

# 关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法——(Ⅲ)边界裂纹群的计算\*

欧阳邈 朱 涵

(上海复旦大学应用力学系, 1984年6月19日收到)

## 摘 要

本文是文献[1]、[2]关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法研究的继续。这里我们利用和发展了文献[1]、[2]所提出的理论和计算公式,对边界裂纹群问题进行了实际计算。数值计算实例表明:本文所给出的方法在特征参数适当的范围内是行之有效的。本文的结果扩充了“应力强度因子手册”中的工作。

## 一、级数解形式的修正

在求解如图1所示具有 $N$ 条边界裂纹的应力强度因子问题时,由文献[1]知道,可通过解析开拓把求两个应力函数化为求一个在 $D_+^*$ 区域中的解析函数 $\phi(z)$ ,而 $\phi(z)$ 的形式是以各裂纹局部区域坐标 $z_k$ 为自变量的解析函数 $\phi_k(z_k)$ 的负幂函数展开式之组合。利用无穷远应力条件,裂纹边界条件以及各局部坐标 $z_k$ 之间的相互转换关系,最终可决定出 $\phi_k(z_k)$ 负幂函数展开式的系数。对含有应力奇点的裂纹问题,求解过程中正确假设 $\phi_k(z_k)$ 的形式显然是至关重要的。这里我们作出一些补充讨论。

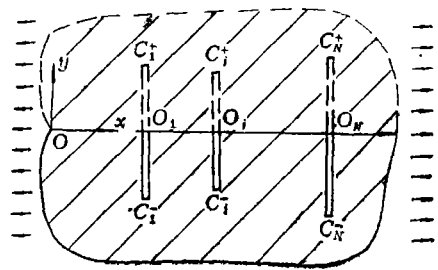


图 1

我们知道:在 $D_+^*$ 区域中的 $\phi(z)$ 是通过解析开拓由如下公式决定的:

$$\phi^+(z) = -z\bar{\psi}'(z) - \bar{\psi}(z) \quad (z \in D_+^*) \quad (1.1)$$

根据裂纹尖端的应力场分析,我们得知: $\psi(z)$ 为 $D_+^*$ 中的解析函数, $\phi'(z)$ 除了在各裂纹尖端有一个负1/2阶的奇点外,也为 $D_+^*$ 中的解析函数。这样一来,由(1.1), $\phi^+(z)$ 在 $D_+^*$ 区域中相应于各裂纹尖端的共轭点处也有一个负1/2阶的奇点。考虑到上述情况,我们令:

$$\phi(z) = \frac{z}{4} + \sum_{k=1}^N \phi_k(z_k), \quad \phi_k(z_k) = \frac{1}{2i} \left( \sqrt{\frac{z_k + ie_k}{z_k - ie_k}} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,k} \left( \frac{z_k}{e_k} + \sqrt{1 + \left( \frac{z_k}{e_k} \right)^2} \right)^{-n} \quad (1.2)$$

\* 中国科学院科学基金资助的课题。

其中  $F_{n,k} = F_{n,k}^{(1)} + iF_{n,k}^{(2)}$ ,  $F_{n,k}^{(1)}$ ,  $F_{n,k}^{(2)}$  为实数,  $n=0, 1, 2, \dots$ ;  $k=1, 2, \dots, N$ ,  $e_k$  为第  $k$  条裂纹之长。

(1.2) 中定义的  $\phi(z)$  形式显然保证了  $\phi(z)$  在各裂纹尖端坐标共轭点、 $\phi'(z)$  在各裂纹尖端坐标都有一个负  $1/2$  阶的奇点。并且当有某个  $e_j=0$ , 不失一般性设  $j=N$ , 即第  $N$  条裂纹消失了, 这时  $\phi(z)$  变为:

$$\phi(z) = \frac{z}{4} + \sum_{k=1}^{N-1} \phi_k(z_k)$$

这与我们所期望的  $N-1$  条裂纹问题所对应的解形式相一致。这种形式对计算应力强度因子是便利的。这是因为裂纹群之间的影响是通过  $\phi_k(z_k)$  展开式系数之间的关系来实现的。对某一具体的问题, 当一组  $F_{n,k}$  系数确定之后, 要求第  $j$  个应力强度因子时, 只要用到  $\phi_j(z_j)$  展开式之系数  $F_{n,j}$  而不必涉及其余, 这就是便利之处。

## 二、局部坐标间的级数转换关系 和解的基本代数方程组

对图 1 所示  $N$  条边界裂纹群问题, 我们先把裂纹群从左到右编号, 建立整体坐标系  $z=x+iy$ , 除此之外再引进以  $O_j$  为原点, 平行于  $x, y$  轴的局部坐标系  $z_j=x_j+iy_j$ 。记线段  $\overline{O_j O_k}$  之长为  $r_{jk}$ ,  $\overline{OO_j}$  之长为  $r_j$ , 则有:

$$z_k = \begin{cases} z_j - r_{jk} & (j > k) \\ z_j + r_{jk} & (j < k) \end{cases}, \quad z = z_j + r_j \quad (2.1)$$

在处理第  $j$  个裂纹边界条件时, 要求把除  $\phi_j(z_j)$  之外所有的  $\phi_k(z_k)$  ( $k \neq j$ ) 转移到  $z_j$  的坐标上。为此, 我们先把  $\phi_k(z_k)$  展成  $z_k$  的负幂级数。根据公式<sup>[3]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{z_k}{e_k} + \sqrt{1 + \left( \frac{z_k}{e_k} \right)^2} \right)^{-2m} &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} A_{n-m, 2m} \left( \frac{e_k}{z_k} \right)^{2n} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \\ \left( \frac{z_k}{e_k} + \sqrt{1 + \left( \frac{z_k}{e_k} \right)^2} \right)^{-(2m+1)} &= \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} A_{n-m, 2m+1} \left( \frac{e_k}{z_k} \right)^{2n+1} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \\ A_{n-m, 2m} &= \frac{m}{2^{2n}} \binom{2n}{n-m} \\ A_{n-m, 2m+1} &= \frac{2m+1}{2^{2n+1}} \binom{2n+1}{n-m} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

我们有:

$$\begin{aligned} \phi_k(z_k) &= \frac{1}{2i} \left( \sqrt{\frac{z_k + ie_k}{z_k - ie_k}} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,k} \left( \frac{z_k}{e_k} + \sqrt{1 + \left( \frac{z_k}{e_k} \right)^2} \right)^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^n P_{n-m,k} Q_m \right) \left( \frac{e_k}{z_k} \right)^{-n} \quad (k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N) \end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 P_{2n,k} &= \sum_{m=0}^n F_{2m,k} (-1)^{m-n} A_{n-m,2m} & (n=1,2,3,\dots) \\
 P_{2n+1,k} &= \sum_{m=0}^n F_{2m+1,k} (-1)^{m-n} A_{n-m,2m+1} & (n=0,1,2,\dots) \\
 Q_{2n} &= i(-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{n! 2^{n+1}} & (n=1,2,3,\dots) \\
 Q_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! 2^{n+1}} & (n=1,2,3,\dots) \\
 Q_1 &= 1/2
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

然后利用 (2.1), 可把  $\phi_k(z_k)$  展开为  $z_j$  的正幂级数:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_k(z_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{n,kj} \left( \frac{z_j}{r_{jk}} \right)^n & (k=1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,N) \\
 M_{n,kj} &= \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{p} \left( \frac{e_k}{r_{jk}} \right)^p \sum_{m=1}^p P_{p-m,k} Q_m & (j < k) \\ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \binom{n+p-1}{p} \left( \frac{e_k}{r_{jk}} \right)^p \sum_{m=1}^p P_{p-m,k} Q_m & (j > k) \end{cases} & (2.4)
 \end{aligned} \right\}$$

这样  $\phi(z)$  转换到  $z_j$  坐标上的表达式为:

$$\begin{aligned}
 \phi(z) &= \frac{r_j}{4} + \frac{z_j}{4} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=0}^{\infty} M_{n,kj} \left( \frac{z_j}{r_{jk}} \right)^n \\
 &\quad + \frac{1}{2i} \left( \sqrt{\frac{z_j + ie_j}{z_j - ie_j}} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,j} \left( \frac{z_j}{e_j} + \sqrt{1 + \left( \frac{z_j}{e_j} \right)^2} \right)^{-n} & (2.5)
 \end{aligned}$$

下一步利用共形映照  $z_j = (e_j/2)(\zeta - 1/\zeta)$ . 把  $\phi(z)$  转到参数平面:

$$\phi(z) = \phi(\zeta) = \frac{r_j}{4} + \frac{e_j}{8} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{m,j} + i\beta_{m,j}) \zeta^m + \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,j} \zeta^{-n} \quad (2.6)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{m,j} &= (-1)^m \alpha_{-m,j}, \quad \beta_{m,j} = (-1)^m \beta_{-m,j} & (m=1,2,3,\dots) \\
 \alpha_{2m,j} + i\beta_{2m,j} &= \sum_{k \neq j} \sum_{p=m}^{\infty} (-1)^{p-m} \binom{2p}{p-m} \left( \frac{e_j}{2r_{jk}} \right)^{2p} M_{2p,kj} & (m=0,1,2,\dots) \\
 \alpha_{2m+1,j} + i\beta_{2m+1,j} &= \sum_{k \neq j} \sum_{p=m}^{\infty} (-1)^{p-m} \binom{2p+1}{p-m} \left( \frac{e_j}{2r_{jk}} \right)^{2p+1} M_{2p+1,kj} & (m=0,1,2,\dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

当处理第  $j$  个裂纹边界条件时, 我们用边界合力条件:

$$\overline{\phi(z_j)} - \phi(z_j) + (\bar{z}_j - z_j) \phi'(z_j) = - \int_{s_0}^{s(z_j)} (Y_j + iX_j) ds \quad (z_j \in C_j^-) \quad (2.8)$$

式中的  $X_j, Y_j$  分别为作用在第  $j$  个边界裂纹上的  $x, y$  方向边界合力. 这里  $s_0$  取在实轴边

界  $x=+\infty$  处. 把边界条件转移到参数平面  $\xi$  上去有:

$$\overline{\phi(\xi)} - \phi(\xi) + 2(1/\xi - \xi)\phi'(\xi)/(1 + \xi^{-2}) = f_j(\xi) \quad (\xi = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0) \quad (2.9)$$

这里  $f_j(\xi)$  即为 (2.8) 之右端项. 以  $(1 + \xi^{-2})(\xi - i)^2$  乘 (2.9), 并将 (2.6) 代入, 我们有:

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^{-2})(\xi - i)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_{m,j} - i\beta_{m,j})\xi^{-m} + (1 + \xi^{-2})(\xi - i)^2(1/\xi - \xi)e_j/4 \\ & + (1 - i\xi)(\xi - i)^2\xi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n,j}^{(1)} - iF_{n,j}^{(2)})\xi^n - (1 + \xi^{-2})(\xi - i)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_{m,j} - i\beta_{m,j})\xi^m \\ & - \xi^{-2}(\xi - i)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n,j}^{(1)} - iF_{n,j}^{(2)})\xi^{-n} + 2(\xi^{-1} - \xi)(\xi - i)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m(\alpha_{m,j} + i\beta_{m,j})\xi^{m-1} \\ & - 2(\xi^{-1} - \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n,j}^{(1)} + iF_{n,j}^{(2)})\xi^{-n} - 2(\xi^{-1} - \xi)(\xi - i) \sum_{n=0}^{\infty} n(F_{n,j}^{(1)} + iF_{n,j}^{(2)})\xi^{-n-1} \\ & + (\xi^{-1} - \xi)(\xi - i)^2(1 + \xi^{-2})e_j/4 = f_j(\xi)(1 + \xi^{-2})(\xi - i)^2 \quad (\xi = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

经过移项整理, (2.10) 化为:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (A_{m,j} + iB_{m,j})\xi^m = (1 + \xi^{-2})(\xi - i)^2 f_j(\xi) \quad (\xi = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0) \quad (2.11)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{m,j} = & \{-\alpha_{-m-2,j} + \alpha_{-m+2,j} - (2m-3)\alpha_{-m-2,j} + 4m\alpha_{m,j} - (2m+3)\alpha_{m+2,j} - 2\beta_{-m-1,j} \\ & + 2\beta_{-m+1,j} - (4m-6)\beta_{m-1,j} + (4m+6)\beta_{m+1,j} - (\delta_{-3m} + \delta_{3m})e_j/4\} \\ & + \begin{cases} -(F_{m+1,j}^{(1)} + F_{m-1,j}^{(1)} + F_{m,j}^{(2)} + F_{m-2,j}^{(2)}) & (m=2, 3, \dots) \\ -(F_{2,j}^{(1)} + F_{1,j}^{(2)}) + e_j/4 & (m=1) \\ 2(F_{1,j}^{(1)} + F_{0,j}^{(2)}) & (m=0) \\ 5(F_{1,j}^{(2)} + F_{2,j}^{(1)}) + e_j/4 & (m=-1) \\ (2m+3)F_{m+1,j}^{(1)} - (2m-3)F_{m-1,j}^{(1)} + (2m-3)F_{m,j}^{(2)} - (2m-3)F_{m-2,j}^{(2)} & (m=-2, -3, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} B_{m,j} = & \{\beta_{-m-2,j} - \beta_{-m+2,j} - (2m-5)\beta_{m-2,j} + 4m\beta_{m,j} - (2m+5)\beta_{m+2,j} - 2\alpha_{-m-1,j} \\ & - 2\alpha_{-m+1,j} + (4m-2)\alpha_{m-1,j} - (4m+2)\alpha_{m+1,j} + (\delta_{2m} - \delta_{-2m})e_j/2\} \\ & + \begin{cases} -F_{m,j}^{(1)} - F_{m-2,j}^{(1)} + F_{m+1,j}^{(2)} + F_{m-1,j}^{(2)} & (m=2, 3, \dots) \\ -F_{1,j}^{(1)} + 4F_{0,j}^{(2)} + F_{2,j}^{(2)} & (m=1) \\ 2F_{0,j}^{(1)} + 6F_{1,j}^{(2)} & (m=0) \\ F_{1,j}^{(1)} - 4F_{0,j}^{(2)} + 7F_{2,j}^{(2)} & (m=-1) \\ (2m-5)F_{m-2,j}^{(1)} - (2m-3)F_{m,j}^{(2)} - (2m+3)F_{m-1,j}^{(2)} + (2m+5)F_{m+1,j}^{(2)} & (m=-2, -3, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

这里  $\delta_{nm}$  为 Kronecker 记号。

将文献[2]第一节所叙述的方法平行地用在此处,我们就可获得如下的一组公式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (A_{m,j} + iB_{m,j})\xi^m &= \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2iB_{m,j} + f_{m,j}^{(1)} - if_{m,j}^{(2)})\xi^m & (\xi = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (f_{m,j}^{(1)} + if_{m,j}^{(2)})\xi^m & (\xi = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0) \end{cases} \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (f_{m,j}^{(1)} + if_{m,j}^{(2)})\xi^m &= \begin{cases} (1+\xi^{-2})(\xi-i)^2 f_j(\xi) & (\xi = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ (1+\xi^{-2})(\xi-i)^2 f_j(\xi) & (\xi = e^{i\theta}, -\pi < \theta \leq 0) \end{cases} \\ A_{2n+1,j} - f_{2n+1,j}^{(1)} &= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} (B_{2k+2n,j} - f_{2k+2n,j}^{(2)}) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ A_{2n,j} - f_{2n,j}^{(1)} &= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (B_{2k+2n+1,j} - f_{2k+2n+1,j}^{(2)}) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

在实际计算中,仅考虑(1.2)中有限的 $2M$ 项,(2.14)中最后两项公式也就相应的变为:

$$\left. \begin{aligned} A_{2n+1,j} - f_{2n+1,j}^{(1)} &= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=-(M+n)}^{M-n-1} \frac{1}{2k-1} (B_{2k+2n,j} - f_{2k+2n,j}^{(2)}) \\ &\quad (n=-M, -M+1, \dots, M-1) \\ A_{2n,j} - f_{2n,j}^{(1)} &= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=-(M+n)}^{M-n-1} \frac{1}{2k+1} (B_{2k+2n+1,j} - f_{2k+2n+1,j}^{(2)}) \\ &\quad (n=-M, -M+1, \dots, M-1) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

综合(2.3)~(2.15),我们以 $F_n^{(1)}; F_n^{(2)}$ 为未知数; $\alpha_{n,j}, \beta_{n,j}, M_{n,kj}, P_{n,j}, Q_n$ 为中间变量,计有 $N$ 条裂纹,用 $F_n^{(1)}; F_n^{(2)}$ 直接消去中间变量,可得到 $4MN$ 个未知数的 $4MN$ 个线性代数方程组,故方程可解。到这里为止,所要讨论的问题似乎已经完了,其实不然,我们以上的讨论和给出的计算公式仅对满足一定条件的边界力载荷适用,在下一节里,我们将给出满足这种一定条件边界力载荷的具体要求以及对作用在裂纹表面一般任意载荷的处理方法。

### 三、边界力载荷与问题解的形式

根据第二节中所讨论的方法,我们实质上是把图1所示的半平面边界裂纹群的问题化为一个具有裂纹边界条件(2.14)的全平面带有内部裂纹的等价形式,并且应力函数通过解析开拓已由二个变为一个。在后者这个问题中,我们显然需要考虑当作用在裂纹上边界合力不为零的情况。按照平面问题的复变函数方法理论,当作用在裂纹上的边界合力不为零时,应力函数必须含有对数项,我们自然会问:由(2.14)代表的边界合力数值是多少?若合力不为零时对数项的系数怎么确定?下面,我们一步步给予分析。

首先, 由边界力公式可见: 如果作用在每个  $C_j$  上的边界力都是自平衡的, 也就是作用在  $C_j$  上的边界合力为零, 这时可保证全实轴上边界力合力为零, 即为自由边界条件. 我们的解析开拓理论就可以用. 现在我们来计算当作用在  $C_j$  上的边界力合力为零时所对应的等价问题中作用在  $C_j^+ + C_j^-$  上的边界合力是多少? 由 (2.14) 和图 2, 作用在  $C_j^+ + C_j^-$  上的边界力 (已乘上因子  $(1+\zeta^{-2})(\zeta-i)^2$ ) 可在参数平面上表为:

$$f_1 - if_2 = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2iB_{m,j}\zeta^m + (1+\zeta^{-2})(\zeta+i)^2 \bar{f}_j(\zeta) & (\zeta \in \Gamma_j^+) \\ (1+\zeta^{-2})(\zeta-i)^2 f_j(\zeta) & (\zeta \in \Gamma_j^-) \end{cases} \quad (3.1)$$

作用在  $\Gamma_j^+ + \Gamma_j^-$  上的边界合力为:

$$[f_1 - if_2]_{\Gamma_j^+ + \Gamma_j^-} = 4i(\bar{f}_j(4) + \bar{f}_j(3) + f_j(2) + f_j(1)) - \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2iB_{m,j}\zeta^m \right)_+^{-1} \quad (3.2)$$

因为  $f_j(\zeta)$  是自平衡的和  $f_j(4) = f_j(1)$ ,  $f_j(3) = f_j(2)$ , 以及实轴为自由边界, 所以  $f_j(1) = f_j(2) = \bar{f}_j(3) = \bar{f}_j(4) = 0$ . 又  $\zeta = \pm 1$  对应的物理平面上点落在实数轴上, 而 (3.2) 中等号右边最后一项恰巧为  $8i(\operatorname{Re} f_j(1) + \operatorname{Re} f_j(2))$ , 也等于零, 最后得到:

$$[f_1 - if_2]_{\Gamma_j^+ + \Gamma_j^-} = 0 \quad (3.3)$$

这就表明  $C_j$  上作用的边界力自平衡可使等价问题

(3.1) 中的边界合力仍旧为自平衡. 这样一来, 对于作用在  $C_j$  上边界力为自平衡的问题, 就不用考虑引进对数项了. 这也是第一节、第二节给出方法所适用的范围.

对于一般情况, 当作用在  $C_j$  上的边界合力不为零时, 物理平面的实轴上不再为自由, 而是为分段常数边界条件, 因此不能进行越过实轴的解析开拓, 第一节、第二节给出的方法就不能用, 这时我们必须引入对数项:

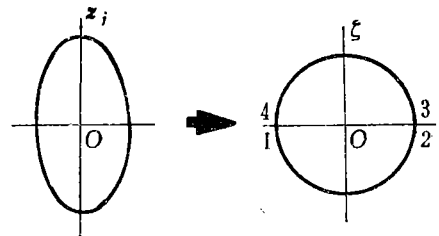


图 2

$$\phi_0(z) = \sum_{j=1}^N \phi_{0,j}(z_j), \quad \phi_{0,j}(z_j) = (a_j + ib_j) \ln \left( \frac{z_j}{e_j} + \sqrt{1 + \left( \frac{z_j}{e_j} \right)^2} \right) \quad (3.4)$$

这里  $a_j, b_j$  均为实数,  $j=1, 2, \dots, N$ .

通过映照  $z_j = (e_j/2)(\zeta_j - 1/\zeta_j)$ ,  $\phi_{0,j}(z_j) = (a_j + ib_j) \ln \zeta_j$ , 这是一个多值函数, 我们取这样一枝:  $\ln \zeta_j|_{\zeta_j=1} = 0$ ,  $\ln \zeta_j|_{\zeta_j=-1} = -\pi i$ . 这里  $j$  从 1 一直取到  $N$ .

通过引进对数项, 我们把所要求的一般情况问题拆为如下两个问题 (I), (II):

(I) 如图 1 所示, 在  $C_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) 上作用有边界力:

$$f^{(1)}(s) = f_{1,j} - if_{2,j} - (\overline{\phi_0(z)} - \phi_0(z) + (z-z)\phi_0'(z)) \quad (z \in C_j) \quad (3.5)$$

我们要求 (3.5) 中的  $f^{(1)}(s)$  在  $C_j$  上是自平衡的, 从而对这个问题可采用第一节、第二节所给出的方法.

(II) 在  $C_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) 上作用有边界力:

$$f^{(2)}(s) = \overline{\phi_0(z)} - \phi_0(z) + (z-z)\phi_0'(z) \quad (z \in C_j) \quad (3.6)$$

除此之外在实轴上还受有分段常合力:

$$f^{(2)}(s) = \begin{cases} 0 & (z \in \overline{O_N O_\infty}) \\ 2\pi \sum_{k=j+1}^N (b_k + ia_k) & (j=1, 2, \dots, N-1, z \in \overline{O_j O_{j+1}}) \\ 2\pi \sum_{k=1}^N (b_k + ia_k) & (z \in \overline{O_1 O_\infty}) \end{cases} \quad (3.7)$$

显然问题 (II) 的解就是  $\phi_0(z)$  本身, 这一点略加验证就可得知. 剩下的只要求解问题 (I), 若问题 (I) 也求解出来了, 把问题 (I)、(II) 的解相加, 就得到了我们要求的原问题的解. 在问题 (I) 求解中, 关键是怎样使 (3.5) 所代表的边界力变为自平衡. 下面让我们来看看如何取  $\phi_0(z)$  中的  $a_j, b_j$  数值可以达到这个目的.

设  $\zeta_k = (z_k/e_k) + \sqrt{1 + (z_k/e_k)^2}$ , 把 (3.5) 改写为:

$$f^{(1)}(s) = f_j(\zeta_j) + s_j(\zeta_j) + \sum_{k=1}^{j-1} (a_k - ib_k) (\ln \zeta_k - \overline{\ln \zeta_k}) \\ + (a_j - ib_j) (\ln \zeta_j - \overline{\ln \zeta_j}) + \sum_{k=j+1}^N (a_k - ib_k) (\ln \zeta_k - \overline{\ln \zeta_k}) \\ (z \in C_j^+, j=1, 2, \dots, N) \quad (3.8)$$

这里,  $s_j(\zeta_j)$  表示将  $z = (e_j/2)(\zeta_j - 1/\zeta_j) + r_j$  代入  $(z - \bar{z})\phi_0'(z)$  所得到的项. 由自平衡条件, 要求  $f^{(1)}(s)$  在  $\zeta_j = \pm 1$  处为零,  $j=1, 2, \dots, N$ . 我们从最后边的裂纹一个个来算.

首先说明:  $s_j(\zeta_j)$  在  $\zeta_j = \pm 1$  处是恒为零的,  $j=1, 2, \dots, N$ . 这是因为  $\zeta_j = \pm 1$  在物理平面上的对应点落在实轴上, 再从  $s_j(\zeta_j)$  的定义就可知道这一点. 由于  $s_j(\zeta_j)$  这个性质, 使它对讨论自平衡条件不产生影响, 故在以后的讨论中略去  $s_j(\zeta_j)$  这一项. 另外, 还有一点值得注意的是: 我们定义的映照函数数为  $\zeta_j = (z_j/e_j) + \sqrt{1 + (z_j/e_j)^2}$ , 对  $\sqrt{1 + (z_j/e_j)^2}$  已经取定了适当的某一枝, 根据映照函数是把物理平面的裂纹外部区域射为参数平面的单位圆  $|\zeta|=1$  外部区域这个性质, 我们可获得一个重要条件, 即: 对  $\zeta_j = \pm 1$ , 通过关系  $z_j = (e_j/2) \cdot (\zeta_j - 1/\zeta_j)$ ,  $z_k = z_j \pm r_{jk}$ ,  $z_k = (e_k/2)(\zeta_k - 1/\zeta_k)$  所确定的  $\zeta_k$  值具有如下性质:

$$\zeta_k \Big|_{\zeta_j = \pm 1} \begin{cases} > 0 & (j > k) \\ < 0 & (j < k) \end{cases} \quad (3.9)$$

除此之外, 对数项也是一个多值函数, 我们取其这样的一枝:  $\ln \zeta_k |_{\zeta_k > 0} = 0$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ). 这个条件再加上 (3.9), 又可得到:  $(\ln \zeta_k - \overline{\ln \zeta_k})|_{\zeta_j = \pm 1} = 0$ , ( $k < j$ ). 故在讨论第  $j$

个边界裂纹自平衡条件时, 可进一步略去  $\sum_{k=1}^{j-1} (a_k - ib_k) (\ln \zeta_k - \overline{\ln \zeta_k})$  这一项.

有了以上结果, 可把 (3.8) 简化为如下形式:

$$f^{(1)}(s) = f_j(\zeta_j) + \sum_{k=j}^N (a_k - ib_k) (\ln \zeta_k - \overline{\ln \zeta_k}) \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (3.10)$$

最右边的边界裂纹上的自平衡条件成为:

$$f^{(1)}(s) = f_N(\zeta_N) + (a_N - ib_N) (\ln \zeta_N - \overline{\ln \zeta_N}) = 0 \quad (\zeta_N = \pm 1) \quad (3.11)$$

在  $\zeta_N=1$  处, 由定义  $f(s)|_{s \rightarrow +\infty}=0$  的条件  $f_N(1)=0$ , 可得:

$$f^{(1)}(s) = f_N(1) + 2i(a_N - ib_N)\theta|_{\theta=0} = 0 \quad (3.12)$$

可见, (3.12) 是自动满足的. 在  $\zeta_N=-1$  处, (3.11) 化成:

$$f^{(1)}(s) = f_N(-1) + 2i(a_N - ib_N)\theta|_{\theta=-\pi} = 0 \quad (3.13)$$

由此我们获得:

$$f_N(-1) = 2\pi(b_N + ia_N) \quad (3.14)$$

而  $f_N(-1) - f_N(1) = -(Y_N + iX_N)$  代表作用在第  $N$  个裂纹上的边界合力, 于是我们最终得到第  $N$  个裂纹上作用的边界力为自平衡时对数项系数所应满足的条件为

$$a_N = -X_N/2\pi, \quad b_N = -Y_N/2\pi \quad (3.15)$$

接下去, 对第  $N-1$  个裂纹, (3.10) 可化为:

$$f^{(1)}(s) = f_{N-1}(\zeta_{N-1}) + \sum_{k=N-1}^N (a_k - ib_k)(\ln \zeta_k - \overline{\ln \zeta_k}) \quad (3.16)$$

在  $\zeta_{N-1}=1$  处:  $f^{(1)}(s) = f_{N-1}(1) + 2i(a_{N-1} - ib_{N-1})\theta|_{\theta=0} - 2\pi(b_N + ia_N)$  (3.17)

但是注意到实轴上边界条件乃为自由边界条件, 可有:  $f_{N-1}(\zeta_{N-1}=1) = f_N(\zeta_N=-1) = 2\pi \cdot (b_N + ia_N)$ , (3.17) 中等号右端化为零了.

在  $\zeta_{N-1}=-1$  处, 由 (3.16):

$$f^{(1)}(s) = f_{N-1}(-1) + 2i(a_{N-1} - ib_{N-1})\theta|_{\theta=-\pi} - 2\pi(b_N + ia_N) \quad (3.18)$$

我们又可获得:

$$\begin{aligned} 2\pi(b_{N-1} + ia_{N-1}) &= f_{N-1}(-1) - 2\pi(b_N + ia_N) = f_{N-1}(-1) - f_N(-1) \\ &= f_{N-1}(-1) - f_{N-1}(1) = -(Y_{N-1} + iX_{N-1}) \end{aligned}$$

或:  $b_{N-1} = -Y_{N-1}/2\pi, \quad a_{N-1} = -X_{N-1}/2\pi$  (3.19)

(3.19) 即为作用在第  $N-1$  个裂纹上的边界力为自平衡的条件. 其中  $X_{N-1}, Y_{N-1}$  分别代表作用在  $C_{N-1}$  上  $x, y$  方向的边界合力.

如此类推, 我们可导出  $C_j$  上边界力自平衡的条件为:

$$a_j = -X_j/2\pi, \quad b_j = -Y_j/2\pi \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (3.20)$$

这样取得  $a_j, b_j$  数值后, 我们就可用第一节、第二节中给出的方法去求解问题 (I) 了. 若边界缺陷不是裂纹而是半椭圆缺口, 第三节给出的方法一样适用, 结论也完全一样.

到此为止, 我们已经对边界缺陷上作用有任意载荷的问题给出了一种求解方法, 不过这种方法也有限制条件, 其限制条件为: 外边界载荷  $f_1 - if_2$  最多只能有有限个第一类不连续点, 如果这个条件不成立, 这时 (2.14) 中第二个关系式就不再适用, 则本文给出的方法也就失效了. 不过, 在一般实际问题中, 这个条件大多数是满足的.

#### 四、裂纹群的计算

根据 (1.2), 应力强度因子的数值可按如下公式计算:

$$\left. \begin{aligned} K_{I,j} &= \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \left[ (4n+1)F_{2n,j}^{(1)} - (4n+3)F_{2n+1,j}^{(2)} \right] \right\} / 2\sqrt{e_j} \\ K_{II,j} &= \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \left[ (4n+3)F_{2n+1,j}^{(1)} + (4n+1)F_{2n,j}^{(2)} \right] \right\} / 2\sqrt{e_j} \end{aligned} \right\} (j=1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$



其中  $e_j$  表示第  $j$  条裂纹的长度。

首先, 我们计算了  $N=2, 3, 4, 6$  的等长裂纹群的无限远拉伸问题, 数值结果如图 3 所示, 图中  $K_I/p\sqrt{e}$  代表  $N$  条裂纹最当中的那条之值。

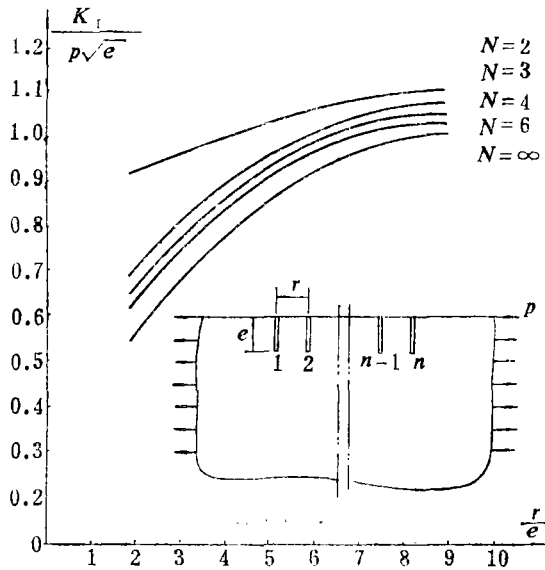


图 3

图 3 中  $N=\infty$  的情况是已有的结果<sup>[4]</sup>, 可以看出: 随着  $N$  的数值增加, 本文方法所得计算曲线向  $N=\infty$  的曲线趋近。这是符合实际的。

由图 3 还可以看出, 当  $N \geq 2$  时, 应力强度因子总是小于单一边界裂纹的值  $K_I/p\sqrt{e}=1.1215$ , 或者说多个边界裂

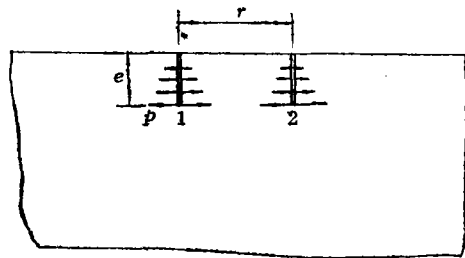


图 4

表 1

$r$	1000	10	7.5	5	2.5	2	1.5	1	0.9
$K_I/p\sqrt{e}$	0.6831	0.6726	0.6650	0.6495	0.6112	0.6000	0.5875	0.5692	0.5586
$K_{II}/p\sqrt{e}$	0	0.0012	0.0027	0.0076	0.0258	0.0317	0.0372	0.0407	0.0512

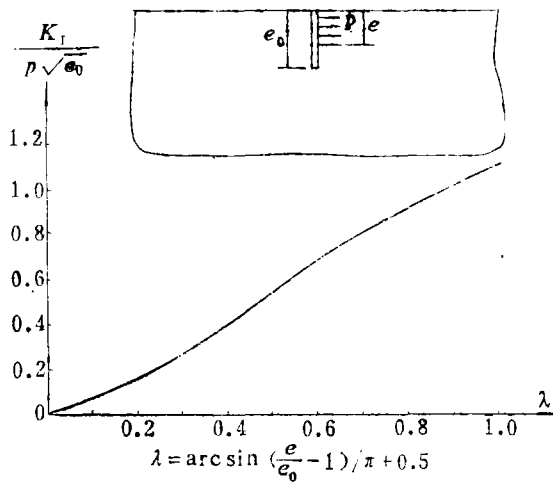


图 5

纹的存在削弱了应力集中。这个结论是与力学的直观相符合的。当裂纹之间相距很远时, 就又转化为单一边界裂纹的情况, 这时  $K_I/p\sqrt{e}$  值与 O.L. Bowie<sup>[5]</sup> 给出的值完全吻合。

图 4 表示两条等长边界裂纹, 裂纹面上均受到线性分布压力, 无穷远不受外力作用的问题。

当这两条裂纹相离很远时, 图 4 对应的表 1 给出的值与 R. J. Hartranft and G. C. Sih<sup>[6]</sup> 得到的结果相同。根据问题的对称性, 两条裂纹各自应力强度因子是一样的, 故只在表格中列出一条裂纹的应力强度因子计算数值。

最后, 我们计算了一条边界裂纹受有非平衡边界力作用的问题来校核本文给出的处理非平衡边界力方法。图 5 所示的结果和 A. F. Emery 的结果<sup>[7]</sup>是一致的。

最后, 我们计算了一条边界裂纹受有非平衡边界力作用的问题来校核本文给出的处理非平衡边界力方法。图 5 所示的结果和 A. F. Emery 的结果<sup>[7]</sup>是一致的。

上述计算过程中, 利用前面归结的关于  $F_{n,j}$  线性代数方程组, 当  $M=11\sim 12$  时, 应力强度因子相对精度已达  $10^{-3}$  量级。对  $N$  条边界裂纹, 方程的阶数为  $44N\sim 48N$ , 对现在的计算机来讲, 内存和时间不是一个很大的问题, 这说明本文给出的方法具有相当的实用性。

本文是在中国科学院科学基金委员会的资助下完成的。

### 参 考 文 献

- [1] 欧阳邕, 关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法——(I)解析方法, 应用数学和力学, 1, 2 (1980), 159—166.
- [2] 欧阳邕, 关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法——(II)缺口群的计算, 应用数学和力学, 5, 2 (1984), 153—158.
- [3] Hayashi, T., On the extension in an orthogonally aeolotropic strip with a circular hole, *Trans. ASME*, 25 (1959), 1133.
- [4] Bowie, O. L. and C. E. Freese, Solution for periodic edge cracks in a semi-infinite sheet under tension, Unpublished data at AMMRC (1970).
- [5] Bowie, O. L., Single edge crack in a semi-infinite region, *J. Math. and Phys.*, 45 (1966), 356.
- [6] Hartranft, R. J. and G. C. Sih, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, G. C. Sih, editor, Noordhoff, Holland (1971).
- [7] Emery, A. F., Single edge crack with distributed load applied at part of its surface, *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng.*, 88 (1966), 45.

## On a Class of Method for Solving Problems with Random Boundary Notches and/or Cracks——(III) Computations for Boundary Cracks

Ouyang Chang      Zhu Hang

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai)

### Abstract

This paper continues the discussions in [1][2] for a class of method to solve problems with random boundary notches and/or cracks. Extensions for the theory and formulas in [1], [2] were given to treat computations for boundary cracks. Numerical results show that the method presented here is quite workable within certain range of characteristic parameters. The results obtained in this paper are extensions of those in "Handbook of Stress Intensity Factors" by G. C. Sih.