

# 用双向三角级数法解悬臂矩形薄板 在均布荷载下的弯曲\*

林小松 袁文伯

(中国矿业学院北京研究生部, 1984年4月10日收到)

## 摘 要

悬臂矩形板的弯曲问题是平板理论中的一个难题, 多年来, 对于这种板只有能量法与数值解法的近似解. 1979年以来清华大学张福范教授等用迭加法陆续得出悬臂矩形板在均布荷载和一些集中荷载作用下的解析解.

对于在均布荷载作用下的悬臂矩形薄板, 本文用双向三角级数法获得了其挠度函数的解析解, 并将所得结果与迭加法所得的结果进行了比较. 通过比较表明, 两种方法计算的结果符合得十分好, 因而相互印证了它们的正确性.

## 一、引 言

悬臂矩形板弯曲问题的主要困难, 在于它的解需要同时满足复杂的边界条件与两个自由角点条件. 以前的工作, 大多都是用能量法或数值解法来获得悬臂矩形板的近似解答. 近几年逐步有了用迭加法获得的悬臂矩形板的级数形式的解析解. 1979年, 我国清华大学的张福范教授运用迭加法获得了在与固支边平行的自由边中点作用一集中力的悬臂矩形板挠度的精确解, 以后他又用这一方法陆续解算了在均布荷载作用下, 在板中心集中力作用下与在自由边的任意位置上的集中力作用下悬臂矩形板的弯曲问题(参见文献[1]~[4]). 1982年, 福州大学林鹏程也采用迭加法解了在集中荷载下悬臂矩形板的弯曲, 他的集中荷载作用在垂直于固定边的板中线上的任意位置(见文献[5]).

本文拟采用双向三角级数法来求解均布荷载下悬臂矩形板的挠度函数.

对于在板面承受均布压力的悬臂矩形板, 可以将其挠度表示为

$$w = w_1 + w_2 \quad (1.1)$$

其中,  $w_1$  为弹性挠曲面微分方程

$$\nabla^4 w = q(x, y)/D \quad (1.2)$$

的一个特解; 而  $w_2$  为齐次方程

$$\nabla^4 w = 0 \quad (1.3)$$

的双向三角级数解. 式(1.2)中,  $q$  为板面均布荷载的集度,  $D$  为板的抗弯刚度. 用双向三

\* 张福范推荐.

角级数法求解挠度函数的步骤为: 首先写出满足双调和方程(1.3)与自由角点条件

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad (1.4)$$

的双向三角级数  $w_2 = w_2(x, y)$  (包含一定的待定系数), 然后选择满足挠曲面微分方程(1.2)与自由角点条件(1.4)的特解  $w_1 = w_1(x, y)$ , 最后由  $w = w_1 + w_2$  所应满足的全部边界条件来确定  $w_2(x, y)$  中所包含的全部待定常数, 从而使挠度函数获解。

## 二、悬臂矩形板的双向三角级数解

从一对边简支的矩形板的列维解可知, 挠度函数

$$w = \sum_m \left( A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

是满足双调和方程(1.3)的。显然, 若将上式中的“ $\sin \frac{m\pi x}{a}$ ”换成“ $\cos \frac{m\pi x}{a}$ ”, 即令

$$w = \sum_m \left( A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

也同样能满足双调和方程(1.3)。因而我们可写出双调和方程(1.3)的双向三角级数解:

$$\begin{aligned} w_2 = & \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left( A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left( E_i \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} + F_i \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} + H_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} \right) \cos \frac{i\pi y}{b} \\ & + K_0 + K_2 y + K_3 x^2 + K_4 y^2 + K_5 y^3 + K_1 x + K_5 x^3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

在图 1 所示的坐标系中, 式(2.1)不仅满足了双调和方程(1.3), 而且满足了自由角点条件(1.4)。

由于在我们的问题中荷载与结构均关于  $y$  轴对称, 故有  $E_i = H_i = 0$ ,  $K_1 = K_5 = 0$ ; 式(2.1)变为

$$\begin{aligned} w_2 = & \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left( A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left( F_i \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} \right) \cos \frac{i\pi y}{b} + K_0 + K_2 y + K_3 x^2 + K_4 y^2 + K_5 y^3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

我们选取无限长悬臂板在均布荷载下的挠度函数作为微分方程(1.2)的特解  $w_1$ , 即令

$$w_1 = \frac{qb^4}{24D} \left( 6\frac{y^2}{b^2} - 4\frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) \quad (2.3)$$

这个特解显然满足挠曲面微分方程(1.2)与自由角点条件(1.4)。

挠度  $w (= w_1 + w_2)$  所应满足的全部边界条件为:

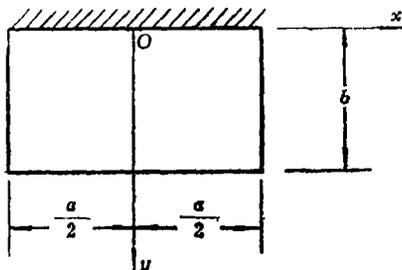


图 1

$$(w)_{y=0}=0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \quad (2.4a, b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right]_{y=b}=0 \quad (2.4c, d)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=\pm \frac{a}{2}}=0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=\pm \frac{a}{2}}=0 \quad (2.4e, f)$$

将式(2.2)与式(2.3)相加后代入边界条件(2.4b), 得:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{m\pi}{a} (A_m + D_m) \cos \frac{m\pi x}{a} + K_2 = 0$$

上式应满足  $x$  的一切值, 故应有:

$$K_2 = 0, \quad A_m + D_m = 0 \quad (2.5a, b)$$

考虑到(2.5)式, 将挠度式(2.2)与(2.3)相加并代入其余的边界条件, 得:

$$(w)_{y=0} = \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi x}{a} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( F_i \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} \right) + K_0 + K_3 x^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \{ (D_m - \mu A_m) \operatorname{sh} \alpha_m + [(1-\mu)B_m + 2C_m] \operatorname{ch} \alpha_m \\ &+ (1-\mu)(C_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m + D_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m) \} \cos \frac{m\pi x}{a} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2 (-1)^i}{b^2} \{ [(1-\mu)F_i \\ &- 2\mu G_i] \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + (1-\mu)G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} \} + 2K_4 + 2\mu K_3 + 6K_6 b = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right]_{y=b} &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} \{ 2D_m \operatorname{ch} \alpha_m + [-(1-\mu)B_m + (1+\mu)C_m] \operatorname{sh} \alpha_m \\ &- (1-\mu)C_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - (1-\mu)D_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \} \cos \frac{m\pi x}{a} + 6K_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left\{ (A_m - \mu D_m) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + [(1-\mu)B_m - 2\mu C_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1-\mu) C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + (1-\mu) D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \} (-1)^m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{b^2} \{ [(1-\mu) F_i \\
& + 2G_i] \operatorname{ch} \beta_i + (1-\mu) G_i \beta_i \operatorname{sh} \beta_i \} \cos \frac{i\pi y}{b} + 6\mu K_0 y + 2K_3 + 2\mu K_4 \\
& + \frac{\mu q b^2}{2D} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=\pm \frac{a}{2}} = \pm \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3 \pi^3}{b^3} \{ [-(1-\mu) F_i + (1+\mu) G_i] \operatorname{sh} \beta_i \\
& - (1-\mu) G_i \beta_i \operatorname{ch} \beta_i \} \cos \frac{i\pi y}{b} = 0 \tag{2.10}
\end{aligned}$$

式中:

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}, \quad \beta_i = \frac{i\pi a}{b} \quad (m=2, 4, \dots; i=1, 2, \dots)$$

方程(2.8), (2.10)应满足  $x$  和  $y$  的一切值, 故应有:

$$\begin{cases} K_0 = 0 & (2.11) \\ 2D_m \operatorname{ch} \alpha_m + [(1+\mu) C_m - (1-\mu) B_m] \operatorname{sh} \alpha_m - (1-\mu) C_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m \\ - (1-\mu) D_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0 & (2.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(1-\mu) F_i - (1+\mu) G_i] \operatorname{sh} \beta_i + (1-\mu) G_i \beta_i \operatorname{sh} \beta_i = 0 & (2.13) \end{cases}$$

由(2.5b), (2.12), (2.13)三式, 可得:

$$\begin{cases} A_m = -D_m & (m=2, 4, \dots) \end{cases} \tag{2.14a}$$

$$\begin{cases} B_m = \left( \frac{2}{1-\mu} \operatorname{cth} \alpha_m - \alpha_m \right) D_m + \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} - \alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \right) C_m & (m=2, 4, \dots) \end{cases} \tag{2.14b}$$

$$\begin{cases} F_i = \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} - \beta_i \operatorname{cth} \beta_i \right) G_i & (i=1, 2, \dots) \end{cases} \tag{2.14c}$$

将以上三式与式(2.11)代入式(2.6)、(2.7)、(2.9)并将式(2.6)、(2.7)中的  $\operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b}$ ,

$\operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b}$  和  $x^2$  在区间  $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$  上展成余弦级数, 将(2.9)中的  $\operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}$ ,

$\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}$ ,  $\frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}$  和  $\frac{\mu q b^2}{2D} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2$  在区间  $(0, b)$  上展成余弦级数, 经计算可得:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\mu}{1-\mu} \sum_{i=1}^{\infty} G_i \frac{\operatorname{sh} \beta_i}{\beta_i} + K_0 + \frac{a^2}{12} K_3 + \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} \left\{ \left[ \left( \frac{2}{1-\mu} \operatorname{cth} \alpha_m - \alpha_m \right) D_m + \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} - \alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \right) C_m \right] \right. \\
& \left. + K_4 \frac{4a^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2 \pi^2} + 4(-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_i}{P} \left( \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{P} \right) \frac{\operatorname{sh} \beta_i}{\beta_i} \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} = 0 \tag{2.15a}
\end{aligned}$$

$$2K_4 + 2\mu K_3 + \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{m^2}{\operatorname{sh} \alpha_m} \{ [2 + (3+\mu) \operatorname{sh}^2 \alpha_m] D_m + [(3+\mu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m$$

$$-(1-\mu)\alpha_m]C_m\} \cos \frac{m\pi x}{a} - \frac{2(1-\mu)\pi}{b^2} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (-1)^i \frac{G_i}{P} \left(1 - \frac{Q}{P}\right) \cdot \frac{\text{sh}\beta_i}{\beta_i} \cos \frac{m\pi x}{a} = 0 \quad (2.15b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\mu)\pi^2}{a^2} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} m^2 \frac{2}{1-\mu} \frac{D_m}{\alpha_m} - 2K_3 - 2\mu K_4 + \frac{(1-\mu)\pi^2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\beta_i} \\ & \cdot \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} m^2 (-1)^{\frac{m}{2}} \left\{ \frac{2m}{P^2} \left[ (-1)^i \text{ch}\alpha_m + \frac{P}{1-\mu} - 1 \right] D_m + (-1)^i \frac{2m}{P} \text{sh}\alpha_m C_m \right\} \\ & \cdot \cos \frac{i\pi y}{b} - \frac{(1-\mu)\pi^2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{\text{sh}\beta_i} \left( \frac{3+\mu}{1-\mu} \text{sh}\beta_i \text{ch}\beta_i - \beta_i \right) G_i \cdot \cos \frac{i\pi y}{b} \\ & = \frac{\mu q b^2}{6D} + \frac{2\mu q b^2}{\pi^2 D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{i\pi y}{b} \end{aligned} \quad (2.15c)$$

式中:  $P = 1 + \left(\frac{mb}{ia}\right)^2$ ;  $Q = 1 - \left(\frac{mb}{ia}\right)^2$

(2.15)的三个方程应满足一切  $x$  值与  $y$  值, 故应有:

$$\begin{cases} \frac{2\mu}{1-\mu} \sum_{i=1}^{\infty} G_i \frac{\text{sh}\beta_i}{\beta_i} + K_0 + K_3 \frac{a^2}{12} = 0 & (2.16a) \\ K_4 + \mu K_3 = 0 & (2.16b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\pi^2}{a^2} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m^2}{\alpha_m} D_m - 2K_3 - 2\mu K_4 = \frac{\mu q b^2}{6D} & (2.16c) \end{cases}$$

和

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{1-\mu} \text{cth}\alpha_m - \alpha_m \right) D_m + \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} - \alpha \text{cth}\alpha_m \right) C_m + K_3 \frac{4a^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2 \pi^2} \\ & + 4(-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_i}{P} \left( \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{P} \right) \frac{\text{sh}\beta_i}{\beta_i} = 0 \quad (m=2,4,\dots) \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m^2}{a^2 \text{sh}\alpha_m} \{ [2 + (3+\mu) \text{sh}^2 \alpha_m] D_m + [(3+\mu) \text{sh}\alpha_m \text{ch}\alpha_m - (1-\mu)\alpha_m] C_m \} \\ & - \frac{2(1-\mu)(-1)^{\frac{m}{2}}}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (-1)^i \frac{G_i}{P} \left( 1 - \frac{Q}{P} \right) \frac{\text{sh}\beta_i}{\beta_i} = 0 \quad (m=2,4,\dots) \end{aligned} \quad (2.17b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{i\beta_i} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} m^3 (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2}{P^2} \left\{ \left[ (-1)^i \text{ch}\alpha_m + \frac{P}{1-\mu} - 1 \right] D_m + (-1)^i \text{sh}\alpha_m C_m \right\} \\ & + \frac{i^2}{\text{sh}\beta_i} G_i \left( \beta_i - \frac{3+\mu}{1-\mu} \text{sh}\beta_i \text{ch}\beta_i \right) = \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{q b^4}{i^2 \pi^4 D} \quad (i=1,2,\dots) \end{aligned} \quad (2.17c)$$

由方程组(2.16)可得:

$$\left\{ \begin{aligned} K_3 = & -\frac{\mu qb^2}{12(1-\mu^2)D} + \frac{\pi^2}{(1-\mu^2)a^2} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} m^2}{\alpha_m} D_m \end{aligned} \right. \quad (2.18a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_0 = & -\frac{a^2}{12} K_3 - \frac{2\mu}{1-\mu} \sum_{i=1}^{\infty} G_i \frac{\text{sh}\beta_i}{\beta_i} \end{aligned} \right. \quad (2.18b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_4 = & -\mu K_3 \end{aligned} \right. \quad (2.18c)$$

将(2.18a)式代入方程(2.17a), 得:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{1-\mu} \text{cth}\alpha_m - \alpha_m \right) D_m + \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} - \alpha_m \text{cth}\alpha_m \right) C_m + \frac{4a^2(-1)^{\frac{m}{2}}}{m^2 \pi^2} \left[ -\frac{\mu qb^2}{12(1-\mu^2)D} \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2}{(1-\mu^2)a^2} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} K^2}{\alpha_k} D_k \right] + 4(-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_i}{P} \left( \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{P} \right) \frac{\text{sh}\beta_i}{\beta_i} = 0 \end{aligned} \quad (m=2,4,\dots) \quad (2.17a)'$$

当在挠度函数(2.2)中取定第一个级数的项数为 $L_m$ , 第二个级数的项数为 $L_i$ 时, 联立方程(2.17a)', (2.17b), (2.17c), 可得 $(2L_m+L_i)$ 阶线性代数方程组, 从而解得 $(2L_m+L_i)$ 个待定常数 $D_2, D_4, \dots, D_{2L_m}, C_2, C_4, \dots, C_{2L_m}, G_1, G_2, \dots, G_{L_i}$ . 将所得待定常数 $D_m, C_m, G_i$ 代入式(2.18)与式(2.14), 即可得到挠度函数(2.2)的其他待定常数 $K_0, K_3, K_4, A_m, B_m$ 与 $F_i$  ( $m=2,4,\dots, 2L_m; i=1,2,\dots, L_i$ ). 考虑到 $K_2, K_6$ 的值已由式(2.5a)与(2.11)分别表出, 至此我们即已得到挠度函数(2.2)的全部待定常数值, 从而挠度函数(2.2)获解。

### 三、算 例

以正方形板( $a:b=1$ )为例, 取 $\mu=0.3$ , 当两个级数均取9项( $L_m=L_i=9$ )时, 解得:

$$\begin{aligned} A_m = & \begin{matrix} 0.1106744 \times 10^{-2} \frac{qb^4}{D} & -0.2324016 \times 10^{-3} & 0.8769772 \times 10^{-4} \\ -0.4357041 \times 10^{-4} & 0.2544087 \times 10^{-4} & -0.1650884 \times 10^{-4} \\ 0.1153055 \times 10^{-4} & -0.8496908 \times 10^{-5} & 0.6519663 \times 10^{-5} \end{matrix} \\ B_m = & \begin{matrix} -0.1106691 \times 10^{-2} \frac{qb^4}{D} & 0.2324015 \times 10^{-3} & -0.8769772 \times 10^{-4} \\ 0.4357041 \times 10^{-4} & -0.2544087 \times 10^{-4} & 0.1650884 \times 10^{-4} \\ -0.1153055 \times 10^{-4} & 0.8496908 \times 10^{-5} & -0.6519663 \times 10^{-5} \end{matrix} \\ C_m = & \begin{matrix} 0.1106716 \times 10^{-2} \frac{qb^4}{D} & -0.2324016 \times 10^{-3} & 0.8769772 \times 10^{-4} \\ -0.4357041 \times 10^{-4} & 0.2544087 \times 10^{-4} & -0.1650884 \times 10^{-4} \\ 0.1153055 \times 10^{-4} & -0.8496908 \times 10^{-5} & 0.6519663 \times 10^{-5} \end{matrix} \\ D_m = & \begin{matrix} -0.1106744 \times 10^{-2} \frac{qb^4}{D} & 0.2324016 \times 10^{-3} & -0.8769772 \times 10^{-4} \\ 0.4357041 \times 10^{-4} & -0.2544087 \times 10^{-4} & 0.1650884 \times 10^{-4} \\ -0.1153055 \times 10^{-4} & 0.8496908 \times 10^{-5} & -0.6519663 \times 10^{-5} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$F_i = -0.1835795 \times 10^{-4} \frac{qb^4}{D} \quad -0.1885076 \times 10^{-4} \quad -0.3706008 \times 10^{-5}$$

$$-0.5819095 \times 10^{-6} \quad -0.8861703 \times 10^{-7} \quad -0.1377939 \times 10^{-7}$$

$$-0.2159631 \times 10^{-8} \quad -0.3474267 \times 10^{-9} \quad -0.5623853 \times 10^{-10}$$

$$G_i = -0.1270848 \times 10^{-8} \frac{qb^4}{D} \quad 0.1454304 \times 10^{-4} \quad 0.1297619 \times 10^{-5}$$

$$0.1314727 \times 10^{-6} \quad 0.1477728 \times 10^{-7} \quad 0.1820831 \times 10^{-8}$$

$$0.2363241 \times 10^{-9} \quad 0.3244181 \times 10^{-10} \quad 0.4579676 \times 10^{-11}$$

$$K_0 = 0.9756423 \times 10^{-3} \frac{qb^4}{D} \quad K_3 = -0.1060773 \times 10^{-1} \frac{qb^2}{D} \quad K_4 = 0.3182318 \times 10^{-2} \frac{qb^2}{D}$$

以上系数均用 7 位有效数字写出。有了这些系数，挠度  $w_2$  当两个级数均取 9 项时的表达式 (2.2) 即完全确定，将其与  $w_1$  的表达式 (2.3) 代入式 (1.1)，即最终地得到悬臂矩形板在均布荷载下的挠度函数表达式

$$w = \frac{qb^4}{24D} \left( 6\frac{y^2}{b^2} - 4\frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) + \sum_{m=2,4,\dots}^{18} \left( A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} + \sum_{i=1}^9 \left( F_i \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} \right) \cos \frac{i\pi y}{b} \\ + K_0 + K_3 x^2 + K_4 y^2 \quad (3.1)$$

由式 (3.1)，可得悬臂板在自由边  $y=b$  与  $x=\pm a/2$  的挠度式，弯矩  $M_y$  与克希霍夫剪力  $V_y$  沿固支边的分布式分别如下：

$$(w)_{y=b} = \frac{1}{8} \frac{qb^4}{D} + \sum_{m=2,4,\dots}^{18} (A_m \operatorname{sh} \alpha_m + B_m \operatorname{ch} \alpha_m + C_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m + D_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m) \cos \frac{m\pi x}{a} \\ + \sum_{i=1}^9 (-1)^i \left( F_i \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} \right) + K_0 + K_3 x^2 + K_4 b^2 \quad (3.2)$$

$$(w)_{x=\pm \frac{a}{2}} = \frac{1}{24} \frac{qb^4}{D} \left( 6\frac{y^2}{b^2} - 4\frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) + \sum_{m=2,4,\dots}^{18} \left( A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) (-1)^{\frac{m}{2}} + \sum_{i=1}^9 (F_i \operatorname{ch} \beta_i + G_i \beta_i \operatorname{sh} \beta_i) \cos \frac{i\pi y}{b} \\ + K_0 + \frac{a^2}{4} K_3 + K_4 y^2 \quad (3.3)$$

$$(M_y)_{y=0} = -\frac{1}{2} qb^2 - D \sum_{m=2,4,\dots}^{18} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} [(1-\mu)B_m + 2C_m] \cos \frac{m\pi x}{a} + D \sum_{i=1}^9 \frac{i^2 \pi^2}{b^2} \left\{ [(1-\mu)F_i \right. \\ \left. - 2\mu G_i] \operatorname{ch} \frac{i\pi x}{b} + (1-\mu)G_i \frac{i\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{i\pi x}{b} \right\} \quad (3.4)$$

$$(V_y)_{y=0} = qb - D \sum_{m=2,4,\dots}^{18} \frac{2m^3 \pi^3}{a^3} D_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.5)$$

表1~表4分别列出了计算机计算该4种量在一些点的值。为便于比较,表中并列入了迭加法与有限元法的计算结果。其中 $(w)$ ,  $(M_y)$ ,  $(V_y)$ 为本文的计算结果,  $[w]$ ,  $[M_y]$ 为文献[2]用迭加法获得的计算结果。

表 1

自由边  $y=b$  的挠度单位:  $\frac{qb^4}{D}$ 

$x/a$	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$(w)$	0.12912	0.12899	0.12861	0.12802	0.12728
$[w]$	0.13102	0.13091	0.13056	0.12998	0.12933
有限元解	0.12905	0.12892	0.12851	0.12788	0.12708

表 2

自由边  $x=\pm a/2$  的挠度单位:  $\frac{qb^4}{D}$ 

$y/b$	0.25	0.5	0.75	1
$(w)$	0.011824	0.043336	0.084078	0.12728
$[w]$	0.011949	0.044327	0.085046	0.12933
有限元解	0.01182	0.043221	0.083888	0.12708

表 3

弯矩  $M_y$  沿固支边的分布单位:  $qb^2$ 

$x/a$	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$(M_y)$	-0.53558	-0.53512	-0.52878	-0.51228	-0.24315
$[M_y]$	-0.53560	-0.53550	-0.53353	-0.51270	0
有限元解	-0.53092	-0.53058	-0.52760	-0.50399	-0.34571

表 4

剪力  $V_y$  沿固支边的分布

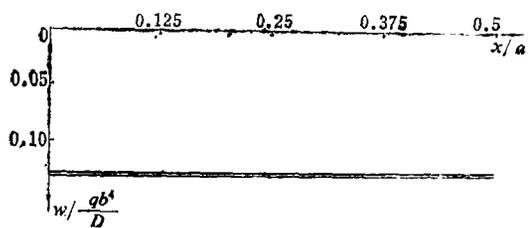
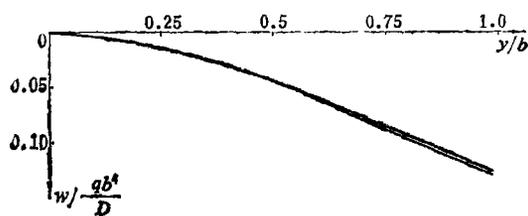
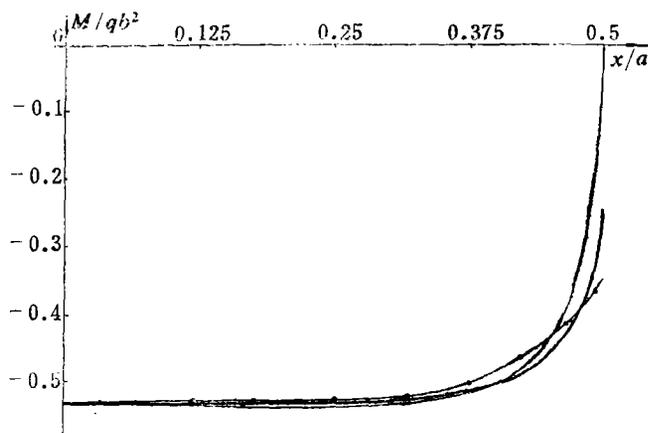
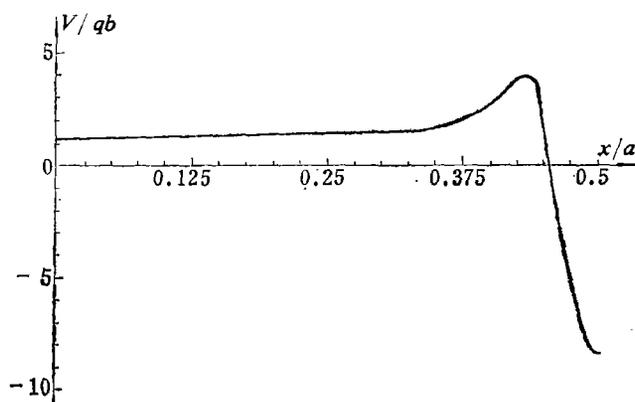
$x/a$	$(V_y)/qb$	$x/a$	$(V_y)/qb$	$x/a$	$(V_y)/qb$
0	1.18352	0.175	1.25761	0.35	1.53383
0.025	1.19618	0.2	1.29120	0.375	1.89301
0.05	1.19092	0.225	1.29277	0.4	2.50733
0.075	1.20658	0.25	1.33332	0.425	3.65618
0.10	1.21283	0.275	1.32726	0.45	1.97591
0.125	1.22741	0.3	1.37186	0.475	-4.45949
0.15	1.24778	0.325	1.40250	0.5	-8.51350

在以上表列数据中,本文的固支边弯矩和剪力是在两个级数中分别取18项计算的结果。

根据表1~表4,分别绘出图2~图5。从表1与表2中的数据可以看出,有限元解的挠度数值与本文非常接近——小数点后三位数字完全相同,因此二者的挠度曲线重合。在图2与图3中,用一条粗实线表示这条重合曲线,而细实线表示文献[2]所得的结果。在图4中,用粗实线示本文的计算结果,细实线示文献[2]的曲线,连点线为有限元解的结果。由全部图表可见,三种解答的挠度与弯矩均符合得相当好。

计算表明,本文所设双向三角级数形式的挠度函数收敛得相当快。例如,当两个级数只

取一项时,即得到板在自由边中点 $(0,b)$ 处的挠度为 $0.1308245qb^4/D$ ,与取9项时所得之值 $0.1291150qb^4/D$ 的相对差别仅为1.3%。弯矩的收敛较挠度慢一些,固支边中点 $(0,0)$ 处的弯矩在取9项时是 $-0.54479qb^2$ ,取18项时是 $-0.53558qb^2$ ,二者的相对差别为1.72%。

图2 自由边 $y=b$ 的挠度图3 自由边 $x=\pm\frac{a}{2}$ 的挠度图4 弯矩 $M_y$ 沿固支边的分布图5 剪力 $V_y$ 沿固支边的分布

由式(3.4), (3.5)分别求固支端的总弯矩与总剪力,考虑到(2.13)式,有:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (M_y)_{y=0} dx = -\frac{1}{2} qab^2; \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (V_y)_{y=0} dx = qab$$

可见固端弯矩与固端剪力总值恒精确地满足悬臂板的整体平衡条件。

在图 5 中可见, 固支端的剪力  $V_y$  在端点处有陡然增高的现象, 这是由于薄板理论采用的假设中忽略了剪应力的影响所致。如果采用中厚板理论进行计算,  $V_y$  曲线当平缓一些。

文中的全部计算均在邮电科学院计算中心的 ACOS—500 计算机上进行, 作者谨向邮电科学院计算中心的工作人员一并致谢。

### 参 考 文 献

- [1] 张福范, 悬臂矩形板的弯曲 (有一集中力作用于自由边的中点), 清华大学学报, 19, 2 (1979).
- [2] 张福范, 均布荷载下悬臂矩形板的弯曲, 应用数学和力学, 1, 3 (1980), 349—362.
- [3] 张福范, 在不连续荷载作用下的悬臂矩形板的弯曲, 应用数学和力学, 2, 4 (1981), 369—378.
- [4] 张福范, 悬臂矩形板的不对称弯曲, 固体力学学报, 2 (1980), 170—182.
- [5] 林鹏程, 在集中荷载作用下悬臂矩形板的弯曲, 应用数学和力学, 3, 2 (1982), 249—259.

## Solution of Bending of Cantilever Rectangular Plates under Uniform Surface-Load by the Method of Two-Direction Trigonometric Series

Lin Xiao-song    Yuan Wen-bo

(China Institute of Mining Technology, Beijing)

### Abstract

The bending of a cantilever rectangular plate is a very complicated problem in the theory of plates. For a long time, there have been merely approximate solutions for this problem by energy methods and numerical methods.

Since 1979, Prof. F. V. Chang of Qing Hua University, obtained by the method of superposition, a series of analytic solutions for cantilever rectangular plates under uniform load and concentrated load.

In this paper, the two-direction trigonometric series is used to obtain the solution for the bending of cantilever rectangular plates under uniform load. The obtained results are compared with the results by the method of superposition. The comparison shows that the results of these two methods are in good agreement, hence they are mutually confirmed to be correct.