

# 边界积分方程在固体力学中的计算模型

王兴凤 王兴发

(同济大学) (北京工业学院)  
(钱伟长推荐, 1984年12月27日收到)

## 摘 要

本文有两个内容: (1) 建立边界积分方程在固体力学中的计算模型; (2) 用这种模型计算两个固体力学的问题.

## 一、引 言

边界积分方程法作为近代数值技术的一种重要方法, 由于它在解决复杂工程问题中所取得的显著成果<sup>[1]~[8]</sup>, 在国际上已引起广泛的注意, 相对而言, 国内对这种数值技术的研究工作较少. 本文希望有助于促进边界积分方程法在工程实践中的应用.

Rizzo<sup>[9]</sup>和 Cruse<sup>[10]</sup>最先提出把偏微分方程离散成边界积分方程, 但他们所建立的初始公式是很粗糙的. 此后 Cruse<sup>[11]</sup>和其它学者<sup>[12]</sup>改善了这种方法的精度. 最近有些学者<sup>[13][14]</sup>把边界积分方程和有限元技术结合起来解决了一些复杂的工程问题.

本文用  $\delta$  函数构造在固体力学中具有代表意义的 Dirichlet 问题或 Neumann 问题的基本解. 通过格林公式得到奇性积分方程, 利用这个基本解在边界上满足有指数  $\alpha$  的 Lipschitz 条件 ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), 把这种奇性积分方程推广到实用的阶段. 本文给出双调和方程和 Navier 型平衡方程的边界积分并导出这种计算模型的应力表达式. 最后用这种模型计算两个固体力学问题.

## 二、计 算 模 型

取常系数  $m$  阶微分方程

$$P(\partial)u = \sum \alpha_a \partial^a u = 0 \quad (2.1)$$

如果  $P(\partial)E = \delta$ , 我们就称  $E$  为微分方程  $P(\partial)u = 0$  的基本解, 其中的  $\delta$  是 Dirac 函数. 如果  $E$  是  $P(\partial)u = 0$  的基本解, 则

$$P(\partial)u = f, \quad u = E * f \quad (2.2)$$

其中

$$E * f = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-y)f(y)dy$$

假定有二维物体  $A$ , 求满足 Laplace 方程的函数  $\phi$ ,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\phi \in D) \quad (2.3)$$

$$\phi = f \text{ 或 } \frac{\partial \phi}{\partial n} = g \quad (\phi \in c) \quad (2.4)$$

其中的  $n$  是边界  $c$  上任意点的外法线矢量,  $f$  和  $g$  是边界的函数, 而  $f$  或者  $g$  可以是未知量. 这是 Dirichlet 或 Neumann 问题, 弹性扭转、理想流体都是这类问题.

现用  $\delta$  函数构造 (2.3) 式的基本解. 根据图 1,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(x) = \delta(x) = \begin{cases} \infty & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

若  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

若把  $\delta(x)$  函数从原点移到  $x_0$  点, 而  $f(x)$  在  $x=x_0$  连续, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (2.5)$$

现求满足下列方程的特解  $\varphi$ ,

$$\nabla^2 \varphi = \delta(x-x_0, y-y_0) \quad (2.6)$$

虽然  $\varphi$  就是 (2.3) 式基本解. 取极坐标以  $M_0$  点为圆心, 以小量  $\varepsilon$  为半径, 以  $c_\varepsilon$  为边界的圆形区域  $D_\varepsilon$ . 当  $r > 0$  时 ( $r$  是物体  $D$  区域内  $M_0$  和  $M$  点之间的距离), 在对称时  $\varphi$  应满足方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi = 0$$

$$\varphi = C_1 + C_2 \ln r$$

若在  $D_\varepsilon$  上实施格林第一公式, 则

$$\iint_{D_\varepsilon} \Delta \varphi d\sigma = \int_{c_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$\int_{c_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint_{D_\varepsilon} \delta(x-x_0, y-y_0) d\sigma = 1$$

$$\therefore \int_{c_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot r d\theta = -2\pi C_2$$

$$\therefore C_2 = -\frac{1}{2\pi} \text{ 取 } C_1 = 0 \text{ 得 } \varphi = -\frac{1}{2\pi} \ln r$$

其中的  $\Delta = \nabla^2$ .

$$\varphi = -\ln r \quad (2.7)$$

是方程 (2.3) 的基本解.

若把基本解 (2.7) 代入格林第二公式 (2.8),

$$\iint_{D-D_\varepsilon} (u \Delta V - V \Delta u) d\sigma = \int_{c+c_\varepsilon} \left( u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.8)$$

因  $M_0$  是间断点, 故在  $D-D_\varepsilon$  区域内实施 (2.8) 式. 取  $V$  为基本解, 即  $V = -\ln r$ ,

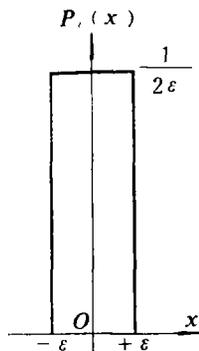


图 1  $\delta$  函数

$$\begin{aligned} & \iint_{D-D_\varepsilon} [u\Delta(-\ln r) + \ln r \cdot \Delta u] d\sigma \\ &= \int_{c+c_\varepsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} (-\ln r) + \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中的  $c_\varepsilon$  是  $D_\varepsilon$  的边界,

$$\int_{c_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} (-\ln r) ds = 2\pi \cdot u^* \quad (2.10)$$

其中的  $u^*$  是  $u(M)$  在  $c_\varepsilon$  上的中值,

$$\int_{c_\varepsilon} \ln r \frac{\partial u}{\partial n} ds = 2\pi \cdot \varepsilon \cdot \ln \varepsilon \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^* \quad (2.11)$$

其中的  $(\partial u / \partial n)^*$  是法向导数  $\partial u(M) / \partial n$  在  $c_\varepsilon$  上的中值.

把(2.10)和(2.11)式代入(2.9)式, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 两边取极限得

$$2\pi u(M_0) = \int_c \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds + \iint_D \ln r \cdot \Delta u d\sigma \quad (2.12)$$

若  $u = \phi$  是调和函数, 便得二维的边界积分方程

$$\phi(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left[ \phi(M) \frac{\partial}{\partial n} \ln r_{M_0 M} - \ln r_{M_0 M} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \right] ds_M \quad (2.13)$$

这样就把 Dirichlet 问题或 Neumann 问题转化成边界积分方程(2.13). 若知道函数  $\phi$  在边界  $c$  上的  $\phi(M)$  及法向导数  $\partial \phi(M) / \partial n$  利用(2.13)式能得到  $D$  区域内任意点  $M_0$  的未知函数  $\phi(M_0)$ .

线弹性的双调和方程是

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad (2.14)$$

方程(2.14)是固体力学的基本方程之一. 其中的  $\varphi$  是应力函数. 方程(2.14)的基本解是  $r^2 \ln r$ .

$$\text{令} \quad \nabla^4 \varphi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{则} \quad \phi = \nabla^2 \varphi = \nabla^2 r^2 \ln r \quad (2.16)$$

类似于上述推导, 把(2.16)式代入格林第二公式,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad & \iint_{D-D_\varepsilon} [u\Delta(\Delta r^2 \ln r) - \Delta(r^2 \ln r)\Delta u] d\sigma \\ &= \int_{c+c_\varepsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} (\Delta r^2 \ln r) - \Delta(r^2 \ln r) \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds_M \end{aligned} \quad (2.17)$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, (2.17)式变成

$$\left. \begin{aligned} & \int_{c_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} (4 \ln r + 4) r d\theta = -8\pi u^* \\ & \int_{c_\varepsilon} \Delta r^2 \ln r \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_0^{2\pi} (4 \ln r + 4) \frac{\partial u}{\partial r} \cdot r d\theta \rightarrow 0 \\ & \iint_{D_\varepsilon} [u\Delta(\Delta r^2 \ln r) - \Delta(r^2 \ln r)\Delta u] d\sigma \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

令  $u = \varphi$ , 则

$$\begin{aligned} & \iint_D [\Delta\phi(r^2 \ln r) - (\Delta r^2 \ln r) \cdot \phi] d\sigma \\ &= \int_c [(r^2 \ln r) \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \ln r)] ds_M \end{aligned} \quad (2.19)$$

把(2.18)和(2.19)式代入(2.17)式, 我们得到对应于双调和方程(2.14)的一组边界积分方程:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(M_0) &= \frac{1}{8\pi} \int_c \left[ \varphi(M) \frac{\partial}{\partial n} \Delta(r^2 \ln r) - \Delta(r^2 \ln r) \varphi - \frac{\partial\varphi(M)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + \phi(M) \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \ln r) - (r^2 \ln r) \frac{\partial\phi(M)}{\partial n} \right] ds_M \\ \phi(M_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_c \left[ \phi(M) \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \frac{\partial\phi(M)}{\partial n} \cdot \ln r \right] ds_M \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

用类似于上述方法, 我们还可推得:

三维拉柏拉斯方程的边界积分方程

$$\phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi(M)}{\partial n} - \phi(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma_M \quad (2.21)$$

其中的  $\Sigma$  是三维物体  $B$  的边界面.

Navier 型方程的边界积分方程

$$u_i(M_0) = \int_c [U_{ij} P_j(M) - T_{ij} u_j(M)] ds_M \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.22)$$

若边界周线  $c$  上的作用力  $P_j(M)$  及位移  $u_j(M)$  知道, 就能从(2.22)式得到物体内部任意点的位移  $u_i(M_0)$ . (2.22) 式中  $U_{ij}$  和  $T_{ij}$  是两次张量,

$$\begin{aligned} U_{ij} &= C_1 (\delta_{ij} C_2 \ln r - r_{,i} r_{,j}) \\ T_{ij} &= \frac{C_3}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ij} C_4 + 2r_{,i} r_{,j}) + C_4 (r_{,i} n_i - r_{,j} n_j) \right] \end{aligned}$$

其中

$$C_1 = -\frac{1}{8\pi G(1-\mu)}, \quad C_2 = 3-4\mu, \quad C_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)}, \quad C_4 = 1-2\mu$$

$\mu$  是泊松比,  $G$  是剪切模量, 下标逗号指对坐标的偏导数,  $n$  是垂直于物体边界的单位法线矢量.

边界条件  $\phi$ ,  $\partial\phi/\partial n$  或者边界上的作用力, 位移通常不同时都为已知. 我们利用复变理论中的下述定理:

设  $c$  是光滑的闭曲线,  $\varphi(j)$  在  $c$  上且满足有指数  $\alpha$  的 Liepshi 条件的一个函数,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 当点  $z$  从  $c$  的内部趋于任意一点  $t$  时, 则柯西积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(j)}{j-z} dj \quad (2.23)$$

趋于下面的极限值:

$$F(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(j)}{j-t} dj \quad (2.24)$$

本文的基本解都满足 Liepshi 条件, 因此当  $M_c \rightarrow P$  时 ( $M_0$  是区域内点,  $P$  是边界点), 根

据(2.24)式, 方程(2.13), (2.20), (2.21)和(2.22)分别变成

$$\phi(P) = \frac{1}{\pi} \int_c \left[ \phi(M) \frac{\partial}{\partial n} \ln r_{PM} - \ln r_{PM} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \right] ds_M \quad (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_c \left[ \varphi(M) \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 r_{PM}^2 \ln r_{PM}) \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} (\nabla^2 r_{PM}^2 \ln r_{PM}) + \phi(M) \frac{\partial r_{PM}^2 \ln r_{PM}}{\partial n} \right. \\ \left. - \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} (r_{PM}^2 \ln r_{PM}) \right] ds_M \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$\phi(P) = \frac{1}{\pi} \int_c \left[ \phi(M) \frac{\partial}{\partial n} \ln r_{PM} - \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \cdot \ln r_{PM} \right] ds_M$$

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r_{PM}} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} - \phi(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{PM}} \right) \right] ds_M \quad (2.27)$$

$$u_i(P) = 2 \int_c [U_{ij} P_j(M) - T_{ij} u_j(M)] ds_M \quad (i, j=1, 2) \quad (2.28)$$

其中 $r_{PM}$ 为边界 $c$ 上点 $P$ 和 $M$ 之间的距离. 用(2.25)~(2.28)式能解得所有的边界条件. 把这些边界条件代入方程(2.13), (2.20), (2.21)和(2.22), 我们就能得到物体内任意点 $M_0$ 的未知应力或者位移.

### 三、数值解

本文的积分方程一般都是奇性的, 它们数值解的计算程序如下:

- (一) 把边界离散成不等的区间, 分段模拟力、位移等边界条件和边界本身.
- (二) 分段把奇性方程变成代数方程.
- (三) 解含未知量的代数方程组.

现举例给出双调和方程的边界积分方程(2.26)的代数方程组.

把边界划分成 $n$ 个不等的区间, 具体见图2, 随 $c$ 的增加方向标上号码, 取每个区间的中心

$M$ 为节点. 假定 $\phi(x, y)$ 和 $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n}$ 在每个区间上是常量且等于该区间节点上的值 $\phi(M)$ 和 $\frac{\partial \phi(M)}{\partial n}$ , 经这些边界模拟就能用未知量 $\phi(M)$ 及 $\frac{\partial \phi(M)}{\partial n}$ 的 $2n$ 个代表方程组(3.1)式代替(2.26)式.

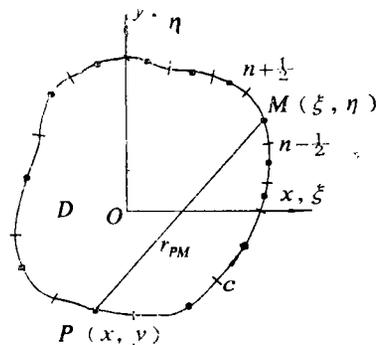


图2 边界划分

$$\left. \begin{aligned} \pi \phi(P) = \sum_{M=1}^n \left( a_{PM} \phi(M) - b_{PM} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \right) \\ 4\pi \varphi(P) = \sum_{M=1}^n \left( c_{PM} \phi(M) - d_{PM} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} + e_{PM} \varphi(M) - f_{PM} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $P=1, 2, \dots, n$ . 用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} [a_{PM} - I\pi] - [b_{PM}] \\ [c_{PM}] - [d_{PM}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\phi(M)] \\ \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [4\pi I - e_{PM}] & [f_{PM}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\varphi(M)] \\ \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

其中的  $I$  是单位矩阵, 它们的系数是

$$\left. \begin{aligned} a_{PM} &= \int_M \frac{\partial}{\partial n} \ln r_{PM} ds_M, & b_{PM} &= \int_M \ln r_{PM} ds_M \\ c_{PM} &= \int_M \frac{\partial}{\partial n} r_{PM}^2 \ln r_{PM} ds_M, & d_{PM} &= \int_M r_{PM}^2 \ln r_{PM} ds_M \\ e_{PM} &= \int_M \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 r_{PM}^2 \ln r_{PM} ds_M, & f_{PM} &= \int_M \nabla^2 r_{PM}^2 \ln r_{PM} ds_M \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

因此, 问题就简化成矩阵方程的解:

$$B\{X\} = \{R\} \quad (3.4)$$

其中的  $B$  是  $2n \times 2n$  矩阵,  $\{X\}$  和  $\{R\}$  是  $2n \times 1$  列矩阵. 从 (3.4) 式解得边界  $c$  的未知量  $\phi(M)$  或  $\partial \phi(M)/\partial n$ , 代入 (2.20) 式的第一式就能得到  $\varphi(M_0)$  根据  $\varphi(M_0)$  可得到物体内任意一点  $M_0$  的应力

$$\left. \begin{aligned} 8\pi\sigma_x(M_0) &= \sum_{M=1}^n \left[ A_{M_0M} \varphi(M) - B_{M_0M} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + C_{M_0M} \phi(M) - D_{M_0M} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \right] \\ 8\pi\sigma_y(M_0) &= \sum_{M=1}^n \left[ E_{M_0M} \varphi(M) - F_{M_0M} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + G_{M_0M} \phi(M) - H_{M_0M} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \right] \\ 8\pi\tau_{xy}(M_0) &= \sum_{M=1}^n \left[ -I_{M_0M} \varphi(M) + J_{M_0M} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - K_{M_0M} \phi(M) + L_{M_0M} \frac{\partial \phi(M)}{\partial n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中的系数是:

$$\begin{aligned} A_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (e_{M_0M}), & B_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f_{M_0M}) \\ C_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (c_{M_0M}), & D_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (d_{M_0M}) \\ E_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_{M_0M}), & F_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f_{M_0M}) \\ G_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (c_{M_0M}), & H_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (d_{M_0M}) \\ I_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (e_{M_0M}), & J_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f_{M_0M}) \\ K_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (c_{M_0M}), & L_{M_0M} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (d_{M_0M}) \end{aligned}$$

### 四、应 用

现举例说明本文的应用。第一个例是一块含裂纹的板(见图3),图4是它的边界分段图,其中的外力  $P=2$ , 以下的单位都已无量纲化。用边界积分方程(2.20),(2.26)和(3.2)式,编写程序计算线弹性断裂力学的 I 型应力强度因子  $K_I$  的结果是

$$K_I=4.95$$

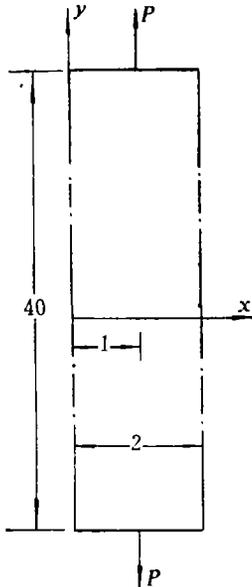


图 3 含裂纹的板

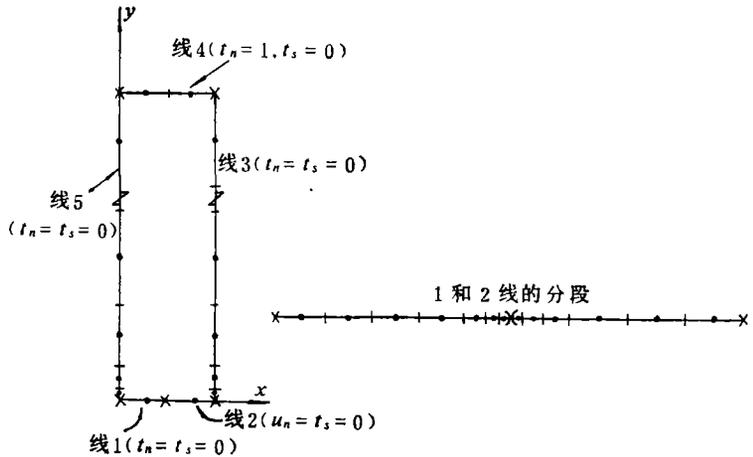


图 4 边界分段图

已发表的公开结果<sup>[15]</sup>(它有0.5%的误差)  $K_I=5.01$ 。结果表明用边界积分方程计算  $K_I$  很精确。

第二个例子是圣维纳扭转问题<sup>[16]</sup>。

根据弹性理论:

$$\tau_{xz} = -G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + ky\right), \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + kx\right) \quad (4.1)$$

其中的  $G$  是剪切模量,  $k$  是常量,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\varphi &= 0 & (\varphi \in B) \\ \varphi &= -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2) & (\varphi \in \partial B) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

令  $\phi = -\frac{2}{k}\varphi$ , 则方程(4.2)变成

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0 & (\text{在区域} B \text{上}) \\ \phi &= x^2 + y^2 & (\text{在边界} \partial B \text{上}) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

设有一个横截面为  $20 \times 32\text{cm}^2$  的矩形杆, 受扭矩  $M_T$  作用, 如图5所示。现用边界积分方程(2.13)和(2.25)进行求解。以矩形截面的中心为原点建立坐标系, 并将边界分成8个区间。

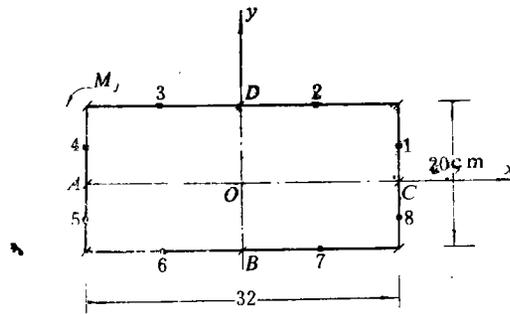


图 5 受扭杆的边界分段图

根据对称性, 只有两个边界未知量  $\partial\phi_1/\partial n$  和  $\partial\phi_2/\partial n$ .

用本文的计算方法得到的系数值:

$a_{11}=0$	$a_{12}=1.268$	$a_{13}=0.148$	$a_{14}=0.310$
$a_{15}=0.283$	$a_{16}=0.314$	$a_{17}=0.818$	$a_{18}=0$
$a_{21}=0.896$	$a_{22}=0$	$a_{23}=0$	$a_{24}=0.395$
$a_{25}=0.300$	$a_{26}=0.495$	$a_{27}=0.761$	$a_{28}=0.294$
$b_{11}=6.094$	$b_{12}=35.449$	$b_{13}=50.918$	$b_{14}=34.698$
$b_{15}=35.154$	$b_{16}=53.399$	$b_{17}=45.677$	$b_{18}=22.546$
$b_{21}=22.677$	$b_{22}=17.264$	$b_{23}=43.592$	$b_{24}=32.055$
$b_{25}=33.453$	$b_{26}=51.957$	$b_{27}=48.328$	$b_{28}=28.255$

在边界上,

$$\phi_1=\phi_4=\phi_5=\phi_8=281, \quad \phi_2=\phi_3=\phi_6=\phi_7=164$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\frac{\partial\phi_4}{\partial n}=\frac{\partial\phi_5}{\partial n}=\frac{\partial\phi_8}{\partial n}, \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial n}=\frac{\partial\phi_3}{\partial n}=\frac{\partial\phi_6}{\partial n}=\frac{\partial\phi_7}{\partial n}$$

用本文的方程(2.25)即方程(3.1)的第一式得:

$$98.492 \frac{\partial\phi_1}{\partial n} + 186.343 \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = -298.283, \quad 116.440 \frac{\partial\phi_1}{\partial n} + 161.41 \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = 220.448$$

解得

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = 15.298, \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = -9.690 \quad (4.4)$$

把(4.4)代入本文的方程(2.13) (离散成下式),

$$\phi(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{M=1}^8 \left[ \phi(M) \int_M \frac{\partial}{\partial n} (1nr_{M_0M}) ds_M - \frac{\partial\phi(M)}{\partial n} \int_M 1nr_{M_0M} ds_M \right]$$

其中的  $M_0$  的坐标是  $x, y$ . 利用(4.1)式得到用边界积分方程法的计算结果:

$$\text{在 } O(0,0) \text{ 点: } \tau_{xz}=0, \tau_{yz}=0$$

$$\text{在 } B(0,-10) \text{ 点: } (\tau_{xz})_{\max}=13.237Gk, \tau_{yz}=0$$

铁摩辛柯所著弹性理论<sup>[16]</sup>的结果:

$$\text{在 } O(0,0) \text{ 点: } \tau_{xz}=0, \tau_{yz}=0$$

$$\text{在 } B(0,-10) \text{ 点: } (\tau_{xz})_{\max}=17.38Gk, (\tau_{yz})=0$$

铁摩辛柯(Timoshenko)采用级数解法得到上述近似值. 本例用手算约需十多个小时. 这种方法的计算量较小, 精度容易控制.

## 五、讨 论

边界积分方程的积分核具有一定的物理意义。线性偏微分方程的解一般是连续分布量作用的结果,因此边界积分方程积分核的物理意义是集中量产生的效应。这种计算模型要求边界分段光滑而边界的形状是任意的。它的中心问题是积分核的确定。若能用有效的数学手段构造所需的积分核,它将在更广泛的领域中得到应用。边界积分方程是一种待开拓的近代数值技术。

## 参 考 文 献

- [1] Rizzo, F. J., A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem, *I. J. Solids and Structures*, 4 (1968), 1161—1173.
- [2] Rzasnicki, W., Plane elasto-plastic analysis of  $V$ -notched plate under bending by boundary integral equation method, Ph. D. Thesis, Univ. of Toledo, U. S. A. (1973).
- [3] Buttenbo, H., A boundary integral solution to torsion of cylinders and solids of revolution, *I. J. N. M. E.*, 9 (1975), 461—472.
- [4] Lachat, J. C., A further development of the boundary integral technique for elastostatics, Ph. D. Thesis, Univ. of Southampton, U. K. (1975).
- [5] Boissenot, J. M., Etude par equations integrales d'une eprouvette, C. T. 15, *Revue de Physique Appliquee*, 9, 9, July (1974), 611.
- [6] Brebbia, C. A. (ed.), *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Southampton, U. K. (1978).
- [7] Banerjee, R. K. and R. Butterfield (ed.), *Developments in Boundary Element Methods* — I, App. Sci. Pub. (1979).
- [8] Brebbia, C. A. (ed.), *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Southampton, U. K. (1980).
- [9] Rizzo, F. J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, *Q. App. Math.*, 25 (1967), 83—95.
- [10] Cruse, T. A., Numerical solutions in three dimensional elastostatics, *I. J. Solids and Structures*, 5 (1969), 1259—1274.
- [11] Cruse, T. A., An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis, *J. Computers and Structures*, 4 (1974), 741—757.
- [12] Ricardella, P. C., An improved boundary integral equation method for two-dimensional elasticity problems, Carnegie-Mellon Univ., Sept. (1972).
- [13] Zienkiewicz, O. C., etc., The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *I. J. Numerical Methods in Engng.*, 11, 2 (1977), 355—376.
- [14] Brebbia, C. A. and P. Georgiou, Combination of boundary and finite elements in elastostatics, *Appl. Math. Modelling*, 3, 3 (1979), 212—220.
- [15] Tade, H., etc., *The Stress analysis of Cracks Handbook*, Pel Research Corporation (1973).
- [16] 铁木辛柯 (S. P. Timoshenko), 《弹性理论》, 高等教育出版社 (1965).

## Computational Model of Boundary Integral Equation in Solid Mechanics

Wang Xing-feng

*(Tongji University, Shanghai)*

Wang Xing-fa

*(Beijing Institute of Technology, Beijing)*

### Abstract

In the first part of the paper, the computational model of boundary integral equation in solid mechanics is presented while in the second the model is used in the solution of two problems of solid mechanics.