

# 具有圆形切口的正交异性复合薄板的弹塑性分析\*

周 次 青

(华南工学院数学力学系, 1983年6月6日收到)

## 摘 要

本文给出了平面应力状态下 Tsai-Hill 屈服准则的标准参数形式; 研究了具有圆形切口、圆柱正交异性复合薄板在均匀的径向压力作用下, 其在 a. 弹性状态, b. 极限状态和 c. 弹塑性状态下的应力分布规律; 得到了弹性极限压力和极限载荷的公式。

## 一、问题的提出

A. Nadai 研究了各向同性带孔薄板的弹塑性平衡问题<sup>[1,2]</sup>。本文则对具有圆形切口、圆柱正交异性复合薄板, 在沿孔边的均匀径向压力作用下的弹塑性平衡进行了分析。

首先, 我们讨论在内缘  $r=a$  处作用有径向均布压力  $p$  的正交异性环板 (具有内径  $a$ , 外径  $b$  和厚度  $h$ ) 的轴对称弹-塑性问题 (图 1); 然后, 再研究具有圆形切口的无限大板的情形。

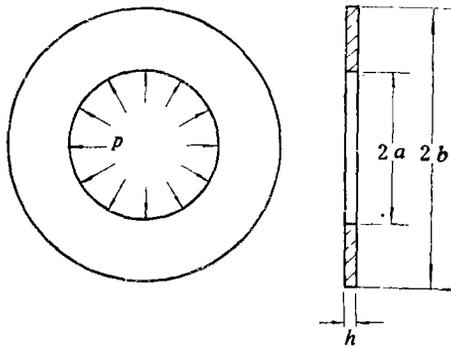


图 1

应变分量

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (1.4)$$

式中  $u$  是径向位移, 所满足的相容条件是

平面应力问题的 Tsai-Hill 屈服准则是

$$\frac{\sigma_\theta^2}{X^2} - \frac{\sigma_\theta \sigma_r}{X^2} + \frac{\sigma_r^2}{Y^2} = 1 \quad (1.1)$$

式中  $X$  和  $Y$  分别为材料在  $\theta$  和在  $r$  方向的强度。

正应力  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  满足平衡方程

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (1.2)$$

应力-应变关系为<sup>[3]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} \\ S_{r\theta} & S_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

\* 江福汝推荐。

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (1.5)$$

边界条件为

$$r=a, \quad \sigma_r = -p \quad (1.6)$$

$$r=b, \quad \sigma_r = 0 \quad (1.7)$$

## 二、弹性状态

若径向压力  $p$  是适度的, 板将处于弹性状态下. 引入应力函数  $\varphi$ , 使

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad (2.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2} \quad (2.2)$$

则平衡方程(1.2)自然满足. 由弹性应力与应变关系式(1.3), 应变分量可用应力函数表达为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} \\ S_{r\theta} & S_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{rr} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + S_{r\theta} \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\ S_{r\theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + S_{\theta\theta} \frac{d^2\varphi}{dr^2} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

将表达式(2.3)代入方程(1.5)并微分, 便得到以应力函数  $\varphi$  表示的相容条件为

$$S_{\theta\theta} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d^2\varphi}{dr^2} \right) - S_{rr} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (2.4)$$

因为我们所研究的问题是轴对称的, 可设满足以上方程解的应力函数  $\varphi$  的形式为

$$\varphi = r^k \quad (2.5)$$

这里  $k$  为一常数. 代入(2.1)和(2.2)式, 得应力分量

$$\sigma_r = kr^{k-2} \quad (2.6)$$

$$\sigma_\theta = k(k-1)r^{k-2} \quad (2.7)$$

应变分量的表达式(2.3)则化为

$$\varepsilon_r = [S_{rr} + (k-1)S_{r\theta}]kr^{k-2} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_\theta = [S_{r\theta} + (k-1)S_{\theta\theta}]kr^{k-2} \quad (2.9)$$

再代入相容条件, 得到

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1 + \sqrt{\frac{S_{rr}}{S_{\theta\theta}}}, \quad k_3 = 1 - \sqrt{\frac{S_{rr}}{S_{\theta\theta}}} \quad (2.10)$$

因为  $k_1 = 0$  恒对应于零应力情形, 所以, 问题的完全解为

$$\varphi = Ar^{1+\sqrt{K}} + Br^{1-\sqrt{K}} \quad (2.11)$$

这里  $K = S_{rr}/S_{\theta\theta}$ , 利用边界条件(1.6)和(1.7), 得

$$A = \frac{ap}{1+\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{a^{-\sqrt{K}}b^{2\sqrt{K}} - a^{\sqrt{K}}} \quad (2.12)$$

$$B = -\frac{ap}{1-\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{b^{-2\sqrt{K}}a^{\sqrt{K}} - a^{-\sqrt{K}}} \quad (2.13)$$

于是, 各应力分量为

$$\sigma_r = \frac{ap}{r} \left[ \frac{r^{\sqrt{K}}}{b^{2\sqrt{K}} a^{-\sqrt{K}} - a^{\sqrt{K}}} + \frac{r^{-\sqrt{K}}}{a^{\sqrt{K}} b^{-2\sqrt{K}} - a^{-\sqrt{K}}} \right] \quad (2.14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{ap\sqrt{K}}{r} \left[ \frac{r^{\sqrt{K}}}{b^{2\sqrt{K}} a^{-\sqrt{K}} - a^{\sqrt{K}}} - \frac{r^{-\sqrt{K}}}{a^{\sqrt{K}} b^{-2\sqrt{K}} - a^{-\sqrt{K}}} \right] \quad (2.15)$$

对于具有圆形切口的大薄板, 可令  $b \rightarrow \infty$ , 则由上面两式即得此时的应力分布规律为

$$\sigma_r = -p \left( \frac{a}{r} \right)^{\sqrt{K}+1} \quad (2.16)$$

(当  $b \rightarrow \infty$  时)

$$\sigma_\theta = \sqrt{K} p \left( \frac{a}{r} \right)^{\sqrt{K}+1} \quad (2.17)$$

我们还可将以上分析推广到环形薄板内外皆受均匀径向压力的情形。这时, 边界条件为

$$r=a, \quad \sigma_r = -p_1 \quad (2.18)$$

$$r=b, \quad \sigma_r = -p_2 \quad (2.19)$$

相应的应力场是

$$\sigma_r = \frac{(-p_1 ab^{-\sqrt{K}} + p_2 ba^{-\sqrt{K}}) r^{\sqrt{K}} - (-p_1 ab^{\sqrt{K}} + p_2 ba^{\sqrt{K}}) r^{-\sqrt{K}}}{r(a^{\sqrt{K}} b^{-\sqrt{K}} - b^{\sqrt{K}} a^{-\sqrt{K}})} \quad (2.20)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sqrt{K} [(-p_1 ab^{-\sqrt{K}} + p_2 ba^{-\sqrt{K}}) r^{\sqrt{K}} + (-p_1 ab^{\sqrt{K}} + p_2 ba^{\sqrt{K}}) r^{-\sqrt{K}}]}{r(a^{\sqrt{K}} b^{-\sqrt{K}} - b^{\sqrt{K}} a^{-\sqrt{K}})} \quad (2.21)$$

将  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  的表达式(2.16)和(2.17)代入 Tsai-Hill 屈服准则(1.1), 得

$$p^2 \left( \frac{a}{r} \right)^{2(\sqrt{K}+1)} = Y^2 (K + \sqrt{K}) + X^2 \quad (2.22)$$

因此, 弹性极限压力

$$p_e = \frac{XY}{\sqrt{Y^2 (K + \sqrt{K}) + X^2}} \quad (2.23)$$

当  $p < p_e$  时, 板将处于弹性状态; 当  $p = p_e$  时, 薄板在内缘  $r=a$  处开始屈服。

### 三、极限状态

Tsai-Hill 屈服准则(1.1)在  $\sigma_r \sim \sigma_\theta$  平面上为一椭圆, 其长轴与坐标轴  $\sigma_r$  成倾角  $\alpha$  (图2)。为将其标准化, 我们引入新坐标轴  $\sigma_1, \sigma_2$ , 如图2所示。并令

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{C + (Y^2 - X^2) \sqrt{C}}} [(Y^2 - X^2 + \sqrt{C}) \sigma_r + Y^2 \sigma_\theta] \quad (3.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{C + (Y^2 - X^2) \sqrt{C}}} [-Y^2 \sigma_r + (Y^2 - X^2 + \sqrt{C}) \sigma_\theta] \quad (3.2)$$

式中

$$C = 2Y^4 - 2X^2Y^2 + X^4 \quad (3.3)$$

或

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C}}} [(Y^2-X^2+\sqrt{C})\sigma_1 - Y^2\sigma_2] \quad (3.4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C}}} [Y^2\sigma_1 + (Y^2-X^2+\sqrt{C})\sigma_2] \quad (3.5)$$

将(3.4)和(3.5)式代入Tsai-Hill屈服准则(1.1), 便得到标准椭圆形形式如下:

$$\left[ \frac{\sqrt{2XY} \cdot \sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C}}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \sigma_1 \right]^2 + \left[ \frac{\sqrt{2X} \cdot \sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sigma_2 \right]^2 = 1 \quad (3.6)$$

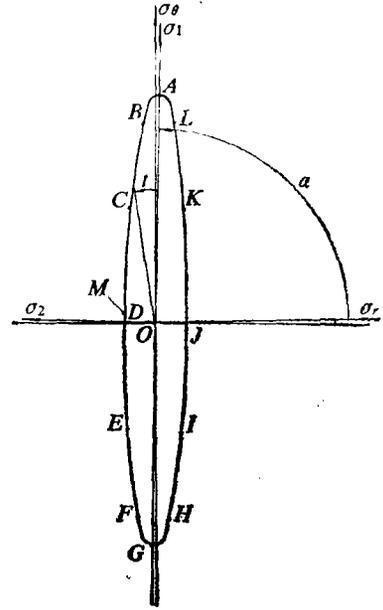


图 2

可见, 屈服椭圆的

长半轴为  $\sqrt{2XY} \cdot \sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C} / \sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}$

短半轴为  $\sqrt{2X} \cdot \sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C} / \sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}$

为了方便, 我们可将屈服椭圆写成参数方程的形式

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2XY} \cdot \sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C}}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t \quad (3.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2X} \cdot \sqrt{C+(Y^2-X^2)}\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t \quad (3.8)$$

式中参数  $t$  表征点在屈服椭圆上的位置 (图2)。于是, Tsai-Hill屈服准则(1.1)表成了以  $t$  为参数的形式

$$\sigma_r = \frac{XY(Y^2-X^2+\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t - \frac{XY^2}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t \quad (3.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{XY^3}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t - \frac{X(Y^2-X^2+\sqrt{C})}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t \quad (3.10)$$

为确定极限载荷  $p_0$  和此时的应力分布, 我们将所得到的  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  的参数表达式 (3.9) 和 (3.10) 代入平衡方程(1.2), 得到下列微分方程

$$r \cdot Y \frac{d}{dr} \left[ \frac{Y^2 - X^2 + \sqrt{C}}{\sqrt{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cos t - \frac{Y}{\sqrt{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}} \sin t \right]$$

$$= \frac{Y(X^2 - \sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cos t - \frac{2Y^2 - X^2 + \sqrt{C}}{\sqrt{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}} \sin t \quad (3.11)$$

该微分方程的一般解为

$$\left(\frac{A}{r}\right)^2 = \left[ \frac{2Y^2 - X^2 + \sqrt{C}}{\sqrt{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}} \sin t - \frac{Y(X^2 - \sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cos t \right]^{D_1} \exp[D_2 t] \quad (3.12)$$

式中  $A$  是一待定常数, 而

$$D_1 = \frac{Y^2 [2C - Y^4 - 2(X^2 - Y^2)\sqrt{C}]}{X^2 [2C - Y^4 + \frac{2}{\sqrt{C}} (2Y^6 + 3X^4Y^2 - 4X^2Y^4 - X^6)]} \quad (3.13)$$

$$D_2 = \frac{Y[\sqrt{C} - (X^2 - Y^2)]\sqrt{4X^2C + (10X^2Y^2 - 8X^4 - 2Y^4)\sqrt{C}} + 8X^2Y^4 - 10X^4Y^2 - 3Y^6 + 4X^6}{X^2 [2C - Y^4 + \frac{2}{\sqrt{C}} (2Y^6 + 3X^4Y^2 - 4X^2Y^4 - X^6)]} \quad (3.14)$$

利用边界条件

$$r = a, \quad \sigma_r = -p_r \quad (3.15)$$

或

$$r = b, \quad \sigma_r = 0 \quad (3.16)$$

可定出积分常数  $A$ , 为

$$A^2 = b^2 \left\{ \sqrt{\frac{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cdot \frac{2[C + (Y^2 - X^2)\sqrt{C}]}{Y(2Y^2 - X^2 + \sqrt{C})} \cos t_b \right\}^{D_1} \exp[D_2 t_b] \quad (3.17)$$

式中

$$t_b = \text{tg}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cdot \frac{Y^2 - X^2 + \sqrt{C}}{Y} \right] \quad (3.18)$$

因此, 微分方程(3.11)一般解的完全表达式为

$$\frac{b^2}{r^2} = \left\{ \frac{Y(2Y^2 - X^2 + \sqrt{C})}{2[C + (Y^2 - X^2)\sqrt{C}]} \cos t_b \left[ \sqrt{\frac{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}{2C + (3X^2 - 2Y^2)\sqrt{C}}} \sin t \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{Y(X^2 - \sqrt{C})}{(2Y^2 - X^2 + \sqrt{C})} \cos t \right] \right\}^{D_1} \exp[D_2(t - t_b)] \quad (3.19)$$

这里, 由平衡方程和屈服条件我们便完全确定了(静定地)屈服区域的应力场(不包括变形

研究)。

应力 $\sigma_r/Y \sim t$ ,  $\sigma_\theta/X \sim t$  和比值  $b/r \sim t$  的曲线图作于图3中。对于给定的  $b/r$  值可在曲线1上找到相应的点, 然后通过该点作铅垂线(如图3中虚线所示), 则该铅垂线与曲线2和3之交点之纵坐标即相应的  $\sigma_r/Y$  和  $\sigma_\theta/X$  值。这样, 根据不同的  $r$  值便可得出各相应的  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  值, 如是, 便可得到在全塑性状态下的应力分布。

对于用同样材料制成的薄板, 利用公式(3.9), (3.10) 和(3.19), 我们还可对不同的  $b/a$  值的薄板求得其极限载荷  $p_r$  值和  $\sigma_r/Y \sim t$ ,  $\sigma_\theta/X \sim t$  以及  $b/a \sim t$  的曲线图。这只需在公式(3.9)、(3.10)、(3.19) 和在图3中将  $r$ ,  $\sigma_r$  和  $t$  分别替换成  $a$ ,  $-\sigma_r$  和  $t_a$  即得。它们是

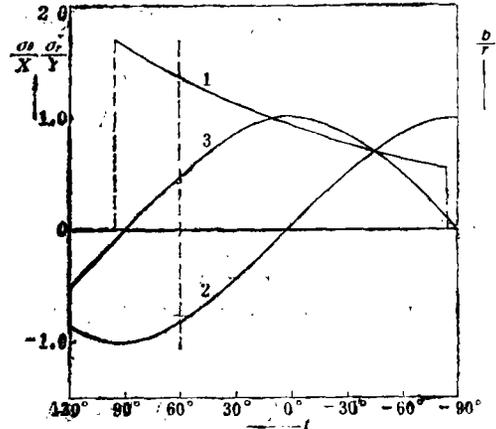


图 3

$$\frac{b^2}{a^2} = \left\{ -\frac{Y(2Y^2 - X^2 + \sqrt{C})}{2[C + (Y^2 - X^2)\sqrt{C}]} \cos t_b \left[ \sqrt{\frac{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}{2C + (3X^2 - 2Y^2)\sqrt{C}}} \sin t_a \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Y(X^2 - \sqrt{C})}{(2Y^2 + X^2 + \sqrt{C}) \cos t_a} \right] \right\}^{D_1} \exp[D_2(t_a - t_b)] \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)_a = -\frac{\sigma_r}{Y} = \frac{X(Y^2 - X^2 + \sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cos t_a \\ - \frac{XY}{\sqrt{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}} \sin t_a \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{X}\right)_a = \frac{Y^3}{\sqrt{2X^2C + (2X^2Y^2 - 2X^4 - Y^4)\sqrt{C}}} \cos t_a \\ + \frac{Y^2 - X^2 + \sqrt{C}}{\sqrt{2C + (3Y^2 - 2X^2)\sqrt{C}}} \sin t_a \quad (3.22)$$

#### 四、弹-塑性状态

对于具有圆形切口的大薄板, 不会出现全塑性状态, 而只可能局部的进入塑性状态。假设弹、塑性区交界线  $\Gamma$  的半径为  $c$  (图4), 弹性区 ( $r \geq c$ ) 在边界  $\Gamma$  上受到均布径向压力  $\sigma_c = -p_c$  的作用; 根据公式(2.23)和(2.15)以及(2.16), 可得各应力分量为

$$\sigma_c = p_c = \frac{XY}{\sqrt{(K + \sqrt{K})Y^2 + X^2}} \quad (4.1)$$

$$\sigma_r = -\sigma_c \left(\frac{c}{r}\right)^{\sqrt{K}+1} = -\frac{XY}{\sqrt{(K + \sqrt{K})Y^2 + X^2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{\sqrt{K}+1} \quad (4.2)$$

$$\sigma_\theta = \sqrt{K} \sigma_c \left(\frac{c}{r}\right)^{\sqrt{K}+1} = \frac{\sqrt{K}XY}{\sqrt{(K + \sqrt{K})Y^2 + X^2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{\sqrt{K}+1} \quad (4.3)$$

在塑性区( $a \leq r \leq c$ ), 利用边界条件

$$r=a, \quad \sigma_r = -p \quad (4.4)$$

$$r=c, \quad \sigma_r = -p_0 \quad (4.5)$$

由方程(3.9), 得到确定 $t_0$ 值的三角方程:

$$\frac{XY}{\sqrt{(K+\sqrt{K})Y^2+X^2}} = \frac{XY(Y^2-X^2+\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t_0 - \frac{XY^2}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t_0 \quad (4.6)$$

然后, 由方程(3.12), 定出积分常数 $A$ 为

$$A^2 = C^2 \left[ \frac{2Y^2-X^2+\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t_0 + \frac{Y(X^2-\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t_0 \right]^{D_1} \exp[D_2 t_0] \quad (4.7)$$

于是, 全塑性环形板的一般解为

$$r^2 = \left[ \frac{\frac{2Y^2-X^2+\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t + \frac{Y(X^2-\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t}{\frac{2Y^2-X^2+\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t_0 + \frac{Y(X^2-\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t_0} \right]^{D_1} \cdot \exp[D_2(t-t_0)] \quad (4.8)$$

当 $a \leq r \leq c$ 时,  $t_a \leq t \leq t_0$ . 在上式中令 $r=a$ ,  $t=t_a$ , 有

$$a^2 = \left[ \frac{\frac{2Y^2-X^2+\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t_a + \frac{Y(X^2-\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t_a}{\frac{2Y^2-X^2+\sqrt{C}}{\sqrt{2C+(3Y^2-2X^2)}\sqrt{C}} \sin t_0 + \frac{Y(X^2-\sqrt{C})}{\sqrt{2X^2C+(2X^2Y^2-2X^4-Y^4)}\sqrt{C}} \cos t_0} \right]^{D_1} \cdot \exp[D_2(t_a-t_0)] \quad (4.9)$$

这样, 对应给定的 $c$ 值, 我们可求得相应的 $t_a$ 值, 从而, 沿内缘 $r=a$ 处的径向压力 $p$ 可由公式(3.9)求得.

## 五、讨 论

以复合材料B-H为例, 假设纤维沿径向排列, 我们可求得旋转至标准椭圆的旋转角 $\alpha = 89.5^\circ$ , 其 $\sigma_r/Y$ 和 $\sigma_\theta/X$ 与 $t$ 的关系值经计算列于表1中.

在环的内缘 $r=a$ 处刚开始进入塑性状态时

$$\frac{\sigma_r}{Y} = -\frac{X}{\sqrt{(K+\sqrt{K})Y^2+X^2}} = -0.9920, \quad \frac{\sigma_\theta}{X} = \sqrt{K} \frac{Y}{\sqrt{(K+\sqrt{K})Y^2+X^2}} = 0.0764$$

这对应于屈服椭圆上的 $M$ 点(图2), 对应 $t=85.7^\circ$ . 若压力继续增高, 塑性区将逐渐向环内扩大, 当 $t=90.39^\circ$ 时,  $\sigma_r/Y$ 达到得大值, 载荷达到极限载荷,  $p_r = -1.0003Y$ . 与各向同性情形相比, 极限载荷值提高了1.71倍.

表 1

状 态	A	B	C	D	E	F
$t$	0	30°	60°	90°	120°	150°
$\sigma_r/Y$	0.0680	-0.4411	-0.8319	-0.9999	-0.8999	-0.5588
$\sigma_\theta/X$	1.0021	0.8684	0.5021	0.0012	-0.6000	-0.8672
状 态	G	H	I	J	K	L
$t$	180°	210°	240°	270°	300°	330°
$\sigma_r/Y$	-0.0680	0.4411	0.8319	0.9999	0.8999	0.5588
$\sigma_\theta/X$	-1.0021	-0.8684	-0.5021	-0.0012	0.5000	0.8672

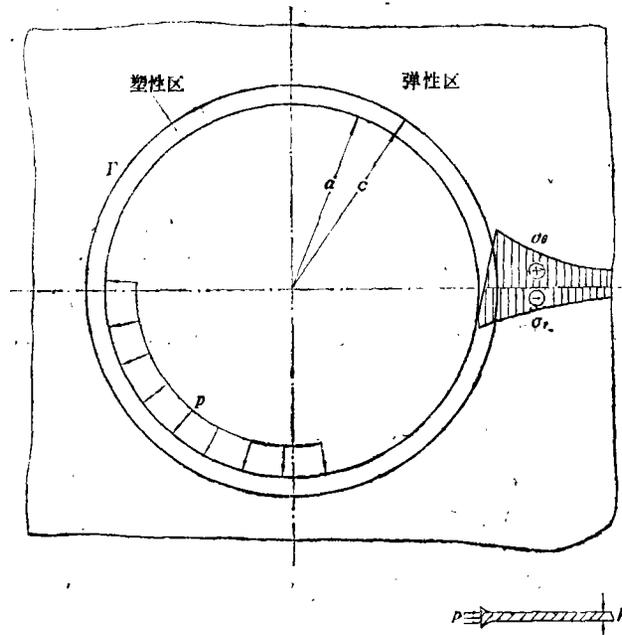


图 4

当 $t_a=96.18^\circ$ 时,  $b/a=1.73$ , 达到最大值。它表明, 若一环板的外径和内径之比  $b/a > 1.73$  时, 则该环板就不会出现全塑性状态, 而只能是部分塑性。也就是说, 当环的内缘处的径向压力  $p$  达到极限载荷  $p_p$  时, 薄板的塑性区将开始产生无限制的塑性流动, 沿环的内缘, 板的厚度将增加 (如图4所示), 而塑性区并不再扩大。

在表2中我们以B-H, P-H 和S-H 三种单向纤维增强复合材料为例, 将纤维分别沿径向 ( $\parallel r$ ) 和沿周向 ( $\parallel \theta$ ) 排列, 按照公式(2.23), (3.21)和(4.9)分别计算了其 $K$ ,  $p_e/Y$ ,  $p_p/Y$  和 $c/a$ 值, 并和各向同性进行了比较。

弹性极限压力 $p_e$ 不仅因复合材料而异, 而且即使是同一复合材料, 但纤维排列的方式不同,  $p_e$ 值亦不相同。计算表明, 当纤维沿 $r$ 方向排列时, 周向应力减少; 当纤维沿 $\theta$ 方向排列时, 周向应力增加。因此, 弹性极限压力 $p_e$ 在纤维沿 $r$ 方向排列时, 要比纤维沿 $\theta$ 方向排列时提高得多; 极限载荷 $p_p$ 则与纤维的排列无关。

表 2

纤维排列	复合材料	$K$	$p_e/Y$	$c_{\max}/a$	$p_e$ 相对提高值 %	$p_p$ 相对提高值 %
// $\theta$	玻璃/环氧	3	0.9604	1.0760	66	71
	硼/环氧	10	0.9002	1.0964	56	48
	石墨/环氧	40	0.7405	1.1759	28	58
// $r$	玻璃/环氧	0.33	0.9920	1.0253	72	71
	硼/环氧	0.1	0.9963	1.0164	73	48
	石墨/环氧	0.025	0.9984	1.0147	74	58

从表 2 我们还可看到, 用纤维增强了的具有圆形切口的薄板, 不仅弹性极限压力, 极限载荷大大提高了, 而且全塑性区只是在内缘附近很小的范围内。拿 B-H 复合薄板来说,  $c_{\max}/a=1.0253$ ; 而未用纤维增强时,  $c_{\max}/a=1.75$ 。这些, 都显示了复合材料的极大的优越性。

## 参 考 文 献

- [1] Nadai, A., *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 1, McGraw Hill (1950).
- [2] Kachanov, L. M., *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland Publication Company-Amsterdam, London (1971).
- [3] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book, Co., Washington, D. C., McGraw Hill, New York (1975).

## Elastic-Plastic Analysis of Cylindrically Orthotropic Composite Lamina with a Circular Hole under Uniform Pressure

Zhou Ci-qing

(Department of Mathematics and Mechanics South China Institute of Technology,  
Guangzhou)

## Abstract

This paper presents the standard parametric representation of the Tsai-Hill Yield Criterion in a state of plane stress and the equation governing the stress distribution in a cylindrically orthotropic composite lamina with a circular hole under uniform pressure for the three cases: (a) elastic state, (b) limit state and (c) elastic-plastic state. The formulas for the yield pressure and the limit pressure have been obtained,