅲ及Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ复合型的裂纹的尖端的理想塑性应力场全都由应力区(3.26)～(3.29)组成,其他形式的应力区不能出现。

四、复合型裂纹

为了避免重复,下面只给出Ⅰ-Ⅲ和Ⅱ-Ⅲ复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式。

1. Ⅰ-Ⅲ复合型裂纹

1) $0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=a(1+\pi\mp\cos2\theta)\\ &\tau_{r\theta}=a\sin2\theta\\ &\tau_{rz}=0,\quad \tau_{\theta z}=b\end{aligned}\right\}\tag{4.1a}$$

2) $\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\sigma_\theta=a\left[1-2\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right]\\ &\tau_{r\theta}=a,\quad \tau_{rz}=0,\quad \tau_{\theta z}=b\end{aligned}\right\}\tag{4.1b}$$

3) $\pi/2\leqslant\theta\leqslant3\pi/4$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\sigma_\theta=a\left[1-2\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right]\\ &\tau_{r\theta}=a\\ &\tau_{rz}=-b\cos\theta\\ &\tau_{\theta z}=b\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.1c}$$

4) $3\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=a(1\pm\cos2\theta)\\ &\tau_{r\theta}=-a\sin2\theta\\ &\tau_{rz}=-b\cos\theta\\ &\tau_{\theta z}=b\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.1d}$$

常数 a 和 b 满足下列关系:

$$a^2+b^2=k^2\tag{4.1e}$$

2. Ⅱ-Ⅲ复合型裂纹

1) $0\leqslant\theta\leqslant(\pi+2)/8$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\sigma_\theta=-2a_1\theta,\quad \tau_{r\theta}=a_1\\&\tau_{rz}=0,\quad \tau_{\theta z}=b_1\end{aligned}\right\}\tag{4.2a}$$

2) $(\pi+2)/8\leqslant\theta\leqslant\pi/2$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=\mp a_1\sin2\left(\theta-\frac{5\pi+2}{8}\right)-a_1\cdot\frac{\pi+2}{4}\\&\tau_{r\theta}=-a_1\cos2\left(\theta-\frac{5\pi+2}{8}\right)\\&\tau_{rz}=0,\quad \tau_{\theta z}=b_1\end{aligned}\right\}\tag{4.2b}$$

3) $\pi/2\leqslant\theta\leqslant(5\pi+2)/8$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=\mp a_1\sin2\left(\theta-\frac{5\pi+2}{8}\right)-a_1\cdot\frac{\pi+2}{4}\\&\tau_{r\theta}=-a_1\cos2\left(\theta-\frac{5\pi+2}{8}\right)\\&\tau_{rz}=-b_1\cos\theta,\quad \tau_{\theta z}=b_1\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.2c}$$

4) $(5\pi+2)/8\leqslant\theta\leqslant3\pi/4$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\sigma_\theta=-a_1\left[1+\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)\right],\quad \tau_{r\theta}=-a_1\\&\tau_{rz}=-b_1\cos\theta,\quad \tau_{\theta z}=b_1\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.2d}$$

5) $3\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=-a_1(1\pm\cos2\theta),\quad \tau_{r\theta}=a_1\sin2\theta\\&\tau_{rz}=-b_1\cos\theta,\quad \tau_{\theta z}=b_1\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{4.2e}$$

常数a_1和b_1满足如下关系：

$$a_1^2+b_1^2=k^2\tag{4.2f}$$

参 考 文 献

[1] Shih, C, F., Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems, *Fracture Analysis*, ASTM STP560, (1974), 187—210.

[2] 林拜松，静止裂纹尖端的理想塑性应力场，应用数学和力学，6，5(1985)，415—422.

Perfectly Plastic Stress Field at a Mixed-Mode Crack tip Under Plane and Anti-Plane Strain

Lin Bai-song

(Cental-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)

Abstract

Under the Condition that all the perfectly plastic stress components at a crack tip are functions of θ only, Making use of equilibrium equations, stress-strain rate relations, compatibility equations and yield condition, in this paper, we derive the generally analytical expressions of the perfectly plastic stress fielol at a mixed-mode crack tip under plane and anti-plane strain. Applying these generally analytical expressions to the mixed-mode cracks, We can obtain the anatytical expressionl of perfectly plastic stress fields at the tips of mixed-mode Ⅰ-Ⅲ、Ⅱ-Ⅲ and Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ cracks.