应用数学和力学，第6卷第8期（1985年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性大挠度问题von Kármán方程与量子本征值问题Schrödinger方程的关系*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1984年5月1日收到）

摘 要

本文证明了弹性大挠度问题的von Kármán方程可以归结为量子力学中Schrödinger方程的本征值问题，从而使非线性方程变换为线性方程的求解．在较复杂的问题中，为利用散射反演方法和Bäcklund变换求解创造了条件．本文还讨论了狭长条板的大挠度问题．

本文所提供的方法可以用来研究弹性薄板的非线性跳跃．

一、前 言

在文[1]中，我们业已证明，弹性理论的小挠度问题，可以归结为量子理论中Schrödinger方程的本征值问题。本文是文[1]的继续。在本文中我们将证明，弹性理论的大挠度问题同样可以归结为Schrödinger方程的本征值问题，只不过数学上的变换更加复杂而已。

弹性理论的大挠度问题的发展历史，在文[2～11]中有详细的介绍和评述。自1910年发表著名的von Kármán方程以来[12]，钱伟长先生[13]等人在这方面做了大量的工作[14~36]。钱伟长先生是将摄动法应用于圆板大挠度问题上的第一个人，并且一直到今天，他的解法仍然被公认为是最漂亮的。近年来，关于弹性理论的大挠度问题的论文有增无已，其基本思路，源出于钱先生一人。

薄板的非线性跳跃，与弹性理论的大挠度问题紧密相连。文[37]认为，非线性的弹性系统从一个平衡状态跳越到另一个平衡状态，可以与量子力学中能量跃迁相比拟。为了定量地说明这种非线性跳跃，引入Schrödinger方程是绝对必要的。

另一方面，众所周知，von Kármán方程是非线性方程组。求解非线性方程，除了近似求解外，到目前为止无非是两种方法。一种方法是通过数学变换，将非线性方程变换成可解的线性方程。这方面的例子有Burgers方程。在经过Cole-Hopf变换后，成为有精确解的扩散方程[38]。引入Dirac矩阵和Pauli矩阵[39~41]，也可以使二阶的非线性方程降阶为一阶的线性方程[42]。还有一种方法，便是将非线性方程归结为某一类方程的本征值问题。这样，就可以利用行之有效的散射反演方法和Bäcklund变换[43~46]。这方面的例子，有理想流体动力

* 钱伟长推荐．

学中的Euler方程[46]，有KdV方程[47~53]，有 sine-Gordon 方程[54~55]，Bloch 方程[56]和三波相互作用方程[57]．它们最终可以变换成 Schrödinger 方程．本文在这两种方法中选择了后者．

文[38]认为，Schrödinger 方程是有着广泛适用范围的重要方程，它是自然界中为数不多的基本方程之一．von Kármán 方程与 Schrödinger 方程的联系，再次肯定了这条结论．

本文同前几篇文章[1],[42],[58]一样，在需要引入的时候，都假定所有力学量已解析延拓到复平面上，并且已定义为 Helbert 空间中的多维矢量．

本文不讨论变厚度[33]、变刚度[35]弹性大挠度问题．

二、von Kármán 方程的化简

弹性大挠度问题归结为求解von Kármán方程[12]：

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)F=E\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right] \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)W=\frac{h}{D}\left[\frac{Q}{h}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] \tag{2.2}$$

式中 E 为 Young 模量，h 为板的厚度，D为抗弯刚度，Q为侧向载荷，W 为挠度，F 为应力函数．

如果设

$$F=\frac{D}{h}\phi,\quad W=\sqrt{\frac{2D}{Eh}}w,\quad Q=D\sqrt{\frac{2D}{Eh}}q \tag{2.3}$$

则 von Kármán 方程(2.1)式，(2.2)式可以无量纲化为

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\phi=2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)w=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+q \tag{2.5}$$

方程 (2.4) 式还可以写成如下形式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=0 \tag{2.6}$$

若规范

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{2.7}$$

则(2.6)式恒满足．将(2.7)式代入(2.5) 式，可以得到关于挠度 w 的非线性方程：

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)w$$

$$=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+q \tag{2.8}$$

即

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{1}{2}\nabla w\cdot\nabla[\nabla w\cdot\nabla w]+q \tag{2.9}$$

方程(2.9)式还可以进一步降阶。为此，若令

$$\nabla w=\sqrt{6}\,\vec{v} \tag{2.10}$$

则 (2.9) 式化为

$$\nabla^2(\nabla\cdot\vec{v})=6\vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)+q \tag{2.11}$$

当我们考虑无侧向载荷，即

$$q=0 \tag{2.12}$$

的情况时，方程(2.11)式成为

$$-6\vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)+\nabla^2(\nabla\cdot\vec{v})=0 \tag{2.13}$$

方程(2.11)式和(2.13)式是我们考虑问题的出发点。

三、狭长条板的大挠度问题

对于狭长条板的大挠度问题，可以认为是一维问题。此时，方程(2.13)式成为

$$-6v^2v_{,x}+v_{,xxx}=0 \tag{3.1}$$

式中 $v_{,x}=\partial v/\partial x$。

作 Miura 变换[48](其反问题为 Riccati 方程)：

$$u=v^2+v_{,x} \tag{3.2}$$

则方程 (3.1) 式化为

$$-6uu_{,x}+u_{,xxx}=0 \tag{3.3}$$

方程(3.3)式有特解

$$u=\frac{2}{x^2} \tag{3.4}$$

与方程(3.3)式相比较，如果弹性大挠度的振动问题最终导致 KdV 方程

$$u_{,t}-6uu_{,x}+u_{,xxx}=0 \tag{3.5}$$

则我们注意到方程 (3.5) 式有孤立子解 (Soliton Solution)：

$$u=-\frac{c^2}{2}\mathrm{sech}^2\left[\left(\frac{c}{2}\right)(x-c^2t)\right] \tag{3.6}$$

由(3.4)式得到 u 的特解后，使方程(3.2)式成为 Riccati 方程。通过常用的 Cole-Hopf 变换

$$v=\frac{\psi_{,x}}{\psi} \tag{3.7}$$

可将 Riccati 方程(3.2)式化为

$$\psi_{,xx}-u\psi=0 \tag{3.8}$$

式中，u为方程(3.3)式的解，即(3.4)式。

方程(3.3)式或KdV方程(3.5)式都具有Galilei不变性:

$$u \to u-\lambda, \quad x \to x+6\lambda t \tag{3.9}$$

由此，方程(3.8)式可推广为

$$-\psi_{,xx}+u\psi=\lambda\psi \tag{3.10}$$

此方程正好是将u作为势的关于ψ的Schrödinger方程。λ为Schrödinger方程的本征值[59~61]。一般认为，Schrödinger方程是比von Kármán方程有着更广泛适用范围的重要方程。

如果狭长条板的大挠度问题存在外场（这外场可以是侧向载荷），外场的势用$U(x)$来表示，则在使用经典规则后，方程(3.10)式可推广为:

$$(-\nabla^2+U+u)\psi=\lambda\psi \tag{3.11}$$

式中，u可以理解为大挠度薄板的内能，U为外场的势能，$-i\nabla$为动量算符。

在方程(3.11)式中，如果外场的势

$$U=-\frac{\alpha}{x} \tag{3.12}$$

式中α为场常数，则通过变换

$$x=\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}z, \quad \alpha=-2i\sqrt{\lambda}k \tag{3.13}$$

可以将(3.11)式化为Whittaker方程[62~64]

$$\psi''+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}-\frac{2}{z^2}\right)\psi=0 \tag{3.14}$$

其解为

$$\psi=c_1M_{k,m}(-2i\sqrt{\lambda}x)+c_2M_{k,-m}(-2i\sqrt{\lambda}x) \tag{3.15}$$

式中c_1，c_2为任意常数，

$$m=\frac{\sqrt{7}}{2}i \tag{3.16}$$

$M_{k,m}$和$M_{k,-m}$为Whittaker方程的两个线性无关解:

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}&=e^{i\sqrt{\lambda}x}(-2i\sqrt{\lambda}x)^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i}F\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i-\frac{i}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},1+\sqrt{7}i,-2i\sqrt{\lambda}x\right) \\ M_{k,-m}&=e^{i\sqrt{\lambda}x}(-2i\sqrt{\lambda}x)^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i}F\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i-\frac{i}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},1-\sqrt{7}i,-2i\sqrt{\lambda}x\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

F为Kummer函数[63]。

由边界条件可以确定本征值λ的取值。狭长条板的大挠度问题，可以由(2.3)式、(2.10)式，(3.7)式、(3.9)式和(3.15)式得到最终解决。

von Kármán方程与Schrödinger方程的关系，还可以从AKNS方程(Ablowitz-Kaup-Newell-Segur方程)中得到。狭长条板的一维von Kármán方程，实际上是AKNS方程的特例[38],[64~66]。关于二维von Kármán方程，我们将在下面展开讨论。

四、一般性理论

弹性大挠度von Kármán方程与量子本征值Schrödinger方程之间的一般性联系，可以从推广的AKNS方程中得到。下面所要讨论的AKNS方程，是对四元ψ的本征值方程，因

此实际上是 Dirac 方程.

AKNS 方程或 Dirac 方程关于 ψ 的时间发展方程为

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi \tag{4.1}$$

关于线性算符 L 的本征值方程为

$$L\psi=\gamma_4\zeta\psi \tag{4.2}$$

式中 L 是 4×4 矩阵

$$L=-\left(i\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}+i\gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\right)-iM \tag{4.3}$$

ψ 为 Hilbert 空间的四元矢量

$$\psi=(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4)^T \tag{4.4}$$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -ir & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ip \\ ip & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ir & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

γ_α $(\alpha=1,2,3,4)$ 为 Dirac 矩阵(Flügge标准矩阵)[40]. 另外, 矩阵E为[1],[68]

$$E=\begin{pmatrix} -A & 0 & C & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ -B & 0 & A & 0 \\ 0 & -C & 0 & -A \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

ζ 为本征值, 它一般是复数, 但

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0 \tag{4.7}$$

为了求出方程 (4.1) 式和 (4.2) 式的可积性条件, 首先对方程 (4.2) 式等号两端取对时间 t 的微商$\partial/\partial t$, 即有

$$\frac{\partial}{\partial t}(L\psi)=L\frac{\partial\psi}{\partial t}-i\frac{\partial M}{\partial t}\psi=\gamma_4\zeta\frac{\partial\psi}{\partial t}=\gamma_4\zeta(-iE\psi)=-i\gamma_4\zeta E\psi$$

或

$$L\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\gamma_4E\zeta\psi+i\frac{\partial M}{\partial t}\psi \tag{4.8}$$

其次, 对方程(4.1)式等号两端同时作用算子L, 有

$$\begin{aligned} L\frac{\partial\psi}{\partial t}&=-iL(E\psi)=-i(LE)\psi-i\left(-i\gamma_1E\frac{\partial}{\partial x}-i\gamma_2E\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \\ &=-i(LE)\psi-iE\left(-i\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}-i\gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \\ &=-i(LE)\psi-iE(\gamma_4\zeta+iM)\psi \end{aligned}$$

由于

$$-iLE=-i\left(-i\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}-i\gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\right)E-ME=-\left(\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\right)E-ME$$

所以

$$L\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\left(\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\right)E\right]\psi+(EM-ME)\psi-iE\gamma_4\zeta\psi \tag{4.9}$$

若方程(4.1)式和(4.2)式可积, 则(4.9)式与(4.8)式之差应为零, 即

$$\left[-\left(\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\right)E\right]\psi+i(\gamma_4E-E\gamma_4)\zeta\psi$$
$$+(EM-ME)\psi=i\frac{\partial M}{\partial t}\psi \tag{4.10}$$

或

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial C}{\partial y} & 0 & -i\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y} \\ -i\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y} & 0 & i\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y} & 0 \\ 0 & -i\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y} & 0 & -i\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y} \\ i\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y} & 0 & -i\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}\psi$$
$$+2i\zeta\begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \end{pmatrix}\psi$$
$$+\begin{pmatrix} -i(rB-pC) & 0 & 2irA & 0 \\ 0 & -i(rB-pC) & 0 & 2ipA \\ 2ipA & 0 & i(rB-pC) & 0 \\ 0 & 2irA & 0 & i(rB-pC) \end{pmatrix}\psi=i\frac{\partial M}{\partial t}\psi \tag{4.10$'$}$$

将(4.10)′式等号两边同时左乘γ_3，得

$$i\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial r}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix}\psi$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial A}{\partial x}+i\frac{\partial A}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial B}{\partial x}+i\frac{\partial B}{\partial y} \\ -\frac{\partial A}{\partial x}-i\frac{\partial A}{\partial y} & 0 & \frac{\partial C}{\partial x}+i\frac{\partial C}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial C}{\partial x}-i\frac{\partial C}{\partial y} & 0 & \frac{\partial A}{\partial x}-i\frac{\partial A}{\partial y} \\ -\frac{\partial B}{\partial x}-i\frac{\partial B}{\partial y} & 0 & \frac{\partial A}{\partial x}+i\frac{\partial A}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}\psi$$

$$
-2\zeta\begin{pmatrix} -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \end{pmatrix}\psi
+\begin{pmatrix} 2pA & 0 & rB-pC & 0 \\ 0 & -2rA & 0 & -(rB-pC) \\ rB-pC & 0 & -2rA & 0 \\ 0 & -(rB-pC) & 0 & 2pA \end{pmatrix}\psi \tag{4.11}
$$

引入复自变量 $z=x+iy$，因为

$$
\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.12}
$$

式中 $\bar{z}=x-iy$，所以(4.11)式成为

$$
\begin{pmatrix}
-i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA+2\zeta B & -2\frac{\partial A}{\partial z} & rB-pC & -2\frac{\partial B}{\partial z} \\
-2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} & -i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA-2\zeta C & 2\frac{\partial C}{\partial \bar{z}} & -(rB-pC) \\
rB-pC & 2\frac{\partial C}{\partial z} & -i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA-2\zeta C & 2\frac{\partial A}{\partial z} \\
-2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} & -(rB-pC) & 2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} & -i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA+2\zeta B
\end{pmatrix}\psi=0 \tag{4.13}
$$

在(4.13)式中，将第四分量式与第一分量式相加减，将第二分量式与第三分量式相加减，得

$$
\begin{pmatrix}
-2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}-i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA+2\zeta B & -2\frac{\partial A}{\partial z}-(rB-pC) & 2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}+(rB-pC) & -2\frac{\partial B}{\partial z}-i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA+2\zeta B \\
2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}-i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA+2\zeta B & -2\frac{\partial A}{\partial z}+(rB-pC) & -2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}+(rB-pC) & -2\frac{\partial B}{\partial z}+i\frac{\partial p}{\partial t}-2pA-2\zeta B \\
-2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}+(rB-pC) & 2\frac{\partial C}{\partial z}-i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA-2\zeta C & 2\frac{\partial C}{\partial \bar{z}}-i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA-2\zeta C & 2\frac{\partial A}{\partial z}-(rB-pC) \\
-2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}-(rB-pC) & -2\frac{\partial C}{\partial z}-i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA-2\zeta C & 2\frac{\partial C}{\partial \bar{z}}+i\frac{\partial r}{\partial t}+2rA+2\zeta C & -2\frac{\partial A}{\partial z}-(rB-pC)
\end{pmatrix}\psi=0 \tag{4.14}
$$

由(4.14)式可以看出，$\psi_1=\bar{\psi}_4$，$\psi_3=\bar{\psi}_2$。从而，(4.14)式可简化为：

$$\begin{pmatrix} 2\frac{\partial C}{\partial z}-2\zeta C-i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA & 2\frac{\partial A}{\partial z}+pC-rB \\ 2\frac{\partial A}{\partial z}+pC-rB & 2\frac{\partial B}{\partial z}+2\zeta B-i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_2\\ \psi_4\end{pmatrix}=0 \qquad (4.15a)$$

和

$$\begin{pmatrix} -2\frac{\partial C}{\partial z}-2\zeta C-i\frac{\partial r}{\partial t}-2rA & -2\frac{\partial A}{\partial z}+pC-rB \\ -2\frac{\partial A}{\partial z}+pC-rB & -2\frac{\partial B}{\partial z}+2\zeta B-i\frac{\partial p}{\partial t}+2pA \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_2\\ \psi_4\end{pmatrix}=0 \qquad (4.15b)$$

及它们的共轭方程。而(4.15a)式和(4.15b)式是同一类方程，只要在方程(4.15a)式中作反射变换：

$$z\rightarrow -z \qquad (4.16)$$

便可得到(4.15b)式。

在方程(3.15a)式中，令

$$z=2z' \qquad (4.17)$$

并仍用 z 表示 z'，则有

$$\frac{\partial A}{\partial z}=rB-pC,\quad \frac{\partial B}{\partial z}+2\zeta B=i\frac{\partial p}{\partial t}-2pA,\quad \frac{\partial C}{\partial z}-2\zeta C=i\frac{\partial r}{\partial t}+2rA \qquad (4.18)$$

(4.18)式称为可积性条件[38]。

现在我们来试解方程组(4.18)式。设

$$A=a\zeta^3+f_1\zeta^2+g_1\zeta+h_1,\ B=f_2\zeta^2+g_2\zeta+h_2,\ C=f_3\zeta^2+g_3\zeta+h_3 \qquad (4.19)$$

将(4.19)式代入(4.18)式，比较 ζ^3，ζ^2 和 ζ 的系数，可得三组方程：

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}-rf_2+pf_3=0,\ 2f_2+2pa=0,\ 2f_3+2ra=0 \qquad (4.20)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}-rg_2+pg_3=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z}+2g_2+2pf_1=0,\quad \frac{\partial f_3}{\partial z}-2g_3-2rf_1=0 \qquad (4.21)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z}-rh_2+ph_3=0,\quad \frac{\partial g_2}{\partial z}+2h_2+2pg_1=0,\quad \frac{\partial g_3}{\partial z}-2h_3-2rg_1=0 \qquad (4.22)$$

令 $a=4$。可解得

$$f_1=0,\ f_2=-4p,\ f_3=-4r \qquad (4.23)$$

$$g_1=2pr,\quad g_2=2\frac{\partial p}{\partial z},\quad g_3=-2\frac{\partial r}{\partial z} \qquad (4.24)$$

$$h_1=-\left(r\frac{\partial p}{\partial z}-p\frac{\partial r}{\partial z}\right),\ h_2=-\left(2p^2r+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right),\ h_3=-\left(2pr^2+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \qquad (4.25)$$

从而 ζ 的零次项成为

$$i\frac{\partial p}{\partial t}-6pr\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}=0,\ i\frac{\partial r}{\partial t}-6pr\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial^3 r}{\partial z^3}=0 \qquad (4.26)$$

当 p，r 与时间 t 无关时，方程(4.26)式退化为

$$-6pr\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}=0,\quad -6pr\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial^3 r}{\partial z^3}=0 \tag{4.27}$$

利用(4.12)式、(4.17)式，并令

$$r=p-i\sqrt{3}s,\quad y\to\sqrt{3}y \tag{4.28}$$

就可以将方程(4.27)式的实部与弹性大挠度方程(2.9)式联系起来。因为在方程(2.9)式中，若令

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sqrt{6}p,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\sqrt{6}s,\quad y\to iy \tag{4.29}$$

则方程 (2.9) 式可以写为 (略去侧向载荷 q)：

$$p_{,xxx}+s_{,yyy}-p_{,xyy}-s_{,xxy}=6[p^2p_{,x}+s^2s_{,y}-ps(p_{,y}+s_{,x})] \tag{4.30}$$

它与方程(4.27)式的第一式实部在条件(4.28)下是相同的。

从而，整个弹性大挠度问题现在可以归结为如下 AKNS 方程 (Dirac 方程) 的求解：

时间发展方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi \tag{4.31}$$

本征值方程

$$L\psi=\gamma_4\zeta\psi \tag{4.32}$$

如果弹性大挠度问题存在外场，外场的势用 U_x，U_y 来表示，则在使用经典规则后，线性算符 L 应推广为

$$L=-i\left[\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}-iU_x\right)+\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}-iU_y\right)\right]-iM \tag{4.33}$$

式中 ψ，M 和 E 的定义见(4.4)式、(4.5)式和(4.6)式。

$$\left.\begin{aligned}
A&=\left[4\zeta^3+2pr\zeta+\left(p\frac{\partial r}{\partial z}-r\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right]+c.c.\\
B&=\left[-4p\zeta^2+2\frac{\partial p}{\partial z}\zeta-\left(2p^2r+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)\right]+c.c.\\
C&=\left[-4r\zeta^2-2\frac{\partial r}{\partial z}\zeta-\left(2pr^2+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right)\right]+c.c.
\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

式中 $c.c.$ 表示前一项方括号的共轭。

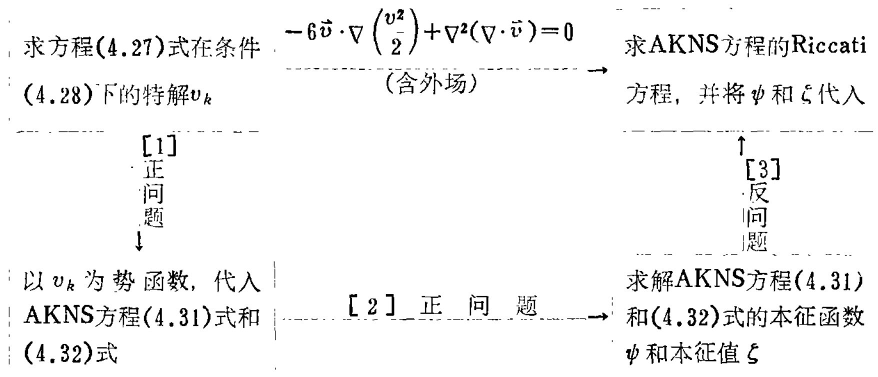
在求得了本征值 ζ 和本征函数 ψ 后，还必须由 Riccati 方程变换成方程(2.13)式的解。从 AKNS 方程(4.31)式和(4.32)式，可以得到 Riccati 方程。为此，必须令[38]

$$\Gamma_1=\frac{\psi_4}{\psi_2},\quad \Gamma_2=\frac{\psi_2}{\psi_4} \tag{4.35}$$

$$\Gamma_1^*=\frac{\psi_1}{\psi_3},\quad \Gamma_2^*=\frac{\psi_3}{\psi_1} \tag{4.36}$$

注意，Riccati 方程中的 p，r 不再是方程(4.27)式的特解，而是我们所要求的方程(2.13)式的解。

整个问题的求解可以归纳为下表：



此外，由 AKNS 方程(4.31)式和(4.32)式的散射反演方法和 Bäcklund 变换，可以求解弹性大挠度 w 的时间发展。

附记：当我们假定A为ζ的二次式，B，C为ζ的一次式的时候，我们可以得到二维的非线性 Schrödinger 方程；当我们假定A为ζ^{-1}次幂，B，C亦为ζ^{-1}次幂时，我们可以得到二维的 sine-Gordon 方程。如果扩大算符L和E的因次，还可以求解三波相互作用方程和 Bloch 方程的二维形式[38]。此外，如果将文[54]、[55]中的线性算符L解析延拓到复平面上，即令$x\to z=x+iy$，则也能得到方程(4.26)式[38]。这时方程(4.31)、(4.32)成为

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi,\qquad L\psi=\zeta\psi \tag{4.37}$$

式中

$$L=\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial z} & -ip \\ ir & -i\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \tag{4.38}$$

参 考 文 献

[1] 沈惠川，弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲，应用数学和力学，5，6 (1984)，817—827.

[2] Вольмир А. С., *Гибкие Пластики и Оболочки*, Гостехиздат, Москва (1956). 中译本，《柔韧板与柔韧壳》，卢文达等译，科学出版社 (1959).

[3] 张福范，《弹性薄板》，科学出版社 (1963).

[4] Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York (1953). 中译本，《材料力学发展史》，常振檝译，上海科学技术出版社 (1961).

[5] Timoshenko, S. P. and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill (1961). 中译本，《弹性稳定理论》，张福范译，科学出版社 (1965).

[6] Timoshenko, S. P. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, New York (1940). 中译本，《板壳理论》，科学出版社 (1977).

[7] Джанелидзе Г. Ю., Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, *ПММ*, 7 (1948).

[8] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，北京 (1956).

[9] 钱伟长，《变分法及有限元》，上册，科学出版社，北京（1980），490—565.

[10] Новожилов В. В., *Основы Нелинейной Теории Упругости*, Гостехиздат, Москва (1948). 中译本，《非线性弹性力学基础》，科学出版社（1958）.

[11] Washizu, Kyuichiro (鹫津久一郎), *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press (1968).

[12] von Kármán, Th., *Encyklopadie der Math. Wissonschaften*, Bd. Ⅳ 4 (1910), S349.

[13] Chien Wei-zang (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, **7** (1947), 102—113.

[14] Chien Wei-zang, Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection, *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser.*, A, **5** (1948), 71—94.

[15] Chien Wei-zang and Yeh Kai-yuan (叶开沅), On the large deflection of circular plate, *Acta Scientia Sinica*, **3**, 4 (1954), 403—436.

[16] Chien Wei-zang and Yeh Kai-yuan, Large deflection of a rectangular plate under uniform pressure, *Proc. Ninth Inten. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, **6** (1957), 403.

[17] Bromberg, E., Non-linear bending of a circular plate under mormal pressure, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **9** (1956), 633—659.

[18] Nash, W. A. and I. D. Cooly, Large deflection of a clamped elliptical plate subjected to uniform pressure, *Trans. ASME., J. of Appl. Mech.*, **26**, 2 (1959), 291—293.

[19] Fife, P., Non-linear deflection of thin elastic plates under tension, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **14** (1961), 81—112.

[20] Срубщик Л. С., Об асимптотическом интегрировании системы нелинейных уравнений теории пластии, *ПММ*, **28**, 2 (1964), 335—349.

[21] Schomidt, R. and D. A. Da Deppo, A new approach to the analysis of shells, plates and membrance with finite deflections, *Inter. J. of Non-Linear Mech.*, **9**, 5 (1974), 409—419. Schmidt, R., Several perturbation solutions in the nonlinear theory of circular plates and membranes, *Industrial Math.*, **25**, Part 2 (1975).

[22] Murray, D. W. and E. L. Wilson, Finite element large deflection analysis of plates, *J. Struct. Div. ASCE*, **95** (1969).

[23] Fox, R. L., Development in structural analysis by direct energy minimization, *AIAA J.*, **6**, 6 (1968).

[24] Walter, E., Haisler, Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural by the direct stiffness method, *AIAA J.*, **9**, 4 (1971), 1—13.

[25] Gass, N. and B. Tabarrok, Large deflection analysis of plates and cylindrical shells by a mixed finite element method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10** (1976), 711—746.

[26] Alzheimer, W. E. and R. T. Davis, Unsymmetrical bending of prestressed annular plates, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, **4** (1968), 905—917.

[27] Tucker, J. R., R. Schmidt and D. A. Da Deppo, Moderately large deflections of a loosely damped circular plate under a uniformly distributed pressure, *Indus. Math.*, **25**, 1 (1975), 17—28.

[28] 叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，**9**（1953），110—129.

[29] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，**10**（1954），209—238.

[30] 胡海昌，在均布及中心集中载荷作用下圆板的大挠度问题，物理学报，**10**（1954），383—394.

[31] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，《弹性圆薄板大挠度问题》，（文集），中国科学院（1954）.

[32] 陈山林，浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征，应用数学和力学，1，2 (1980)，261—272.
陈山林、光积昌，圆薄板大挠度问题的摄动参数，应用数学和力学，2，1 (1981)，131—144.
陈山林，圆板大挠度的钱伟长解及其渐近特性，应用数学和力学，3，4 (1982)，513—518.
[33] 王新志，变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题，应用数学和力学，4，1 (1983)，103—112.
[34] 江福汝，环形和圆形薄板在各种支承条件下的非线性弯曲问题，应用数学和力学，3，5 (1982)，629—640；5，2 (1984)，191—204.
[35] 黄道岸，变刚度矩形薄板的弯曲与稳定计算，应用数学和力学，4，4 (1983)，477—487.
[36] 黄 黔，复合载荷下圆薄板的大挠度问题，应用数学和力学，4，5 (1983)，711—720.
[37] Налешкевич Я., Квантовы свойства явлений упругой неустойчивости, *Бюлл. Польск. АН*, 3, 2 (1955), 59—72.
[38] 谷内俊弥、西原功修，《非线性波动》，徐福元等译，原子能出版社，§4.1—4.7，182—271.
[39] Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford (1958). 中译本，《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社 (1965).
[40] Van der Waerden, B. L., *Group Theory and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1974). 中译本，《群论与量子力学》，赵展岳等译，上海科学技术出版社 (1980)，1.
[41] Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, (3rd ed.), McGraw-Hill (1968). 中译本，《量子力学》，方励之校，人民教育出版社 (1982).
[42] Flügge, S., *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Varlag (1974). 中译本，《实用量子力学》，宋孝同等译，人民教育出版社 (上册，1981，下册，1983).
[43] 和達三樹，ソリトンの研究の现狀，[日]科学，45 (1975)，131.
[44] 张奠宙，二十世纪数学发展一瞥，自然杂志，5，3 (1982)，179.
[45] 黄迅成，孤立子及其数学理论，自然杂志，5，10 (1982)，738.
[46] (a) Böhm, D., 关于量子理论"隐"变数解释的倡议，*Phys. Rev.*, 85 (1952), 166—179; 180—193. 中译文，自然辩证法研究通讯，3 (1959)，42；4 (1959)，63.
(b) 曾谨言，《量子力学》，科学出版社，北京 (1981)，469—472.
[47] Gardner, C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Letters*, 19 (1967), 1095—1097.
[48] Miura, R. M., Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅰ) A Remarkable explicit non-linear transformation, *J. Math. Phys.*, 9 (1968), 1202—1204.
[49] Miura, R. M., C. S. Gardner and M. D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅱ) Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.*, 9 (1968), 1204—1209.
[50] Kruskal, M. D., R. M. Miura and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅴ) Uniqueness and nonexistence of bolynomial conservation lows, *J. Math. Phys.*, 11 (1970), 952—960.
[51] Su, C. H. and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, (Ⅲ) Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, *J. Math. Phys.*, 10 (1969), 536—539.
[52] Newton, R. G., *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York (1966).
[53] Kato, Yusuke (加藤佑辅), Inverse scattering method for the initial value problem of the nonlinear equation of evolution, *Suppl. of Prog. Theor. Phys.*, 55 (1974), 247—283.

[54] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys, Rev. Letters*, **31** (1973), 125—127; Mathod for solving the sine-Grodon equation, *Phys. Rev. Letters*, **30** (1973), 1262—1264.
[55] Ablowitz, M. J. and A. C. Newell, The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Pyhs.*, **14** (1973), 1277—1284.
[56] Lamb, G. L., On the connection between lossless propagation and pulse profile, *Physica*, **66** (1973), 298—314.
[57] 加藤佑辅, 《散射理论中的反演问题》, 岩波書店 (1977).
[58] 沈惠川, 单色弹性波谱的分裂, 应用数学和力学, **5**, 4 (1984), 541—551.
[59] Ландау Л. А. и Е. М. Лифшиц, *Квантовая Механика*, ГТТИ, Москва-Ленинград (1948). 中译本, 《量子力学》, 严肃译, 人民教育出版社 (1982).
[60] 湯川秀樹 (Yukawa, H.), 豐田利幸(Toyoda, R.), 《量子力学》岩波書店 (1978).
[61] 朝永振一郎 (Tomonaga, S.), 《量子力学》, みすず書房 (1978).
[62] Erdélyi, A., 《高级超越函数》, 张致中译, 科学技术出版社 (1978).
[63] 小谷正雄、桥本英典,《特殊函数》, 现代応用数学叢書之一, 钱端壮译, 上海科学技术出版社 (1962).
[64] 王竹溪、郭敦仁, 《特殊函数概论》, 科学出版社, 北京 (1965), 331.

The Relation of von Kármán Equation for Elastic Large Deflection Problem and Schrödinger Equation for Quantum Eigenvalues Problem

Shen Hui-chuan

(University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui)

Abstract

In this paper the solutions of von Kármán for elastic large deflection problem are classified as the several solutions of Schrödinger equation for quantum eigenvalues problem, and we present the transform form elastic large deflection problem from non-linear equation into linear equation. Thus, we create favourable conditions of the adoption of converse scattering method and Bäcklund transformation. We also discuss the large deflection problem of long and narrow plate.

We can study the non-linear transition of elastic thin plate by furnished method from this paper.