

圆弧形波纹膜片的矩阵联乘解法*

周哲玮 王 蜀

(华中工学院, 1984年7月10日收到)

摘 要

将圆弧形波纹膜片看作几段圆环壳和中心圆板的组合构件, 本文利用钱伟长教授的圆环壳一般解^[1]及圆薄板小参数摄动理论^[2], 导出环壳和板的传递矩阵和连接矩阵, 用矩阵联乘法求得线性精确解和非线性解, 计算结果同 W. A. Wildhack 的实验^[3]是吻合的。

一、引 言

波纹膜片(膜盒)是精密仪器仪表中一种重要的弹性敏感元件。它的理论研究至今还不完善, 是人们长期以来所致力于解决的问题之一。

文[4](1955)和文[5](1982)分别用正交异性板理论和环壳理论计算了波纹膜片问题。对于圆弧形波纹膜片的计算, 文[6](1984)将这两种方法进行了比较。结论是, 在位移的计算上, 两种方法相差甚小, 但对于应力分布的计算, 只有用环壳理论才能得出与实验更为符合的结果。由此可知, 对于其他形状, 如三角形、矩形波纹等波纹膜片, 也只有用锥壳、柱壳等壳体方程, 才能得出较为符合实际的应力分布。

本文将带平中心的圆弧形波纹膜片看作几段圆壳和中心圆板的组合构件。对于平中心部分, 使用非线性大挠度方程, 利用钱伟长教授的圆薄板小参数摄动理论(1947)^[2], 用中心相对挠度为摄动参数, 求出其摄动解。当中间有硬心时, 由于中心环板很小, 采用线性理论计算。在波纹部分利用钱伟长教授的圆环壳一般解(1980)^[1], 导出环壳的传递矩阵, 连接矩阵由各段相接处的连续条件导出, 用矩阵联乘法(亦称传递矩阵法)求解。这一解法, 可避免求解较大的线性代数方程组, 只要进行四阶矩阵的运算, 并特别适用于计算形状不同的波所组成的膜片。

二、基 本 方 程

圆弧形波纹膜片的形式如图1。

OB为平中心部分, 根据膜片的实际情况, 分为带硬中心和不带硬中心两种。CD, DE为圆弧形波纹的半波, 按其子午面内曲率中心在中面以上或以下分别称为凸半波或凹半波。

* 钱伟长推荐。

本文在钱伟长教授指导下完成。

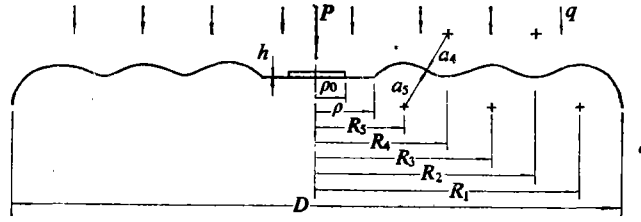


图 1

每个半波都是圆环壳的一部分。

符号说明如下：

- | | |
|--|----------------------------------|
| ρ_0 硬中心半径 | E, ν 弹性模量和泊松系数 |
| ρ 平中心半径 | P, q 集中载荷和均布压力, 以向下为正 |
| a_i 第 <i>i</i> 个半波子午平面内曲率半径 | Q 剪力 |
| R_i 第 <i>i</i> 个半波的整体半径 | N_r, N_θ, N_φ 中面薄膜力 |
| h 波纹膜片的厚度 | M_r, M_θ, M_φ 弯矩 |
| $\alpha_i = a_i/R_i$ | |
| $\mu_i = \sqrt{3(1-\nu^2)} \alpha_i^2/R_i h$ | } 第 <i>i</i> 个半波的几何参数 |

1. 平中心部分的基本方程:

中心无硬心时, 基本方程为 von Kármán 提出的圆薄板大挠度方程, 可将其写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] - N_r \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{2} qr \\ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0 \\ N_\theta &= \frac{d}{dr} (r N_r) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

中心有硬心时, 使用圆板线性方程:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = q \quad (2.2)$$

其中, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为板的抗弯刚度, w 为横向挠度。

内力, 载荷, 位移的正向如图2。

2. 波纹部分的基本方程:

波纹部分的任一半波看作一段圆环壳, 应用 В. В. Новожилов 导出的轴对称圆环壳复变量方程^[1]:

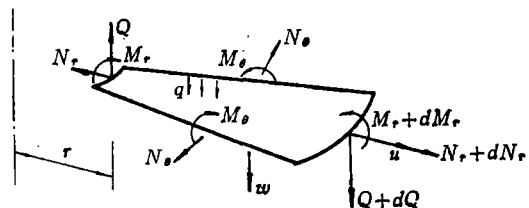


图 2

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \alpha \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + 2\mu \sin \varphi V = 2\mu P_0 \cos \varphi \quad (2.3)$$

其中, V 为复变量

$$V = -\frac{4\mu^2 D}{\alpha a^2} (1 + \alpha \sin \varphi) \chi + i \left\{ \frac{2\mu(1 + \alpha \sin \varphi)^2}{\alpha \sin \varphi} Q - 2\mu \frac{Q_0}{\alpha} \operatorname{ctg} \varphi \right\}$$

$$P_0 = -\frac{1}{2} \alpha q a i + \frac{Q_0}{\alpha} - 2\mu$$

其中, φ 为环壳任意点处的外法线和对称轴的夹角, Q_0 为 $\varphi=0$ 处的剪力, χ 为壳的轴向转角变形, Y 为水平方向位移, Z 为轴向位移, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为壳的抗弯刚度.

其内力、载荷、位移的正向如图3.

三、圆环壳的传递矩阵及其内力和位移

根据钱伟长教授的圆环壳理论^[1], 任一段圆环壳可由 $\alpha, \mu, \varphi_1, \varphi_2$ 唯一地确定 (图4). 其中 φ_1, φ_2 为环壳两条边界处的 φ 值.

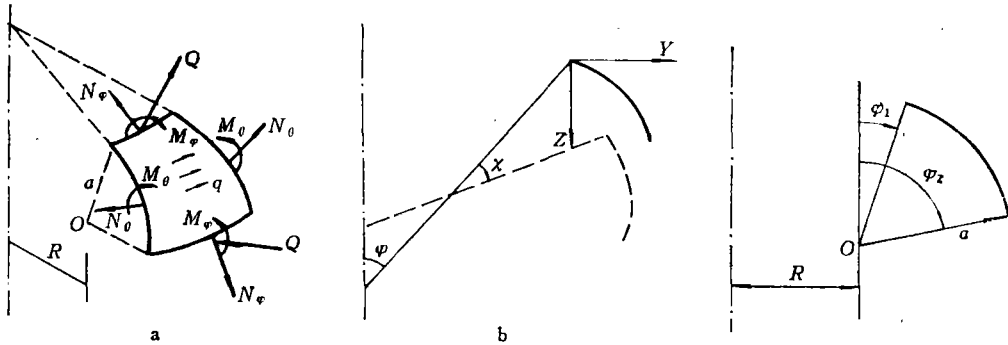


图 3

图 4

首先, 引入无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \frac{\rho^2}{4D} V, \quad \bar{\chi} = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho}{2h} \chi, \quad \bar{Y} = \sqrt{3(1-\nu^2)} Y/h, \quad \bar{Z} = \sqrt{3(1-\nu^2)} Z/h \\ \bar{N}_\varphi &= \frac{\rho^2}{4D} N_\varphi, \quad \bar{N}_\theta = \frac{\rho^2}{4D} N_\theta, \quad \bar{Q} = \frac{\rho^2}{4D} Q \\ \bar{M}_\varphi &= \frac{\rho^2}{4Dh} M_\varphi, \quad \bar{M}_\theta = \frac{\rho^2}{4Dh} M_\theta, \quad \bar{P} = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho^2}{16\pi Dh} P, \quad \bar{q} = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)} \rho^4}{16Dh} q \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中带“-”者为无量纲量, 无“-”者为有量纲量.

得到无量纲的基本方程为:

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 \bar{V}}{d\varphi^2} - \alpha \cos \varphi \frac{d\bar{V}}{d\varphi} + 2\mu i \sin \varphi \bar{V} = 2\mu \bar{P}_0 \cos \varphi \quad (3.2)$$

在如图所示的载荷下, 对于凸半波而言:

a. 均布力作用下

$$\bar{P}_0 = \frac{2\alpha^2 a^2}{\mu^2 \rho^2} \bar{q} i + \frac{\bar{Q}_0}{\alpha} - 2\mu, \quad \bar{Q}_0 = -\frac{2\alpha^2}{\mu \rho^2} \bar{q} \quad (3.3)$$

b. 中心集中力作用下

$$\bar{P}_0 = \frac{\bar{Q}_0}{\alpha} 2\mu, \quad \bar{Q}_0 = -\frac{2\alpha^2}{\mu} \bar{P} \quad (3.4)$$

为简单起见, 以下略去无量纲记号“-”。

由文[1], 方程的解由非齐次解 V^* 和齐次解 $V_{(1)}+V_{(2)}$ 两部分组成。

$$\left. \begin{aligned} V^* &= -2P_0 \{ A_1 \cos \varphi + A_2 \sin 2\varphi - A_3 \cos 3\varphi - A_4 \sin 4\varphi + \dots + A_{4n+1} \cos(4n+1)\varphi \\ &\quad + A_{4n+2} \sin(4n+2)\varphi - A_{4n+3} \cos(4n+3)\varphi - A_{4n+4} \sin(4n+4)\varphi + \dots \} \\ V_{(1)} &= (C'_0 + i\bar{C}'_0) \exp[-\beta(\varphi_2 - \varphi)] (\cos \gamma \varphi + i \sin \gamma \varphi) [f_1(\varphi) + i f_2(\varphi)] \\ V_{(2)} &= (B'_0 + i\bar{B}'_0) \exp[-\beta(\varphi - \varphi_1)] (\cos \gamma \varphi - i \sin \gamma \varphi) [g_1(\varphi) + i g_2(\varphi)] \\ V &= V^* + V_{(1)} + V_{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中, $f_1(\varphi), f_2(\varphi), g_1(\varphi)$ 和 $g_2(\varphi)$ 为三角级数形式的实函数

$$\left. \begin{aligned} f_1(\varphi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\varphi - q'_n \sin n\varphi), \quad f_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (p'_n \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi) \\ g_1(\varphi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n\varphi + q'_n \sin n\varphi), \quad g_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-p'_n \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$C'_0, \bar{C}'_0, B'_0, \bar{B}'_0$ 为待定的实常数, $A_n = J_n + iK_n, \beta, \gamma, p_n, q_n, p'_n, q'_n$ 为已知系数, 见文[1]。方程的解可分为虚部 $\text{Im}V$ 和实部 $\text{Re}V$ 两部分。

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}V &= - \left[\frac{4\alpha^2 a^2}{\mu \rho^2} q J(\varphi) + \frac{4Q_0 \mu}{\alpha} K(\varphi) \right] + C'_0 \Omega_2(\varphi) + \bar{C}'_0 \Omega_1(\varphi) \\ &\quad - B'_0 \omega_2(\varphi) + \bar{B}'_0 \omega_1(\varphi) \\ \text{Re}V &= \frac{4\alpha^2 a^2}{\mu \rho^2} q K(\varphi) - \frac{4Q_0 \mu}{\alpha} J(\varphi) + C'_0 \Omega_1(\varphi) - \bar{C}'_0 \Omega_2(\varphi) \\ &\quad + B'_0 \omega_1(\varphi) + \bar{B}'_0 \omega_2(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } J(\varphi) &= J_1 \cos \varphi + J_2 \sin 2\varphi - J_3 \cos 3\varphi - J_4 \sin 4\varphi + \dots + J_{4n+1} \cos(4n+1)\varphi \\ &\quad + J_{4n+2} \sin(4n+2)\varphi - J_{4n+3} \cos(4n+3)\varphi - J_{4n+4} \sin(4n+4)\varphi + \dots \\ K(\varphi) &= K_1 \cos \varphi + K_2 \sin 2\varphi - K_3 \cos 3\varphi - K_4 \sin 4\varphi + \dots + K_{4n+1} \cos(4n+1)\varphi \\ &\quad + K_{4n+2} \sin(4n+2)\varphi - K_{4n+3} \cos(4n+3)\varphi - K_{4n+4} \sin(4n+4)\varphi + \dots \\ \Omega_1(\varphi) &= \exp[-\beta(\varphi_2 - \varphi)] [\cos \gamma \varphi f_1(\varphi) - \sin \gamma \varphi f_2(\varphi)] \\ \Omega_2(\varphi) &= \exp[-\beta(\varphi_2 - \varphi)] [\sin \gamma \varphi f_1(\varphi) + \cos \gamma \varphi f_2(\varphi)] \\ \omega_1(\varphi) &= \exp[-\beta(\varphi - \varphi_1)] [\cos \gamma \varphi g_1(\varphi) + \sin \gamma \varphi g_2(\varphi)] \\ \omega_2(\varphi) &= \exp[-\beta(\varphi - \varphi_1)] [\sin \gamma \varphi g_1(\varphi) - \cos \gamma \varphi g_2(\varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

文[1]中已给出了圆环壳在集中力和均布力作用下的全部内力和位移:

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \text{Im}V - \frac{2a^2}{\mu \rho^2} q \frac{\alpha(2+\alpha \sin \varphi)}{1+\alpha \sin \varphi} + Q_0 \frac{\alpha + \sin \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)^2} \\ N_\theta &= \frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \text{Im}V - \frac{1}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)} \frac{d \text{Im}V}{d\varphi} - \frac{2\alpha a^2}{\mu \rho^2} q - Q_0 \frac{\alpha + \sin \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)^2} \\ M_\varphi &= 4\mu^2 h(1+\alpha \sin \varphi) \left[\frac{d \text{Re}V}{d\varphi} - \frac{(1-\nu)\alpha \cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)} \text{Re}V \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_\theta &= \frac{\alpha a}{4\mu^2 h(1+\alpha \sin \varphi)} \left[\nu \frac{d \operatorname{Re} V}{d \varphi} + \frac{(1-\nu) \alpha \cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)} \operatorname{Re} V \right] \\
 Q &= \frac{\alpha \sin \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \operatorname{Im} V + Q_0 \frac{\cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)^2}, \quad \chi = -\frac{a}{2\mu \rho} \frac{\operatorname{Re} V}{(1+\alpha \sin \varphi)} \\
 Y &= \frac{a^2}{\mu \rho^2} (1+\alpha \sin \varphi) (N_\theta - \nu N_\varphi), \quad Z = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a^2 \cos \varphi}{\mu \rho^2 (1+\alpha \sin \varphi)} \operatorname{Re} V d \varphi
 \end{aligned} \right\} (3.9)$$

选用 $Y, \chi, N_\varphi, M_\varphi$ 四个变量为传递参数

$$\text{令 } \mathbf{X} = \{Y, \chi, N_\varphi, M_\varphi\}^T \text{ 为传递参数列阵} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{C} = \{C'_0, \bar{C}'_0, B'_0, \bar{B}'_0\}^T \text{ 为常数列阵} \quad (3.11)$$

可有如下形式:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\varphi) \mathbf{C} + \mathbf{F}(\varphi) \quad (3.12)$$

其中 $\mathbf{A}(\varphi) = [a_{ij}(\varphi)]$ 为 4×4 的方阵

$\mathbf{F}(\varphi) = \{F_1(\varphi), F_2(\varphi), F_3(\varphi), F_4(\varphi)\}^T$ 为函数列阵

$$a_{11}(\varphi) = \frac{a^2}{2\mu^2 \rho^2} \left[\frac{\alpha(1+\nu) \cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)} \Omega_2(\varphi) - \frac{d\Omega_2(\varphi)}{d\varphi} \right]$$

$$a_{12}(\varphi) = \frac{a^2}{2\mu^2 \rho^2} \left[\frac{\alpha(1+\nu) \cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)} \Omega_1(\varphi) - \frac{d\Omega_1(\varphi)}{d\varphi} \right]$$

$$a_{13}(\varphi) = \frac{a^2}{2\mu^2 \rho^2} \left[-\frac{\alpha(1+\nu) \cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)} \omega_2(\varphi) + \frac{d\omega_2(\varphi)}{d\varphi} \right]$$

$$a_{14}(\varphi) = \frac{a^2}{2\mu^2 \rho^2} \left[\frac{\alpha(1+\nu) \cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)} \omega_1(\varphi) - \frac{d\omega_1(\varphi)}{d\varphi} \right]$$

$$a_{21}(\varphi) = -\frac{a}{2\mu \rho (1+\alpha \sin \varphi)} \Omega_1(\varphi), \quad a_{22}(\varphi) = \frac{a}{2\mu \rho (1+\alpha \sin \varphi)} \Omega_2(\varphi)$$

$$a_{23}(\varphi) = -\frac{a}{2\mu \rho (1+\alpha \sin \varphi)} \omega_1(\varphi), \quad a_{24}(\varphi) = -\frac{a}{2\mu \rho (1+\alpha \sin \varphi)} \omega_2(\varphi)$$

$$a_{31}(\varphi) = -\frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \Omega_2(\varphi), \quad a_{32}(\varphi) = -\frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \Omega_1(\varphi)$$

$$a_{33}(\varphi) = \frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \omega_2(\varphi), \quad a_{34}(\varphi) = -\frac{\alpha \cos \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \omega_1(\varphi)$$

$$a_{41}(\varphi) = \frac{\alpha a}{4\mu^2 h(1+\alpha \sin \varphi)} \left[\frac{d\Omega_1(\varphi)}{d\varphi} - \frac{(1-\nu) \alpha \cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} \Omega_1(\varphi) \right]$$

$$a_{42}(\varphi) = \frac{\alpha a}{4\mu^2 h(1+\alpha \sin \varphi)} \left[-\frac{d\Omega_2(\varphi)}{d\varphi} + \frac{(1-\nu) \alpha \cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} \Omega_2(\varphi) \right]$$

$$a_{43}(\varphi) = \frac{\alpha a}{4\mu^2 h(1+\alpha \sin \varphi)} \left[\frac{d\omega_1(\varphi)}{d\varphi} - \frac{(1-\nu) \alpha \cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} \omega_1(\varphi) \right]$$

$$\begin{aligned}
a_{44}(\varphi) &= \frac{\alpha a}{4\mu^2 h(1+\alpha \sin \varphi)} \left[\frac{d\omega_2(\varphi)}{d\varphi} - \frac{(1-\nu)\alpha \cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} \omega_2(\varphi) \right] \\
F_1(\varphi) &= \frac{2\alpha a^4}{\mu^2 \rho^4} q \left[\nu(2+\alpha \sin \varphi) - (1+\alpha \sin \varphi) - \frac{\alpha^2(1+\nu)\cos \varphi}{\mu(1+\alpha \sin \varphi)} J(\varphi) + \frac{\alpha}{\mu} \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} \right] \\
&\quad + \frac{a^2}{\mu \rho^2} Q_0 \left[\frac{2}{\alpha} \frac{dK(\varphi)}{d\varphi} - \frac{2(1+\nu)\cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} K(\varphi) - \frac{(1+\nu)(\alpha + \sin \varphi)}{1+\alpha \sin \varphi} \right] \\
F_2(\varphi) &= -\frac{2\alpha^2 a^3}{\mu \rho^3(1+\alpha \sin \varphi)} q K(\varphi) + \frac{2a}{\alpha \rho(1+\alpha \sin \varphi)} Q_0 J(\varphi) \\
F_3(\varphi) &= \frac{2\alpha a^2}{\mu \rho^2(1+\alpha \sin \varphi)} q \left[\frac{\alpha^2}{\mu(1+\alpha \sin \varphi)} J(\varphi) - (2+\alpha \sin \varphi) \right] \\
&\quad + \frac{Q_0}{(1+\alpha \sin \varphi)^2} \left[\alpha + \sin \varphi + 2\cos \varphi K(\varphi) \right] \\
F_4(\varphi) &= \frac{\alpha^3 a^3}{\mu^3 h \rho^2(1+\alpha \sin \varphi)} q \left[\frac{dK(\varphi)}{d\varphi} - \frac{(1-\nu)\alpha \cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} K(\varphi) \right] \\
&\quad + \frac{a}{\mu h(1+\alpha \sin \varphi)} Q_0 \left[-\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} + \frac{(1-\nu)\alpha \cos \varphi}{1+\alpha \sin \varphi} J(\varphi) \right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

当 $\varphi = \varphi_1$ 或 $\varphi = \varphi_2$ 时, 分别有:

$$\mathbf{X}(\varphi_1) = \mathbf{A}(\varphi_1)\mathbf{C} + \mathbf{F}(\varphi_1) \tag{3.14}$$

$$\mathbf{X}(\varphi_2) = \mathbf{A}(\varphi_2)\mathbf{C} + \mathbf{F}(\varphi_2) \tag{3.15}$$

其中 φ_1, φ_2 是每段环壳两条边界处的 φ 值, $\varphi_2 > \varphi_1$.

由式(3.15)得:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}(\varphi_2)\mathbf{X}(\varphi_2) - \mathbf{A}^{-1}(\varphi_2)\mathbf{F}(\varphi_2) \tag{3.16}$$

代入式(3.14), 可得:

$$\mathbf{X}(\varphi_1) = \mathbf{T}\mathbf{X}(\varphi_2) + \mathbf{T}_0 \tag{3.17a}$$

或

$$\mathbf{X}(\varphi_2) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}(\varphi_1) - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}_0 \tag{3.17b}$$

其中, \mathbf{A}^{-1} 为矩阵 \mathbf{A} 的逆矩阵; \mathbf{T}^{-1} 为矩阵 \mathbf{T} 的逆矩阵; $\mathbf{T} = \mathbf{A}(\varphi_1)\mathbf{A}^{-1}(\varphi_2)$,

$\mathbf{T}_0 = \mathbf{F}(\varphi_1) - \mathbf{A}(\varphi_1)\mathbf{A}^{-1}(\varphi_2)\mathbf{F}(\varphi_2)$; $\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}$ 和 \mathbf{T}_0 即为传递矩阵.

当 $\varphi_1, \varphi_2 = \pi/2$ 时, $N_\varphi = F_3(\pi/2)$, 使 $\mathbf{A}(\varphi)$ 成为奇异矩阵, 故使用传递参数 Q 代替 N_φ , 此时有:

$$\left. \begin{aligned}
a_{31}(\varphi) &= \frac{\alpha \sin \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \Omega_2(\varphi), \quad a_{32}(\varphi) = \frac{\alpha \sin \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \Omega_1(\varphi) \\
a_{33}(\varphi) &= -\frac{\alpha \sin \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \omega_2(\varphi), \quad a_{34}(\varphi) = \frac{\alpha \sin \varphi}{2\mu(1+\alpha \sin \varphi)^2} \omega_1(\varphi) \\
F_3(\varphi) &= -\frac{2\alpha^3 a^2 \sin \varphi}{\mu^2 \rho^2(1+\alpha \sin \varphi)^2} J(\varphi) q + Q_0 \left[\frac{\cos \varphi}{(1+\alpha \sin \varphi)^2} - \frac{\sin \varphi K(\varphi)}{(1+\alpha \sin \varphi)^2} \right]
\end{aligned} \right\} \tag{3.18}$$

以上各矩阵元素的表达式在用于凹半波时, $q = -q$.

四、平中心部分的解

1. 不带硬中心时的摄动解

引入下列无量纲量, 各量的无量纲规定同波纹部分是一致的。

$$\left. \begin{aligned} \text{设 } \xi &= 1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2, \quad Y = \sqrt{3(1-\nu^2)}w/h, \quad s = \frac{\rho^2}{4D} N_r, \quad t = \frac{\rho^2}{4D} N_\theta \\ m_r &= \frac{\rho^2}{4Dh} M_r, \quad m_\theta = \frac{\rho^2}{4Dh} M_\theta, \quad p = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{16} \frac{\rho^4 q}{Dh} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中, w 为平中心部分相对于平中心边缘的相对挠度。

方程(2.1)成为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1-\xi) \frac{dY}{d\xi} \right] &= s \frac{dY}{d\xi} - p \\ \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)s] + \frac{1}{2} \left(\frac{dY}{d\xi} \right)^2 &= 0 \\ t &= s - 2(1-\xi) \frac{ds}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

波纹膜片是在大挠度的范围内工作, 其中点挠度与厚度之比往往达到10以上。为使小参数摄动法得以使用, 以无量纲化后的圆板中心相对于圆板边缘的相对挠度:

$$Y_m = \sqrt{3(1-\nu^2)}w_m/h \quad (4.3)$$

为摄动参数, 求方程(4.2)的摄动解, 其中 w_m, Y_m 为有量纲的和无量纲的相对挠度。

$$\left. \begin{aligned} \text{设 } p &= p_1 Y_m + p_2 Y_m^2 + p_3 Y_m^3 + \dots \\ Y &= Y_1 Y_m + Y_2 Y_m^2 + Y_3 Y_m^3 + \dots \\ \frac{dY}{d\xi} &= \theta = \frac{dY_1}{d\xi} Y_m + \frac{dY_2}{d\xi} Y_m^2 + \frac{dY_3}{d\xi} Y_m^3 + \dots \\ &= \theta_1 Y_m + \theta_2 Y_m^2 + \theta_3 Y_m^3 + \dots \\ s &= s_1 Y_m + s_2 Y_m^2 + s_3 Y_m^3 + \dots \\ u &= u_1 Y_m + u_2 Y_m^2 + u_3 Y_m^3 + \dots \\ t &= t_1 Y_m + t_2 Y_m^2 + t_3 Y_m^3 + \dots \\ m_r &= m_{r1} Y_m + m_{r2} Y_m^2 + m_{r3} Y_m^3 + \dots \\ m_\theta &= m_{\theta1} Y_m + m_{\theta2} Y_m^2 + m_{\theta3} Y_m^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

将式(4.4)代入方程(4.2), 并收集 Y_m 同次幂项的系数, 对于 Y_m 的各次幂, 分别有:

$$Y_m: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)\theta_1] = -p_1, \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)s_1] = 0, \quad t_1 = s_1 - 2(1-\xi) \frac{ds_1}{d\xi} \quad (4.5)$$

$$Y_m^2: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)\theta_2] = s_1\theta_2 - p_2, \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)s_2] = -\frac{1}{2}\theta_1^2, \quad t_2 = s_2 - 2(1-\xi) \frac{ds_2}{d\xi} \quad (4.6)$$

$$Y_m^3: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)\theta_3] = s_1\theta_2 + s_2\theta_1 - p_3, \quad \frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)s_3] = -\theta_1\theta_2, \quad t_3 = s_3 - 2(1-\xi) \frac{ds_3}{d\xi} \quad (4.7)$$

方程(4.5)的解即为圆板小挠度方程的线性精确解, 将所求得解代入(4.6), 可求得二级摄动解. 以此类推, 可求得多级摄动解, 同大多数工作一样, 本文只求到三级摄动解.

各级摄动方程中二阶方程的齐次方程是相同的:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} [(1-\xi)f(\xi)] = 0 \quad (4.8)$$

其通解为
$$f(\xi) = \frac{C_1}{1-\xi} + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为待定常数}) \quad (4.9)$$

故第*i*级摄动方程的一般解为:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \frac{C_1^{(i)}}{1-\xi} + C_2^{(i)} + \theta_i^*, & Y_i &= -C_1^{(i)} \ln(1-\xi) + C_2^{(i)} \xi + C_3^{(i)} + Y_i^* \\ s_i &= \frac{C_4^{(i)}}{1-\xi} + C_5^{(i)} + s_i^*, & t_i &= -\frac{C_4^{(i)}}{1-\xi} + C_5^{(i)} + s_i^* - 2(1-\xi) \frac{ds_i^*}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

其中, $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, C_3^{(i)}, C_4^{(i)}, C_5^{(i)}$ 为待定常数, θ_i^*, Y_i^*, s_i^* 为特解.

因为在圆板中心($\xi=1$)各位移和内力都为有限, 有:

$$C_1^{(i)} = C_4^{(i)} = 0 \quad (4.11)$$

又因为 $Y_i(0) = 0, Y_i^*(0) = 0$, 有:

$$C_3^{(i)} = 0 \quad (4.12)$$

令
$$A_i = C_2^{(i)}, B_i = C_5^{(i)} \quad (4.13)$$

可得第*i*级摄动解:

$$\theta_i = A_i + \theta_i^*, Y_i = A_i \xi + Y_i^*, s_i = B_i + s_i^*, t_i = B_i + s_i^* - 2(1-\xi) \frac{ds_i^*}{d\xi} \quad (4.14)$$

由方程(4.5)求出特解后, 代入方程(4.14), 可得第一级摄动解:

$$\left. \begin{aligned} Y_{m1}: Y_1 &= \left(1 - \frac{p_1}{4}\right) \xi + \frac{p_1}{4} \xi^2, & \frac{dY_1}{d\xi} &= \left(1 - \frac{p_1}{4}\right) + \frac{p_1}{2} \xi \\ s_1 &= B_1, & t_1 &= B_1 \\ m_{r1} &= -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1-\xi) \frac{p_1}{2} - \frac{1+\nu}{2} \left(1 - \frac{p_1}{4} + \frac{p_1}{2} \xi\right) \right] \\ m_{\theta 1} &= -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[\nu(1-\xi) \frac{p_1}{2} - \frac{1+\nu}{2} \left(1 - \frac{p_1}{4} + \frac{p_1}{2} \xi\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

将(4.15)代入(4.6), 求出特解, 再代入方程(4.14), 可得第二级摄动解:

$$\left. \begin{aligned} Y_{m2}: Y_2 &= \left(-\frac{p_2}{4} - \frac{D_{21}}{3} - \frac{D_{22}}{2}\right) \xi + \frac{D_{21}}{3} \xi^3 + \frac{D_{22}}{2} \xi^2 + \frac{p_2 \xi^2}{4} \\ \frac{dY_2}{d\xi} &= -\frac{p_2}{4} - \frac{D_{21}}{3} - \frac{D_{22}}{2} + D_{21} \xi^2 + D_{22} \xi + \frac{p_2 \xi}{2} \\ s_2 &= B_2 + C_{21} \xi^3 + C_{22} \xi^2 + C_{23} \xi \\ t_2 &= s_2 - 2(1-\xi)(2C_{21} \xi^2 + 2C_{22} \xi + C_{23}) \\ m_{r2} &= -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1-\xi) \left(2D_{21} \xi + D_{22} + \frac{p_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1+\nu}{2} \left(-\frac{p_2}{4} - \frac{D_{21}}{3} - \frac{D_{22}}{2} + D_{21} \xi^2 + D_{22} \xi + \frac{p_2}{2} \xi \right) \\ m_{\theta_2} = & -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[\nu(1-\xi) \left(2D_{21} \xi + D_{22} + \frac{p_2}{2} \right) - \frac{1+\nu}{2} \left(-\frac{p_2}{4} - \frac{D_{21}}{3} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_{22}}{2} + D_{21} \xi^2 + D_{22} \xi + \frac{p_2}{2} \xi \right) \right] \end{aligned} \right\} (4.16)$$

$$\text{其中 } D_{21} = -\frac{p_1 B_1}{12}, \quad D_{22} = D_{21} - \frac{p_1}{2} + \frac{B_1 p_1}{8}$$

$$C_{21} = \frac{p_1^2}{96}, \quad C_{22} = C_{21} + \frac{p_1}{12} - \frac{p_1^2}{48}, \quad C_{23} = C_{22} + \frac{1}{4} - \frac{p_1}{8} + \frac{p_1^2}{64}$$

将(4.16)代入(4.7), 求出特解, 再代入方程(4.14), 可得三级摄动解:

$$\left. \begin{aligned} Y_3: \quad Y_3 = & \left(-\frac{p_3}{4} - \frac{D_{31}}{6} - \frac{D_{32}}{5} - \frac{D_{33}}{4} - \frac{D_{34}}{3} - \frac{D_{35}}{2} \right) \xi + \frac{D_{31}}{6} \xi^2 + \frac{D_{32}}{5} \xi^3 \\ & + \frac{D_{33}}{4} \xi^4 + \frac{D_{34}}{3} \xi^5 + \frac{D_{35}}{2} \xi^6 + \frac{p_3 \xi^2}{4} \\ \frac{dY_3}{d\xi} = & -\frac{p_3}{4} - \frac{D_{31}}{6} - \frac{D_{32}}{5} - \frac{D_{33}}{4} - \frac{D_{34}}{3} - \frac{D_{35}}{2} + D_{31} \xi + D_{32} \xi^2 \\ & + D_{33} \xi^3 + D_{34} \xi^4 + D_{35} \xi^5 + \frac{p_3 \xi}{2} \\ s_3 = & B_3 + C_{31} \xi^4 + C_{32} \xi^3 + C_{33} \xi^2 + C_{34} \xi \\ t_3 = & s_3 - 2(1-\xi) (4C_{31} \xi^3 + 3C_{32} \xi^2 + 2C_{33} \xi + C_{34}) \\ m_{r_3} = & -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[(1-\xi) \frac{d^2 Y_3}{d\xi^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{dY_3}{d\xi} \right] \\ m_{\theta_3} = & -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[\nu(1-\xi) \frac{d^2 Y_3}{d\xi^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{dY_3}{d\xi} \right] \end{aligned} \right\} (4.17)$$

$$\text{其中 } D_{31} = -\frac{p_1 C_{21}}{60}, \quad D_{32} = D_{31} - \frac{1}{20} \left[\left(1 - \frac{p_1}{4} \right) C_{21} + \frac{p_1 C_{22}}{2} \right]$$

$$D_{33} = D_{32} - \frac{1}{12} \left[B_1 D_{21} + C_{22} \left(1 - \frac{p_1}{4} \right) + \frac{p_1 C_{23}}{2} \right]$$

$$D_{34} = D_{33} - \frac{1}{6} \left[B_1 D_{22} + \frac{B_1 p_2}{2} + \frac{B_2 p_1}{2} + C_{23} \left(1 - \frac{p_1}{4} \right) \right]$$

$$D_{35} = D_{34} + \frac{B_1 p_2}{8} + \frac{B_1 D_{21}}{6} + \frac{B_1 D_{22}}{4} - \frac{B_2}{2} + \frac{p_1 B_2}{8}$$

$$C_{31} = \frac{p_2 D_{21}}{40}, \quad C_{32} = C_{31} + \frac{1}{12} \left[\left(1 - \frac{p_1}{4} \right) D_{21} + \frac{p_2}{2} \left(D_{22} + \frac{p_2}{2} \right) \right]$$

$$C_{33} = C_{32} - \frac{1}{6} \left[\frac{p_2}{2} \left(\frac{p_2}{4} + \frac{D_{31}}{3} + \frac{D_{22}}{2} \right) - \left(1 - \frac{p_2}{4} \right) \left(D_{22} + \frac{p_2}{2} \right) \right]$$

$$C_{34} = C_{33} - \frac{1}{2} \left(\frac{p_2}{4} + \frac{D_{21}}{3} + \frac{D_{22}}{2} \right) \left(1 - \frac{p_1}{4} \right)$$

各常数 B_i , ρ_i 将由矩阵联乘法求得.

2. 带硬心时的线性解

其解由弯曲问题解和拉伸问题的解两部分组成:

a. 环板弯曲问题的位移和内力如下:

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{4P}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 - \rho_0^2 \ln \rho_0 \ln r \right) - \frac{2P}{\rho^2} \left(\frac{1}{2} r^2 - \rho_0^2 \ln r \right) \\
 &\quad - 2 \ln \rho + 2 + \frac{4P}{\rho^2} \rho_0 \ln \rho_0 \ln \rho - \frac{2P}{\rho^2} \rho_0^2 \ln \rho \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \rho - \rho_0^2 \ln r + \rho_0^2 \ln \rho \right) C_1 \\
 m_\theta &= -4P(1+\nu) \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} \ln r - 4(\nu-1) \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} \frac{P\rho_0^2}{r^2} \ln \rho_0 \\
 &\quad - (\nu-1) \left(1 - \frac{\rho_0^2}{r^2} \right) P - \frac{3(1-\nu^2)\rho^2}{2h} \left[1 + \nu + (\nu-1) \frac{\rho_0^2}{r^2} \right] C_1 \\
 m_r &= -4P(1+\nu) \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} \ln r - 4P(1-\nu) \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} \frac{\rho_0^2}{r^2} \ln \rho_0 \\
 &\quad - 2(1-\nu) \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{r^2} \right) P + \frac{3(1-\nu^2)\rho^2}{2h} \left[1 + \nu + (1-\nu) \frac{\rho_0^2}{r^2} \right] C_1 \\
 Q &= -\frac{2h^3 P}{3(1-\nu^2)\rho^2} \cdot \frac{1}{r}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

b. 拉伸问题按平面应力计算, 其位移和内力如下:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= (1-\nu) \left(r - \frac{\rho_0^2}{r} \right) \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2h} C_3 \\
 s &= \frac{3(1-\nu^2)\rho^2}{h^2} \left(1 + \frac{(1-\nu)\rho_0^2}{(1+\nu)r^2} \right) C_3 \\
 t &= \frac{3(1-\nu^2)\rho^2}{h^2} \left(1 - \frac{(1-\nu)\rho_0^2}{(1+\nu)r^2} \right) C_3
 \end{aligned} \right\} \tag{4.19}$$

其中, P 为中心集中力.

五、连接矩阵及边界条件

1. 连接矩阵

由图5可知在(a)和(b)所示两种情况之下, 两半波之间皆有如下关系:

$$Y^{(2)} = Y^{(1)}, \quad \chi^{(2)} = \chi^{(1)}, \quad N_{\phi}^{(2)} = N_{\phi}^{(1)}, \quad M_{\phi}^{(2)} = -M_{\phi}^{(1)} \tag{5.1}$$

可写成如下形式:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{L} \mathbf{X}^{(1)} \tag{5.2}$$

其中

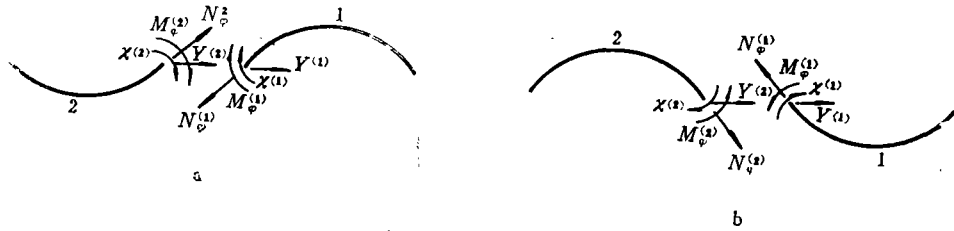


图 5

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

为连接矩阵

对于图 1 所示的膜片，在中心板与环壳之间有如下关系：

$$u_{\text{板}} = Y_{\text{壳}}, \quad \frac{dY}{d\xi_{\text{板}}} = -\chi_{\text{壳}}, \quad s_{\text{板}} \cos \varphi - \frac{2a^2}{\mu\rho^2} p(1 + a \sin \varphi) \sin \varphi = N_{\varphi \text{壳}}, \quad m_{r \text{板}} = m_{\varphi \text{壳}} \quad (5.4)$$

可写成如下形式：

$$X_{\text{板}} = L_r X_{\text{壳}} \quad (5.5)$$

$$\text{其中 } X_{\text{板}} = \begin{Bmatrix} u \\ \frac{dY}{d\xi} \\ s \cos \varphi - \frac{2a^2}{\mu\rho^2} p(1 + a \sin \varphi) \sin \varphi \\ m_r \end{Bmatrix}, \quad L_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6a, b)$$

2. 边界条件

a. 膜片以单片方式使用或利用固定环组装成膜盒时，边界条件可视为固定支承

$$\text{即 } X = \{Y, \chi, N_\varphi, M_\varphi\}^T = \{0, 0, c_1^*, c_2^*\}^T \quad (5.7)$$

b. 膜片在组装成膜盒时不使用固定环，边界条件可视为滑动支承

$$\text{即 } X = \{Y, \chi, N_\varphi, M_\varphi\}^T = \{c_1^*, 0, 0, c_2^*\}^T + \{0, 0, N_{\varphi 0}, 0\}^T \quad (5.8)$$

$$\text{其中 对于均布载荷 } N_{\varphi 0} = -\frac{2a^2 p}{\mu\rho^2} \sin \varphi (1 + a \sin \varphi) \quad (5.9)$$

$$\text{对于集中载荷 } N_{\varphi 0} = -\frac{4a^2 ah}{\mu^2 \rho^2} P \quad (5.10)$$

式(5.7)和(5.8)可写成统一的形式：

$$X = C^* + C^0 \quad (5.11)$$

六、矩阵联乘法

传递矩阵和连接矩阵都导出后，即可由矩阵联乘法得出最后结果。

用矩阵联乘法求解 n 个半波的圆弧形波纹膜片（图6）的具体步骤如下：

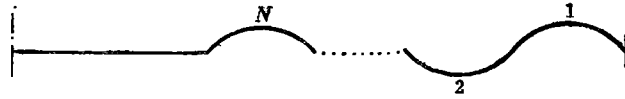


图 6

$T^{(i)}$ 和 $T_0^{(i)}$ 是第*i*个半波的传递矩阵

$L^{(ij)}$ 是第*i*半波和第*j*半波之间的连接矩阵

L_p 是中心圆板与第*n*半波环壳之间的连接矩阵

$X^{(i)}(\varphi)$ 是第*i*半波的传递参数列阵

这样便有:

$$\text{第一半波: } X^{(1)}(\varphi_1) = T^{(1)}X^{(1)}(\varphi_2) + T_0^{(1)}$$

$$\text{第二半波: } X^{(2)}(\varphi_2) = L^{(21)}X^{(1)}(\varphi_1), \quad X^{(2)}(\varphi_1) = T^{(2)}X^{(2)}(\varphi_2) - T_0^{(2)}$$

$$\text{第三半波: } X^{(3)}(\varphi_2) = L^{(32)}X^{(2)}(\varphi_1)$$

.....

$$\text{第 } n \text{ 半波: } X^{(n)}(\varphi_1) = T^{(n)}X^{(n)}(\varphi_2) + (-1)^{n-1}T_0^{(n)}$$

$$\text{中心圆板: } X_{\text{板}} = L_p X^{(n)}(\varphi_1)$$

通过以上传递, 最后可得:

$$X_{\text{板}} = L_p \cdot T^{(n)} \dots L^{(21)} \cdot T^{(1)} X^{(1)}(\varphi_2) + L_p T^{(n)} \dots L^{(32)} T^{(2)} T_0^{(1)} + \dots + (-1)^{n-1} L_p T_0^{(n)} \quad (6.1)$$

$$\text{简记为: } X_{\text{板}} = T X^{(1)}(\varphi_2) + T_0 \quad (6.2)$$

$$\text{其中: } T = L_p T^{(n)} \dots L^{(21)} T^{(1)} \quad (6.3)$$

$$T_0 = L_p T^{(n)} \dots L^{(32)} T^{(2)} T_0^{(1)} + \dots + (-1)^{n-1} L_p T_0^{(n)} \quad (6.4)$$

式(6.2)实际上为四个线性方程, 用其可求解四个待定常数。求出待定常数后, 便可逐一求得板中和各段环壳的位移和内力。

由于平中心部分已把无量纲的载荷 p 展开为参数 Y_m 的幂级数, 因此波纹部分的无量纲载荷同样也应展开为 Y_m 的幂级数:

$$p = p_1 Y_m + p_2 Y_m^2 + p_3 Y_m^3 + \dots \quad (6.5)$$

故以上求得的仅为相应于各级振动的载荷系数 p_i 作用下环壳的线性内力和变形。为了求得实际的内力和位移, 波纹部分各物理量也展开为 Y_m 的幂级数:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 Y_m + X_2 Y_m^2 + X_3 Y_m^3 + \dots \\ Z &= Z_1 Y_m + Z_2 Y_m^2 + Z_3 Y_m^3 + \dots \\ Y &= Y_1 Y_m + Y_2 Y_m^2 + Y_3 Y_m^3 + \dots \\ N_\varphi &= N_{\varphi 1} Y_m + N_{\varphi 2} Y_m^2 + N_{\varphi 3} Y_m^3 + \dots \\ N_\theta &= N_{\theta 1} Y_m + N_{\theta 2} Y_m^2 + N_{\theta 3} Y_m^3 + \dots \\ M_\varphi &= M_{\varphi 1} Y_m + M_{\varphi 2} Y_m^2 + M_{\varphi 3} Y_m^3 + \dots \\ M_\theta &= M_{\theta 1} Y_m + M_{\theta 2} Y_m^2 + M_{\theta 3} Y_m^3 + \dots \\ Q &= Q_1 Y_m + Q_2 Y_m^2 + Q_3 Y_m^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

其中, $X_i, Z_i, Y_i, N_{\varphi i}, N_{\theta i}, M_{\varphi i}, M_{\theta i}, Q_i$ 为在载荷系数 p_i 作用下得到的位移和内力系数。

在计算总挠度时, 由于各环壳及环板的挠度都是相对的, 因此, 总挠度应是各环壳及环板挠度之和:

$$w = Y_m + Z^{(1)} + Z^{(2)} + \dots + Z^{(n)} \quad (6.7)$$

七、计算例题

对于图7所示的波纹膜片, 实验表明其压力一位移特征曲线在挠度为直径 D 的2%的范围内基本上是线性的, 在这个范围内, 对于 $0.6 < 1000h/D < 6.0$ 的膜片, Wildhack等人^[3]给出了一个由实验拟合的公式:

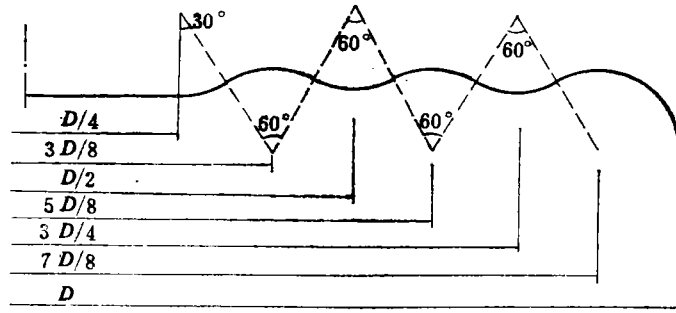


图 7

$$\frac{w^*E}{qD} = (1-\nu^2) \times 2.25 \times 10^5 \times (1000h/D)^{-1.52} \quad (7.1)$$

中心集中力作用时, 樊大钧等人^[5]给出了一个由计算拟合的公式:

$$\frac{w^*ED}{P} = C(3000h/D)^B \quad (7.2)$$

其中, D 为膜的直径, h 为膜的厚度; w^* 为膜片中心挠度; P, q 为集中力及均布载荷; E, ν 为弹性模量和泊松比; C, B 为常数, 见文[5]表2.

均布载荷下, 膜片无硬中心时, 本文摄动解的计算结果为:

$$p = p_1 Y_m + p_2 Y_m^2 + p_3 Y_m^3 + \dots, \quad \bar{w} = Y_m + \sum_{i=1}^6 (Z_{i1} Y_m + Z_{i2} Y_m^2 + Z_{i3} Y_m^3) \quad (7.3)$$

其中, $p = \frac{3}{4} (1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\rho^4 q}{Eh^4}$, $Y_m = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{w_m}{h}$

为本文采用的无量纲量; $\bar{w} = \sqrt{3(1-\nu^2)} w^*/h$ 为无量纲的中心挠度; p_1, p_2, p_3 对于不同的膜片为不同的常数; Z_{ij} 为第 i 半波的第 j 级摄动解的轴向位移系数.

将一具体膜片的计算结果绘于图8. 同实验曲线比较可以得知, 当挠度小于 $0.02D$ 时, 本文的线性解和考虑平中心非线性的摄动解, 都非常接近拟合的线性公式(7.1)及实验曲线. 挠度继续增大后, 实验曲线开始向下弯曲, 明显偏离线性. 本文的摄动解较之线性解, 在反映非线性效应上有所改进. 但由于仅考虑了平中心部分的非线性, 摄动解曲线向下弯的程度还不足以完全反映真实情况. 挠度继续增大时, 必须考虑波纹部分的非线性, 尤其是边缘大波纹对特征曲线的影响.

对于有硬心的膜片, 在集中力作用下, 本文的线性解结果同公式(7.2)也十分接近:

对于 $3000h/D = 6.25$ ($D = 48\text{mm}$, $h = 0.1\text{mm}$)的具体膜片, 公式(7.2)计算结果为:

$$\frac{EDw^*}{P} = 197238.24$$

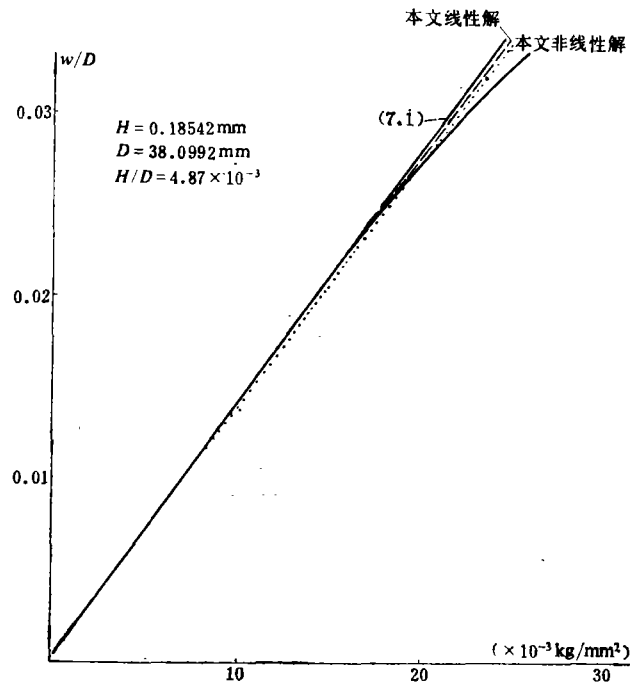


图 8 弹性特征曲线

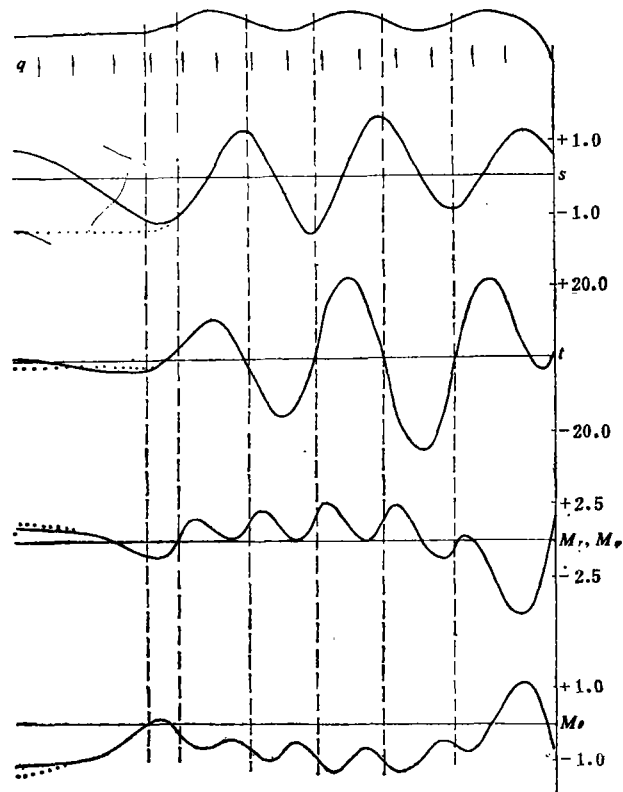


图 9

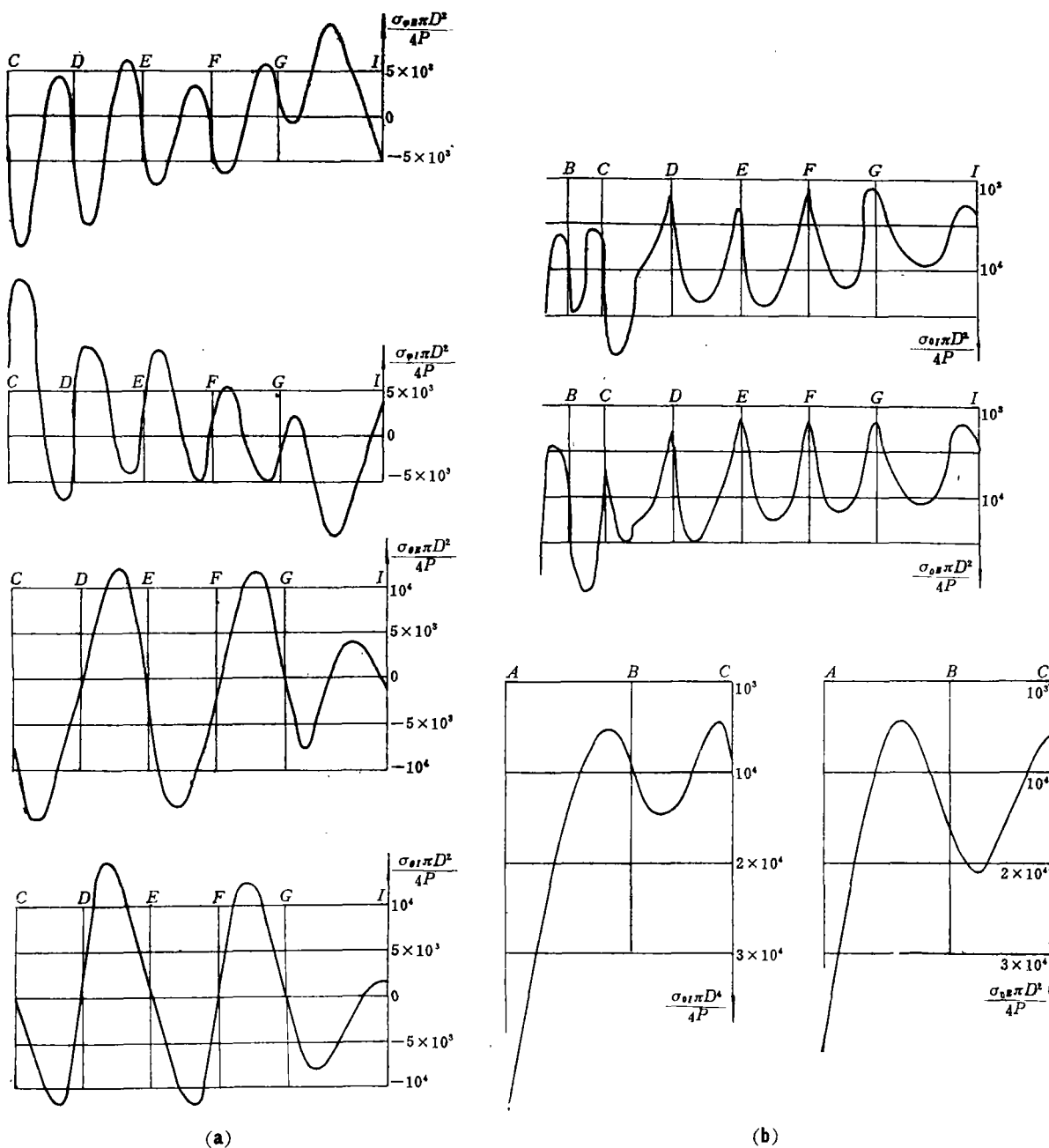


图 10

本文计算结果为:

$$\frac{EDw^*}{P} = 198672.96$$

其相对误差为:

$$\delta = 0.72\%$$

均布载荷作用下和集中载荷作用下膜片的内力分布图见于图 10 和图 9。在图 9 中, 用虚线表示用初参数法^[6]得出的线性解, 可看出, 摄动解反映了平中心部分内力承担载荷的作用, 对这部分内力分布的描述有所改进。波纹部分的内力实际上都是线性解, 二种方法

得出的结果完全一致。集中载荷作用下的内力分布同初参数法的结果也是完全一致的。

八、结 语

本文讨论了中心圆板的大挠度引起的波纹膜片特征曲线的非线性。在圆弧波纹部分应用了钱伟长教授给出的精确解，并采用中心圆板部分的最大相对挠度为摄动参数，用摄动法和矩阵联乘法联合求解获得了较为满意的结果。若用传统的方法求解，则所有待定数都是最后由解线性代数方程组一次给出。对于本文所求解的有 n 个半波的膜片来说，就必须求解一组含 $4(n+2)$ 个待定常数的线性方程组（对于摄动解是 $12(n+2)$ 个常数），而矩阵联乘法，则可将求解一个高阶线性代数方程组的问题转化为四阶矩阵的运算问题。所以，这种联合解法使得问题的推导和运算更为简捷。矩阵连乘法中各个传递矩阵是互相独立的，故可分别导出各种形状不同波纹的传递矩阵，从而可方便地计算各种不同形状的波纹所组成的膜片。这也是利用壳体理论计算形状复杂的波纹膜片和波纹管的一种新的途径。用这种方法，可把不同部分不同性质的解联系起来，获得统一的解答。

感谢 本文的问题和解法都是钱伟长教授提出的，并在钱伟长教授指导下完成。在工作中，还与黄黔同志进行了有益的讨论，也得到上海工业大学的大力支持，在此表示感谢！

参 考 文 献

- [1] 钱伟长、郑思梁，轴对称圆环壳的一般解，应用数学和力学，1,3 (1980)，287—300。
- [2] 钱伟长，Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure，中国物理学报，7, 2 (1947)，102—113。
- [3] Wildhack, W. A., R. F. Dressler and E. C. Lloyd, Investigation of the properties of corrugated diaphragms, *Trans. ASME*, 79, 1 (1957), 65—82。
- [4] Андреев Л. Е., Расчет гофрированных мембран, как анизотропных пластинок, *Инженерный Сборник*, X X I (1955), 128—141。
- [5] 樊大钧、黄黔，圆弧波纹膜片的理论分析和工程设计方法，《第二届仪器仪表学术年会论文集》，北京 (1982)。
- [6] 钱伟长、樊大钧、黄黔，环壳理论与直交异性板理论在计算三圆弧波纹膜片上的比较，应用数学和力学，5, 1 (1984)，41—48。

The Method of Matrices Conjoint Multiplication for the Problem of Circular Arc Corrugated Diaphragm

Zhou Zhe-wei Wang Shu

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

The circular arc corrugated diaphragms are taken in this paper as composite structures of several sections of the ring shells and a central circular plate. Transfer matrices and link matrices are derived by using Prof. Chien Wei-zang's general solutions of the ring shells⁽¹⁾ and perturbation theory of the circular thin plates⁽²⁾. Through the method of matrices conjoint multiplication, the linear exact solution and nonlinear solution are obtained. The results agree with that of the experiments presented by W. A. Wildhack⁽³⁾.