应用数学和力学，第 6 卷第 8 期（1985年 8 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

粘弹性杆的某些问题*

邹凤梧　　柳训明

（华中工学院，1984年 9 月 24 日收到）

摘　　要

本文利用［3］所提出的方法讨论了粘弹性杆的几种线性和非线性问题。对于线性情形，［1］的结果在这里得到较为初等和简明的印证，同时还论述了有阻尼项的线性问题和有非线性强迫作用项 Pu^3 的幂非线性问题，从而建立了一些新的结果。

一、引　　言

Gurtin 等在［1］中用准静态理论讨论了粘弹性杆的线性固有值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\int_0^t \lambda(t-s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}ds+Pu=0 \qquad (t\geqslant 0,0<x<1,\lambda(t)\leqslant 0)\\&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ \int_0^1 u(t,x)dx=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中 u 是杆在点 x 的切线与未变形时的杆轴（取为 x 轴）的交角；λ 为杆的内损耗函数，假定是连续和小于零的。他们证明了这个问题有非可列无限个依赖于 t 的固有值 $P(t)$；而对任何常数值 P，问题(1.1)只有零解 $u\equiv 0$。

Gurtin 等还在[2]中提出了相应于 (1.1) 的非线性固有值问题（换 Pu 为 $P\sin u$），留待解决。柳训明和陈庆益在[3]中提出了一种解决途径，并对这个非线性问题宣布了第一个结果，而有所不同于线性情形，即：(1.1)的相应非线性问题既可有非可列无限个依赖于 t 的固有值 $P(t)$，也可有非可列无限个常数固有值。

［3］中所用方法对 $\sin u$ 是不妥当的，已另有补充论证[4]，但[3] 仍可用于线性和幂非线性的情形。本文应用这个方法讨论一些类似问题，首先从问题(1.1)开始，与[1] 中结果相印证，继而讨论有线性阻尼项和幂非线性的情形，借以看出[3]中方法的简明之处。

二、线 性 情 形

考虑问题(1.1)。和通常方法一样，尝试求变量分离形式的解：

$$u(t,x)=a(t)v(x)$$

* 叶开沅推荐。

（如下面将看到的，常可要求 $a(t)\geqslant a_0>0$ $(t\geqslant 0)$），将 $u=av$ 代入到(1.1)中方程，得

$$A(t)v''(x)+Pa(t)v(x)=0 \tag{2.1}$$

其中

$$A(t)\equiv a(t)+\int_0^t \lambda(t-s)a(s)ds$$

把 t 看作为参数，(2.1)的通解是：

$$v(x)=C_1(t)\cos\sqrt{\frac{Pa}{A}}\,x+C_2(t)\sin\sqrt{\frac{Pa}{A}}\,x$$

当认定 $P>0$ 时，也要求$A(t)\geqslant A_0>0$，适当选择 $a(t)$，总可以保证这一点。

由边界条件$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ 知，应取 $C_2(t)\equiv 0$；由边界条件$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0$，得

$$C_1(t)\cdot\sqrt{\frac{Pa}{A}}\sin\sqrt{\frac{Pa}{A}}=0$$

由此知道应取 P，使对任意选定的 $a(t)$（只须使 $a(t)\geqslant a_0>0$，$A(t)\geqslant A_0>0$）有

$$C_1(t)\equiv 0,\ \text{或}\sqrt{Pa/A}=k\pi,\ (k\ \text{为正负整数})。$$

为使$C_1(t)\not\equiv 0$，须取$P=P(t)=k^2\pi^2A(t)/a(t)$ $(k=1,2,\cdots)$；而当P取常数值时，一般不可能使$Pa/A=k^2\pi^2$，故须取 $C_1(t)\equiv 0$，于是 $u=a(t)v(x)\equiv 0$，只对应于零解，即问题(1.1)无常数固有值；而对任意选定的满足上述要求的 $a(t)$，总可取 $P(t)=k^2\pi^2A(t)/a(t)$ 使问题(1.1)有非零解 $u=C_1(t)\cos k\pi x$。既然 $a(t)\geqslant a_0>0$ 是非可列无限多的，所以问题(1.1)有非可列无限多个依赖于 t 的固有值。

至于上面提到的"当 P 为常数值时，一般不可能使 $Pa(t)/A(t)=k^2\pi^2$"中的"一般"二字也可去掉，这是因为齐次 Volterra 积分方程：

$$Pa(t)=k^2\pi^2A(t)=k^2\pi^2\left\{a(t)+\int_0^t\lambda(t-s)a(s)ds\right\} \tag{2.2}$$

对任何常数 P 只有零解 $a(t)\equiv 0$。注意齐次方程(2.2)只有零解一事（见[3]所引文献或任何有关积分方程的教科书）与取 $P(t)=k^2\pi^2\cdot A(t)/a(t)$ 并不矛盾，因为后者是在给定 $a(t)$ 后再确定 $P=P(t)$，而不是用给定的 P 利用(2.2)来确定 $a(t)$。

这样，我们首先就用[3]所提供的方法印证了[1]中的两个结论：

1) 当 $P(t)=\text{const}$ 时，问题(1.1)不可能有非平凡解；

2) 当 $P(t)\neq\text{const}$ 时，问题(1.1)存在非平凡解。

与[1]相比较，[3]的方法不仅要初等和简明一些，而且还可用它讨论较为一般的问题，这一点将在下面看到。

三、有线性阻尼的情形

考虑

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\int_0^t\lambda(t-s)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}ds+b\frac{\partial u}{\partial t}+Pu=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1,t\geqslant 0,b<0)\\&u(t,0)=u(t,1)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

问题仍是准静态的(例如见[5])，不同的是：出现线性阻尼项 $b\cdot\partial u/\partial t$，且边界条件由简支条件换成两端固定条件。显然，(3.1)中的 b 是阻尼系数，它应该是小于零的负数。

尝试求(3.1)的有变量分离形式的解：

$$u(t,x)=a(t)v(x)$$

将 $\partial u/\partial t=a'(t)v(x)$，$\partial^2u/\partial x^2=a(t)v''(x)$ 代入(3.1)得：

$$a(t)v''(x)+\int_0^t\lambda(t-s)a(s)v''(x)ds+ba'(t)v(x)+Pa(t)v(x)=0$$

令

$$A(t)\equiv a(t)+\int_0^t\dot{\lambda}(t-s)a(s)ds,\quad B(t)\equiv ba'(t)+Pa(t)$$

得

$$A(t)v''(x)+B(t)v(x)=0 \tag{3.2}$$

取 $A(t)$ 和 $B(t)$ 同号 ($a(t)\geqslant a_0>0$，$a'(t)\leqslant 0$，$b<0$)，则 (3.2) 可写成

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=-\frac{B(t)}{A(t)}=-\beta^2 \tag{3.3}$$

式中 β 为任意实常数。

由(3.3)得：

$$\begin{cases} v''(x)+\beta^2v(x)=0 & (3.4)\\ B(t)=\beta^2A(t) & (3.5)\end{cases}$$

(3.4)的通解为：

$$v(x)=C_1(t)\cos\sqrt{\frac{B(t)}{A(t)}}\,x+C_2(t)\sin\sqrt{\frac{B(t)}{A(t)}}\,x$$

$$=C_1(t)\cos\beta x+C_2(t)\sin\beta x$$

其中 $C_1(t)$，$C_2(t)$ 为以 t 作参数的积分常量。

由边界条件 $u(t,0)=0$，知 $C_1(t)\equiv0$；

由边界条件 $u(t,1)=0$，知

$$C_2(t)\sin\sqrt{\frac{B(t)}{A(t)}}=0$$

所以得：

$$C_2(t)\equiv0,\quad 或\sqrt{\frac{B(t)}{A(t)}}=k\pi$$

其中 $k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$。

因为 $C_2(t)\equiv0$ 导致 $u(t,x)=a(t)v(x)\equiv0$，所以不可取，只能是

$$\sqrt{\frac{B(t)}{A(t)}}=k\pi,即\ \frac{B(t)}{A(t)}=\beta^2=k^2\pi^2$$

其中对于 $A(t)$，$B(t)$ 的要求如上述，且 $A(t)\neq0$。

再来解方程(3.5)。为此把 $\beta^2=k^2\pi^2$ 代入(3.5)，得到：

$$Pa(t)+ba'(t)=k^2\pi^2\left(a(t)+\int_0^t\lambda(t-s)a(s)ds\right)$$

引入记号：

$$C=(P-k^2\pi^2)/b, \qquad D=k^2\pi^2/b$$

于是得到一个微分-积分方程

$$a'(t)+Ca(t)=D\int_0^t \lambda(t-s)a(s)ds \tag{3.6}$$

为了寻求(3.6)的解，可把它看成一个一阶线性方程式：

$$a'(t)+Ca(t)=f(t) \tag{3.7}$$

其中 $f(t)=D\int_0^t \lambda(t-s)a(s)ds$

是(3.7)的自由项。

利用通常的公式可求得(3.7)的解：

$$a(t)=\exp\left[-\int_0^t Cd\tau\right]\cdot\left[L+\int_0^t f(\tau)\exp\left[\int_0^\tau Cds\right]d\tau\right]$$

$$=e^{-Ct}\left[L+\int_0^t e^{C\tau}\left(D\int_0^\tau \lambda(t-s)a(s)ds\right)d\tau\right]$$

$$=Le^{-Ct}+D\int_0^t e^{-C(t-\tau)}\left(\int_0^\tau \lambda(t-s)a(s)ds\right)d\tau$$

其中常数 L。

变换关于 s 及 τ 的积分顺序，得

$$a(t)=Le^{-Ct}+D\int_0^t\left[\int_s^t e^{-C(t-\tau)}\lambda(\tau-s)d\tau\right]a(s)ds$$

或

$$a(t)=Le^{-Ct}+\int_0^t K(t,s)a(s)ds \tag{3.8}$$

其中

$$K(t,s)=\int_s^t De^{-C(t-\tau)}\lambda(\tau-s)d\tau$$

均为已知函数，$K(t,s)$是积分方程(3.8)的核。

(3.8)是 $a(t)$ 所满足的 Volterra 积分方程，由关于这种方程的讨论(见[3])，知当 $L\neq 0$ 时，(3.8)有唯一的非零解；而当 $L=0$时，(3.8)只有零解($a(t)\equiv 0$)。

至于 L 是否为零，则与 $u(t,x)$在 $t=0$ 时所给定的初值有关，即

当 $u(0,x)\equiv 0$ 时，$L=0$；当 $u(0,x)\neq 0$时，$L\neq 0$。

不难看出，上述讨论对于 $P=P(t)$的情形同样适用。

综上所述，得到如下结果：

定理 1 在有线性阻尼情形下，当给定零初值 ($u(0,x)\equiv 0$)时，不存在常数固有值；而当 $u(0,x)\neq 0$ 时，问题(3.1)有非可列无限多个常数固有值。此外，P 也可以是 t 的函数$P=P(t)$。

四、幂非线性情形

最后考虑问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\int_0^t \lambda(t-s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}ds+Pu^3=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0)\\&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

这个问题仍属准静态情形，但与问题(1.1)和(3.1)有所不同.(4.1)中方程含有幂非线性项Pu^3，这相当于粘弹性杆的力矩平衡方程（参阅文献[5]）中的轴向强迫力矩是

$$P(t)=Pu^2$$

于是作为$Pu^2\sin u$的一次近似，可取Pu^3：

$$P(t)\sin u=Pu^2\left(u-\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)\simeq Pu^3$$

故问题(4.1)是有相应的力学意义的.

另外，问题(4.1)中的边界条件是简支条件，也可换为其它典型边界条件.

尝试求(4.1)中方程的变量分离形式的解：

$$u(t,x)=a(t)v(x)$$

把

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a(t)v''(x),\ u^3=a^3(t)v^3(x)$$

代入问题(4.1)中方程，得

$$a(t)v''(x)+\int_0^t \lambda(t-s)a(s)v''(x)ds+Pa^3(t)v^3(x)=0$$

或

$$A(t)v''(x)+B_1(t)v^3(x)=0 \tag{4.2}$$

其中

$$A(t)\equiv a(t)+\int_0^t \lambda(t-s)a(s)ds,\ B_1(t)\equiv Pa^3(t)$$

于是把(4.2)式分离变量，得

$$\frac{v''(x)}{v^3(x)}=-\frac{B_1(t)}{A(t)}=\beta \tag{4.3}$$

其中β为任意常数，考虑到以后要求，我们取β为足够大的正数，即$\beta>>0$.

由(4.3)得：

$$\left\{\begin{aligned}&v''(x)=\beta v^3(x) &(4.4)\\&B_1(t)=-\beta A(t) &(4.5)\end{aligned}\right.$$

故求问题(4.1)的解变成求分别满足方程(4.4)、(4.5)和简支边界条件的$v(x)$及$a(t)$.如果它们都有非零解，则问题(4.1)就有非零解.

我们先讨论(4.4)的解.为此，可用$v'(x)$乘(4.4)式的两边，得

$$v''v'=\beta v^3v'$$

或

$$d\left(\frac{1}{2}v'^2\right)=d\left(\frac{\beta}{4}v^4\right)$$

上式两边积分，再开方得：

$$v'(x)=\sqrt{\frac{\beta}{2}v^4(x)+C_3} \tag{4.6}$$

其中 C_3 为待定积分常数。由(4.6)及简支条件($u_x(t,0)=0$)得：

$$v'(0)=\sqrt{\frac{\beta}{2}v^4(0)+C_3}=0$$

知 $$C_3=-\frac{\beta}{2}v^4(0)<0$$

再由(4.6)得：

$$\frac{dv}{\sqrt{\frac{\beta}{2}v^4-C_4}}=dx \qquad (C_4=-C_3>0)$$

两边积分，得：

$$\int\frac{dv}{\sqrt{\frac{\beta}{2}v^4-C_4}}=x+C_5 \tag{4.7}$$

其中 C_5 为第二个待定积分常数。

(4.7)式左边是一个椭圆积分。为了求它而做变换：

$$y=\left(\frac{\beta}{2C_4}\right)^{\frac{1}{4}}v=Q(C_4)v \qquad \left(Q(C_4)=\left(\frac{\beta}{2C_4}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

代入(4.7)，经整理得：

$$\int\frac{dv}{\sqrt{\frac{\beta}{2}v^4-C_4}}=\int\frac{dy}{Q(C_4)\sqrt{C_4}\sqrt{y^4-1}} \tag{4.8}$$

(4.8)式是一个椭圆积分，把它写成形式：

$$\frac{1}{Q(C_4)\sqrt{C_4}}\int\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(y^2-1)}}$$

后，可直接利用椭圆积分公式(见[6]公式539)：

$$\int_b^y\frac{dy}{\sqrt{(a^2+y^2)(y^2-b^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{b}{y},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \qquad (y>b>0) \tag{4.9}$$

并取 $a=1,\ b=1$

从而可得：

$$\frac{1}{Q(C_4)\sqrt{C_4}}\int_1^y\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(y^2-1)}}=\frac{1}{Q(C_4)\sqrt{2C_4}}\mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{1}{y},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

这里 cn^{-1} 为 cn 的逆函数，$\mathrm{cn}(\xi)$ 为 Jacobi 椭圆余弦函数。把上式代入(4.7)，得：

$$x+C_5=\frac{1}{Q(C_4)\sqrt{2C_4}}\mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{1}{y},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

或 $$1/y=\mathrm{cn}\left(Q(C_4)\sqrt{2C_4}(x+C_5)\right)$$

于是得： $v(x)=\frac{1}{Q(C_4)}y=\frac{1}{Q(C_4)}\frac{1}{\operatorname{cn}(Q(C_4)\sqrt{2C_4}(x+C_5))}$

微分得（关于 Jacobi 椭圆函数的导数见[7]，在那里给出：$d\operatorname{cn}(x)/dx=-\operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x)$）：

$$v'(x)=\frac{1}{Q}\frac{-Q\sqrt{2C_4}\operatorname{sn}(Q\sqrt{2C_4}(x+C_5))\operatorname{dn}(Q\sqrt{2C_4}(x+C_5))}{-\operatorname{cn}^2(Q\sqrt{2C_4}(x+C_5))}$$

$$=\sqrt{2C_4}\frac{\operatorname{sn}(Q\sqrt{2C_4}(x+C_5))}{\operatorname{cn}^2(Q\sqrt{2C_4}(x+C_5))}\operatorname{dn}(Q\sqrt{2C_4}(x+C_5))$$

现在即可利用边界条件确定 C_4，C_5。

因 $\operatorname{sn}(0)=0$ （见[7]p.310），由

$$v'(0)=\sqrt{2C_4}\frac{\operatorname{sn}(Q\sqrt{2C_4}\cdot C_5)}{\operatorname{cn}^2(Q\sqrt{2C_4}\cdot C_5)}\operatorname{dn}(Q\sqrt{2C_4}\cdot C_5)=0$$

可得：$C_5=0$；

再由 $$v'(1)=\sqrt{2C_4}\frac{\operatorname{sn}(Q\sqrt{2C_4})}{\operatorname{cn}^2(Q\sqrt{2C_4})}\operatorname{dn}(Q\sqrt{2C_4})=0$$

因 $\operatorname{sn}(2K_o)=-\operatorname{sn}(0)$，$\operatorname{sn}(4K_o)=\operatorname{sn}(0)$（见[7]），故可取：

$$Q(C_4)\sqrt{2C_4}=2K_o \tag{4.10}$$

这里 K_o 是完全椭圆积分的值；相应椭圆函数的实周期是 $4K_o$。

由(4.10)得 $2Q^2C_4=4K_o^2$，

或 $$\left[\left(\frac{\beta}{2C_4}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2\cdot 2C_4=\left(\frac{\beta}{2C_4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2C_4=4K_o^2$$

所以得 $C_4=8K_o^2/\beta$

注 1 在利用公式(4.9)求(4.8)时，有限制条件：$y>b=1$，由

$$y=Q(C_4)v(x)=\left(\frac{\beta}{2C_4}\right)^{\frac{1}{4}}v(x)$$

知，必须要求：$v(x)>(2C_4/\beta)^{\frac{1}{4}}$.

在我们所做的近似条件下（要求 u 很小），$v(x)$ 不能太大，因此必须取任意常数 $\beta>>0$ 时，这一条件即可满足.

再考虑关于 $a(t)$ 的方程(4.5)。把它完整写出来（若不要求 P 为常数，只须对给定的 $a(t)$ 取 $P=P(t)$ 满足下式即可)，是：

$$Pa^3(t)=-\beta\left[a(t)+\int_0^t\lambda(t-s)a(s)ds\right]$$

或 $$a(t)+\frac{P}{\beta}a^3(t)+\int_0^t\lambda(t-s)a(s)ds=0 \tag{4.11}$$

(4.11)是一个非线性积分方程。我们寻求(4.11)的适当小的解 $a(t)$。

在有界函数类中求解：$|a(t)|\leqslant M<1$。记

$$V(a_0,r)=\{a(t):a\in C[0,\infty),|a-a_0|<r\}$$

其中 $0<a_0<1$，$r>0$ 充分小，并记

$$F(a)\equiv\int_0^t-\lambda(t-s)a(s)ds-\frac{P}{\beta}a^3(t)$$

由于 $|a_0-F(a_0)|\leqslant a_0\left|\int_0^t -\lambda(t-s)ds-1\right|+\frac{|P|}{\beta}M^3\leqslant a_0\left|\int_0^\infty -\lambda(s)ds-1\right|+\frac{|P|}{\beta}M^3$

若要求 λ 满足如下条件(注意正 β 可取得充分大)：

$$0<a_0<r<1,\varepsilon>0 \text{ 且 (注意 } \lambda(s)<0)$$

$$\left|\int_0^\infty -\lambda(s)ds-1\right|+\frac{|P|}{a_0\beta}M^3\leqslant\varepsilon<1 \tag{4.12}$$

即有　　$|a_0-F(a_0)|<\varepsilon r<r$

根据[8]中关于压缩映射原理的注意 2，知方程(4.12)有具备上述要求的非零解 $a(t)\in V$ ($a(t)\equiv 0$ 不满足 $|a-a_0|<r$，不属于V)。

注 2　由于 $\lambda(t)\leqslant 0, P<0$，利用逐次逼近列

$$a_{n+1}(t)=\int_0^t -\lambda(t-s)a_n(s)ds-\frac{P}{\beta}a_n^3(t)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

并取 a_0 为充分小的正数，易知(4.12)的解　　$a(t)\geqslant a_0>0$

总结以上论述，得到如下结果：

定理 2　幂非线性固有值问题(4.1)，当条件(4.12)成立时，有非可列无限多个常数固有值及非可列无限多个函数固有值 $P(t)$。

本文得到兰州大学数力系陈庆益教授（现为华中工学院数学系教授）的宝贵建议和有益指点，我们在此谨表深切的谢意。

参 考 文 献

[1] Gurtin, M. E., V. J. Mizel and D. W. Reynolds, On nontrivial solutions for a compressed linear viscoelastic rod, *J. Appl. Mech.*, **49** (1982), 245—246.

[2] Gurtin, M. E., Some questions and open problems in continuous mechanics and population dynamics, *J. Diff. Eq.*, **48**, 2 (1983), 293—312.

[3] 柳训明、陈庆益，粘弹性杆的非线性固有值问题，华中工学院学报，2 (1985).

[4] 柳训明、陈庆益，粘弹性杆问题的另一解法，华中工学院学报，2 (1985).

[5] Distéfano, J. N., Creep-buckling of slender columns, *J. of Structural Division, Proceedings of ASCE*, **91** (1965), 127—150.

[6] 徐桂芳，《积分表》(公式 539).

[7] 斯米尔诺夫，《高等数学教程》，人民教育出版社，第三卷，第三分册 (1979), 312.

[8] 刘斯铁尔尼克，《泛函分析概要》，科学出版社 (1955), 46.

Some Problems for Viscoelastic Rods

Zou Feng-wu　　Liu Xun-ming

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

Using an approach proposed in[3], we consider some linear and nonlinear problems for viscoelastic rods.

Results in [1] for linear case are affirmed more elementarily and simply here. We also treat linear problem with damping term and nonlinear problem with power nonlinearity Pu^3. Some new results are established.