

Novozhilov 环壳方程的新解

董明德

(中国科学院理论物理研究所, 1983年8月4日收到)

摘要

当环壳的细度比 $\alpha (=a/R)$ 取一般值时 $0 < \alpha < 1$ 求得 Novozhilov 方程的新解, 与连分法的结果相比, 这里级数解的指标和展开系数全是封闭的显式. 直接验证, 此级数解满足方程. 给出收敛性证明. 边缘效应的范围和单值群的指标也都用显式表述. 最后讨论本法适用于求解旋成薄壳的基本方程组.

一、基本解的解析构造

按照 Kirchhoff-Love 的理论框架, Novozhilov 首先提出环壳的基本方程⁽¹⁾. 由于方程具有周期函数系数, Novozhilov 作了进一步简化, 仅仅求得近似解, 用虚宗量的 Hankel 函数来表示.

近来, 这一问题引起了更多注意. 钱伟长教授和他的合作者在一系列的论文中作了广泛的研究, 其中采用了连分法, 并将分析应用于波纹管.

上述种种成就是本文探讨的直接动力. 本文试图用积分变换法严格求解环壳的基本方程, 此时 Cauchy 留数定理自动给出所求解的解析结构. 试与连分法所得的结果相比较, 本文的级数解中指标和展开系数, 都是封闭的显式, 且由显式解可以验证它满足基本方程, 并证明级数的收敛性.

首先重述 Novozhilov 方程的基本要点:

$$\mathcal{L}V(\varphi) \equiv (1 + a\sin\varphi) \frac{d^2V}{d\varphi^2} - a\cos\varphi \frac{dV}{d\varphi} + (2\mu i \sin\varphi)V(\varphi) = f(\varphi) \quad (1.1)$$

其中复函数 $V(\varphi)$ 是轴向角位移 χ 和剪力 Q 的组合

$$V(\varphi) = -\frac{4\mu^2 D}{a\mu^2} (1 + a\sin\varphi)\chi + i \left\{ \frac{2\mu(1 + a\sin\varphi)}{a\sin\varphi} Q - \frac{2\mu}{a} Q_0 \cot\varphi \right\}$$

非齐次项

$$f(\varphi) = 2\mu \left(\frac{2\mu}{a} Q - \frac{i}{2} a a q \right) \cos\varphi$$

又, 细度比 $\alpha = a/R$, Poisson 比为 ν , $\mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} a^2/Rh$, 壳厚度 h , 法向载荷 q , 径向位移 V , 轴向位移 Z , 角位移 χ (见图1).

壳的内力由 $V = V_R + iV_I$ 中虚、实部给出

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{\alpha}{2\mu} \frac{\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} V_I + \frac{1}{2} \frac{2+\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\sin\varphi} qa + \frac{\alpha+\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} Q_0 \\ N_\theta &= \frac{-1}{2\mu} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{1+\alpha\sin\varphi} V_I \right) - \frac{\alpha+\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} Q_0 + \frac{1}{2} qa \\ M_\varphi &= \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{1+\alpha\sin\varphi} V_R \right) + \frac{\nu\alpha\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} V_R \right\} \\ M_\theta &= \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\nu}{1+\alpha\sin\varphi} V_R \right) + \frac{\alpha\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} V_R \right\} \\ Q &= \frac{\alpha}{2\mu} \frac{\sin\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} V_I + \frac{\cos\varphi}{(1+\alpha\sin\varphi)^2} Q_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

与此类似，位移的表式为

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{1}{Eh\alpha(1+\sin\varphi)} V_R \\ Y &= \frac{R}{Eh} (1+\alpha\sin\varphi) (N_\theta - \nu N_\varphi) \\ Z &= Z_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{Eh} \frac{\cos\varphi}{1+\alpha\sin\varphi} V_R d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

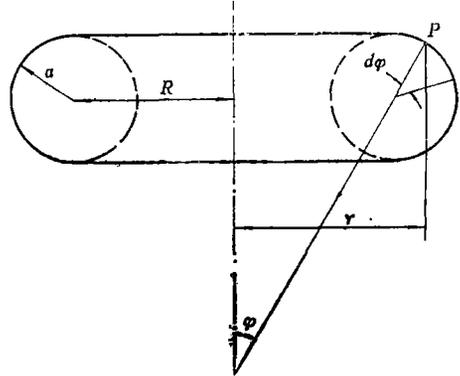


图 1

现求齐次方程的基本解。由此可构成Green函数，从而不难导出特解。

如所周知，解的构造完全取决于方程的类型，即属于 Fuchs 型或非 Fuchs 型，分别具有正则奇点或非正则奇点。因此，首要的问题是确认环壳方程是属于哪一类型，是 Fuchs 型还是非 Fuchs 型。诚然，具有周期系数的方程，如 Mathieu 方程和 Hill 方程是非 Fuchs 型方程的最著称的实例。但是，Novozhilov 方程在一般情况 ($0 < \alpha < 1$) 却属于 Fuchs 型，参见 (2.1) 式已化为 Fuchs 型方程的标准形式。实际上，对于小宗量 φ ，它的正则积分见 (2.4)。

但是，对于细环壳 $\alpha \rightarrow 0$ ，基本方程化为 Mathieu 方程，它具有非正则积分：

$$\mathcal{L}_0 V \equiv \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \mu \sin\varphi V = 0 \quad (1.4)$$

根据微分方程解析理论，有下列结论^[4]

1° Fuchs 型方程有正则积分

$$V_\sigma(\varphi) = \sum a_{\sigma, n} \exp[i(\beta_\sigma + n)\varphi] \quad (\sigma=1,2) \quad (1.5)$$

例如，在一般细度比时环壳的基本方程，即(1.1)或(2.1)

对于正则积分：

指标 β_σ 是代数数， $L(\beta) = 0$ 的零点，

展开系数 $a_{\sigma, n}$ 是方程参数的有理函数，

无穷级数是 Taylor 型 ($\sum_n, n=0, 1, 2, \dots$)。

2° 非 Fuchs 型方程有非正则积分

$$V_\sigma(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\sigma, n} \exp [i(\nu_\sigma + n)\varphi] \quad (1.6)$$

如细环壳即其一例(1.4)。

对于非正则积分:

指标 ν_σ 是超越数, 即方程中所有参数的常项级数。

展开系数 $c_{\sigma, n}$ 是方程参数的超越函数, 由无穷行列式决定, 其特例是连分法。

级数是两端无穷, 属Laurent型 ($\sum_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)。

现略述求得正则积分和非正则积分的方法。

在目前常见的讨论中, 作为常规, 采用经典方法假设形式解来处理 Fuchs 和非 Fuchs 型方程。对于 Fuchs 型方程, 此法给出所求的 β_σ 和 $a_{\sigma, n}$, 例如 Bessel 函数、Legendre 函数等等。但是, 对于非 Fuchs 型方程, 形式解法只导致无穷行列式, 或者在最简单情况下, 导致连分式计算。因此, 指标 ν_σ 和展开系数 $c_{\sigma, n}$ 只能写成非明显的、非封闭的表式, 也就是说, 两者只能利用数值计算来分析。

与此相反, 作者提出的方法是以积分变换为基础, 留数计算自然而然给出解的解析结构, 不仅对于正则积分, 而且对于非正则积分都是自动定出的。特别是非正则积分, 指标和展开系数都由参数级数的显式来表示。

二、新解法

利用简单替代

$$\xi = i\varphi \quad \left(\varphi = \frac{\xi}{i} \right)$$

当 $f(\varphi) = 0$ 时 Novozhilov 基本方程有以下形式

$$\mathcal{L}V = 0$$

$$\mathcal{L} = \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi} - \frac{2\mu i}{a} \right) - \frac{2i}{a} \exp(\xi) \left(\frac{d^2}{d\xi^2} \right) - \exp(2\xi) \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} + \frac{2\mu i}{a} \right)$$

或写成 Fuchs 型方程的标准形式:

$$\mathcal{L}V = \left\{ L \left(\frac{d}{d\xi} \right) - \sum_{r=1,2} \exp(r\xi) M_r \left(\frac{d}{d\xi} \right) \right\} V(\xi) = 0 \quad (2.1)$$

其中算符 L, M_1, M_2 为

$$L \left(\frac{d}{d\xi} \right) = \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi} - \frac{2\mu i}{a} \right) = \left(\frac{d}{d\xi} - \beta_1 \right) \left(\frac{d}{d\xi} - \beta_2 \right)$$

$$M_1 \left(\frac{d}{d\xi} \right) = \frac{2i}{a} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^2$$

$$M_2 \left(\frac{d}{d\xi} \right) = \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} - \frac{2\mu i}{a} \right) = \left(\frac{d}{d\xi} - \gamma_1 \right) \left(\frac{d}{d\xi} - \gamma_2 \right)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{a}} \right)$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{\alpha}} \right) = \beta_{1,2} + 1$$

利用 Green 函数 $G(\xi - \xi')$, 它与算符 L 相对应, 上述方程可以用两个基本解 $\{V_\sigma\} (\sigma = 1, 2)$ 的独立的微分积分方程来等价表述:

$$V_\sigma(\xi) - \int_0^\xi G(\xi - \xi') \sum_{r=1,2} \exp(r\xi') M_r \left(-\frac{d}{d\xi'} \right) V_\sigma(\xi') d\xi' = V_\sigma^0(\xi) \quad (2.2)$$

其中 $V_\sigma^0(\xi) = \exp(\beta_\sigma \xi)$ 是退化方程 $L \left(\frac{d}{d\xi} \right) V^0 = 0$ 的基本解。

由于非齐次项恒不为零, 方程具有非零解. 对于含差项 $G(\xi - \xi')$ 的方程(2.2)积分变换可以求严格解。

设积分的标准回道用 Γ 表示. 由 Laplace 变换的基本定理给出

$$V_\sigma(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left\{ \left[1 - \sum_r \frac{M_r(s-r)}{L(s)} \exp(-r\theta_\sigma) \right]^{-1} \frac{1}{s-\beta_\sigma} \right\} \exp(s\xi) ds \quad (2.3)$$

其中

$$L(s) = (s-\beta_1)(s-\beta_2), \quad M_1(s) = \frac{2i}{\alpha} \cdot s^2$$

$$M_2(s) = (s-\gamma_1)(s-\gamma_2), \quad \exp(\pm r\theta_\sigma) f(s) \equiv f(s \pm r)$$

因此, Cauchy 留数定理自然地给出基本解系的显示表式:

$$V_\sigma(\xi) = D_\sigma(\xi) \exp(\beta_\sigma \xi) \quad (\sigma = 1, 2) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} D_\sigma(\xi) = & 1 + \sum_{r_1} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma + r_1)} \exp(r_1 \xi) + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + \gamma_1)}{L(\beta_\sigma + \gamma_1) L(\beta_\sigma + \gamma_2)} \exp(r_{(2)} \xi) \\ & + \dots + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \dots \sum_{r_\lambda} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1) \dots M_{r_\lambda}(\beta_\sigma + r_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma + r_1) L(\beta_\sigma + r_{(2)}) \dots L(\beta_\sigma + r_{(\lambda)})} \exp(r_{(\lambda)} \xi) + \dots \end{aligned}$$

记号:

$$r(r_1, r_2, \dots) = 1, 2, \quad r_{(\lambda)} = r_1 + r_2 + \dots + r_\lambda$$

由于

$$\beta_1 - \beta_2 = \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{\alpha}} \neq 0, 1, 2, \dots$$

解 V_1, V_2 是线性独立的, Wronski 式 $W\{V_1, V_2\} \neq 0$.

容易验证, 上述级数解代入原方程后, 恒等于零。

$$\text{左端} = L \left(\frac{d}{d\xi} \right) V_\sigma(\xi)$$

$$\begin{aligned} = & \exp(\beta_\sigma \xi) \left\{ L(\beta_\sigma) + \sum_{r_1} M_{r_1}(\beta_\sigma) \exp(r_1 \xi) \right. \\ & + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1)}{L(\beta_\sigma + r_1)} \cdot \exp(r_{(2)} \xi) + \dots \\ & \left. + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \dots \sum_{r_\lambda} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1) \dots M_{r_\lambda}(\beta_\sigma + r_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma + r_1) \dots L(\beta_\sigma + r_{(\lambda-1)})} \cdot \exp(r_{(\lambda)} \xi) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右端} &= \sum_{r_1} \exp(r_1 \xi) M_{r_1} \left(\frac{d}{d\xi} \right) V_\sigma(\xi) \\
&= \exp(\beta_\sigma \xi) \left\{ \sum_{r_1} M_{r_1}(\beta_\sigma) \exp(r_1 \xi) + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1)}{L(\beta_\sigma + r_1)} \exp(r_{(2)} \xi) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \dots \sum_{r_\lambda} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1) \dots M_{r_\lambda}(\beta_\sigma + r_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma + r_1) \dots L(\beta_\sigma + r_{(\lambda-1)})} \exp(r_{(\lambda)} \xi) + \dots \right\} = \text{左端}
\end{aligned}$$

重新整理等幂项, 严格解 (2.4) 可以表成以下形式:

$$V_\sigma(\varphi) = \exp(i\beta_\sigma \varphi) \sum_n v_{\sigma, n} \exp(in\varphi) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

$$\text{其中 } v_{\sigma, 0} = 1, \quad v_{\sigma, 1} = \frac{M_1(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma + 1)}$$

$$v_{\sigma, 2} = \frac{1}{L(\beta_\sigma + 2)} \left\{ M_2(\beta_\sigma) + \frac{M_1(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 1)}{L(\beta_\sigma + 1)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
v_{\sigma, 3} &= \frac{1}{L(\beta_\sigma + 3)} \left\{ \frac{M_1(\beta_\sigma) M_2(\beta_\sigma + 1)}{L(\beta_\sigma + 1)} + \frac{M_2(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 2)}{L(\beta_\sigma + 2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_1(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 1) M_1(\beta_\sigma + 2)}{L(\beta_\sigma + 1) L(\beta_\sigma + 2)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\sigma, 4} &= \frac{1}{L(\beta_\sigma + 4)} \left\{ \frac{M_2(\beta_\sigma) M_2(\beta_\sigma + 2)}{L(\beta_\sigma + 2)} + \frac{M_2(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 2) M_1(\beta_\sigma + 3)}{L(\beta_\sigma + 2) L(\beta_\sigma + 3)} \right. \\
&\quad + \frac{M_1(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma + 1)} \left[\frac{M_2(\beta_\sigma + 1) M_1(\beta_\sigma + 3)}{L(\beta_\sigma + 3)} + \frac{M_1(\beta_\sigma + 1) M_2(\beta_\sigma + 2)}{L(\beta_\sigma + 2)} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{M_1(\beta_\sigma + 1) M_1(\beta_\sigma + 2) M_1(\beta_\sigma + 3)}{L(\beta_\sigma + 2) L(\beta_\sigma + 3)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\sigma, 2m} &= \frac{1}{L(\beta_\sigma + 2m)} \left\{ \overbrace{\frac{M_1(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 1) \dots M_1(\beta_\sigma + 2m - 1)}{L(\beta_\sigma + 1) \dots L(\beta_\sigma + 2m - 1)}}^{(2m)} \right. \\
&\quad + \overbrace{\frac{M_2(\beta_\sigma) M_2(\beta_\sigma + 2) \dots M_2(\beta_\sigma + 2m - 2)}{L(\beta_\sigma + 2) \dots L(\beta_\sigma + 2m - 2)}}^{(m)} \\
&\quad \left. + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \dots \sum_{r_p} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1) \dots M_{r_p}(\beta_\sigma + r_{(p)} - 1)}{L(\beta_\sigma + r_1) \dots L(\beta_\sigma + r_{(p)} - 1)} \right\}
\end{aligned}$$

$$v_{\sigma, 2m+1} = \frac{1}{L(\beta_\sigma + 2m + 1)} \left\{ \overbrace{\frac{M_1(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 1) \dots M_1(\beta_\sigma + 2m)}{L(\beta_\sigma + 1) \dots L(\beta_\sigma + 2m)}}^{(2m+1)} \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_p \\ (r_1 + r_2 + \dots + r_p = 2m+1)}}^{(m+1 < p < 2m)} \frac{M_{r_1}(\beta_\sigma) M_{r_2}(\beta_\sigma + r_1) \dots M_{r_p}(\beta_\sigma + r_{(p)} - 1)}{L(\beta_\sigma + 1) \dots L(\beta_\sigma + r_{(p)} - 1)}$$

另法

综上所述, 不应采用Hill-Floquet形式解^[2]

$$V_\sigma(\xi) = \exp(\lambda_\sigma \xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{\sigma, n} \exp(n\xi)$$

我们从以下假定

$$V_\sigma(\xi) = \exp(\beta_\sigma \xi) \sum_0^{\infty} v_{\sigma, n} \exp(n\xi) \quad (2.6)$$

用它决定 β_σ 和 $v_{\sigma, n}$ 的显示表示。将它代入方程(2.1)中, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_n v_{\sigma, n} L(\beta_\sigma + n) \exp[(\beta_\sigma + n)\xi] \\ &= \sum_n v_{\sigma, n} M_1(\beta_\sigma + n) \exp[(\beta_\sigma + n + 1)\xi] + \sum_n v_{\sigma, n} M_2(\beta_\sigma + n) \exp[(\beta_\sigma + n + 2)\xi] \end{aligned}$$

比较系数法直接导出下列递推关系

$$v_{\sigma, n} = \frac{M_1(\beta_\sigma + n - 1)}{L(\beta_\sigma + n)} v_{\sigma, n-1} + \frac{M_2(\beta_\sigma + n - 2)}{L(\beta_\sigma + n)} v_{\sigma, n-2} \quad (2.7)$$

取 $v_{\sigma, 0} = 1$, 可得与(2.4)式相同的结果

$$\begin{aligned} v_{\sigma, 1} &= \frac{1}{L(\beta_\sigma + 1)} M_1(\beta_\sigma) \\ v_{\sigma, 2} &= \frac{1}{L(\beta_\sigma + 2)} \left\{ M_2(\beta_\sigma) + \frac{M_1(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 1)}{L(\beta_\sigma + 1)} \right\} \\ v_{\sigma, 3} &= \frac{1}{L(\beta_\sigma + 3)} \left\{ \frac{M_1(\beta_\sigma) M_2(\beta_\sigma + 1)}{L(\beta_\sigma + 1)} + \frac{M_2(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 2)}{L(\beta_\sigma + 2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{M_1(\beta_\sigma) M_1(\beta_\sigma + 1) M_1(\beta_\sigma + 2)}{L(\beta_\sigma + 1) L(\beta_\sigma + 2)} \right\} \end{aligned}$$

显然, 递推关系(2.7)不必用连分法求解, 再作数值分析, 而能逐一求出 $v_{\sigma, n}$ 的封闭显式。

注意

1°. 应该指出, 形式解法虽然适用于Fuchs型方程, 但对非Fuchs型方程不能提供显式解。可是应用积分变换法, Cauchy定理的留数计算自然地以统一方式给出Fuchs型和Fuchs型方程的指标和展开系数的显示表示。

2°. 递推关系(2.7)之所以不必用连分法求解(见^[2])是由于所有系数 v_n (略去下标 σ)可逐一写出

$$v_0 = 1, v_1 \sim v_0, v_2 \sim v_1, v_0, v_3 \sim v_2, v_1$$

这和Mathieu方程的三项递推式根本不同, 后者第一式就含有 (v_{-1}, v_0, v_1)

收敛性证明

由上述递推式得

$$r_n = a_n + \frac{b_n}{r_{n-1}} \quad (2.8)$$

其中

$$r_n = \frac{v_{\sigma, n}}{v_{\sigma, n-1}}, \quad a_n = \frac{M_1(\beta_\sigma + n - 1)}{L(\beta_\sigma + n)}, \quad b_n = \frac{M_2(\beta_\sigma + n - 2)}{L(\beta_\sigma + n)}$$

估值法给出

$$\begin{aligned} |r_n| &\leq |a_n| + \frac{|b_n|}{|r_{n-1}|} \\ &\leq |a_n| + \frac{|b_n|}{|a_{n-1}|} + \frac{|b_{n-1}|}{|a_{n-2}|} + \frac{|b_{n-2}|}{|a_{n-3}|} + \dots \end{aligned}$$

当 n 充分大时 ($\sigma=1$, 或 2)

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \left| \frac{M_1(\beta_\sigma + n - 1)}{L(\beta_\sigma + n)} \right| \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \left| 1 + \frac{1}{n} \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{\alpha}} \right) \right|^2 / \left| 1 + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{\alpha}} \right| \\ |b_n| &\leq \left| \frac{M_2(\beta_\sigma + n - 2)}{L(\beta_\sigma + n)} \right| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{\left| 1 + \frac{1}{n-1} \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{\alpha}} \right) \right|}{\left| 1 + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{8\mu i}{\alpha}} \right|} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| \leq \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.9)$$

因此级数在半径为 $\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)$ 的域内绝对收敛, α 是个小参数. 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 即对于细环壳, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| \rightarrow \infty$, 级数解定义一个整函数. 但是细环壳的解应另行讨论; 因为在此极限情况, 奇点由于合流成为非正则的.

三、一般解的显式

为了单独表示 χ 和 Q , 须要写下一般解 ($V = V_R + iV_I$) 分解为实部和虚部的明显表式:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= -\frac{\alpha a^2}{4\mu D} \frac{1}{1 + \alpha \sin \varphi} V_R \\ Q &= \frac{\alpha \sin \varphi}{2\mu(1 + \alpha \sin \varphi)} \left\{ V_I + \frac{2\mu}{\alpha} Q_0 \cot \varphi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

为方便起见, 令

$$1 + \frac{8\mu i}{\alpha} \equiv (2\rho)^2 \exp(2i\delta)$$

其中

$$(2\rho)^2 = \left[1 + \left(\frac{8\mu}{\alpha} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad 2\delta = \arctg \left(\frac{8\mu}{\alpha} \right) \quad (3.2)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{2} + \rho \exp(i\delta) \\ \beta_{1R} &= -\frac{1}{2} + \rho \cos\delta, \quad \beta_{1I} = \rho \sin\delta \\ \beta_2 &= -\frac{1}{2} - \rho \exp(i\delta) \\ \beta_{2R} &= -\left(\frac{1}{2} + \rho \cos\delta\right), \quad \beta_{2I} = -\rho \sin\delta = -\beta_{1I} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

再者, 有下列分解 (为简单起见, $|L_n|$ 记作 L_n , 其余同此)

$$\begin{aligned} L_1(\beta_1+n) &= n(n+2\rho \exp(i\delta)) \\ &= L_{nR} + iL_{nI} = L_n \exp(i\alpha_n) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

式中

$$\begin{aligned} L_{nR} &= n(n+2\rho \cos\delta), \quad L_{nI} = 2n\rho \sin\delta \\ L_n &= n[n^2+4\rho^2+4n\rho \cos\delta]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\tan \alpha_n = \frac{2\rho \sin\delta}{n+2\rho \cos\delta}$$

$$\begin{aligned} M_1(\beta_1+n) &= \frac{2i}{\alpha} \left(n - \frac{1}{2} + \rho \exp(i\delta) \right)^2 \\ &= A_{nR} + iA_{nI} = A_n \exp(i\alpha_n) \end{aligned} \quad (3.4b)$$

式中

$$A_{nR} = -\frac{2}{\alpha} \left[2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho \sin\delta + \rho^2 \sin 2\delta \right]$$

$$A_{nI} = \frac{2}{\alpha} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho \cos\delta + \rho^2 \cos 2\delta \right]$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\alpha} \left\{ \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^2 + 4\rho \left(n - \frac{1}{2} \right) \cos\delta \left[\rho^2 - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \rho \left(n - \frac{1}{2} \right) \cos\delta \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\tan \alpha_n = -\frac{\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho \cos\delta + \rho^2 \cos 2\delta}{2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho \sin\delta + \rho^2 \sin 2\delta}$$

$$\begin{aligned} M_2(\beta_1+n) &= (n-1)(n-1+2\rho \exp(i\delta)) \\ &= B_{nR} + iB_{nI} = B_n \exp(i\beta_n) \end{aligned} \quad (3.4c)$$

式中

$$B_{nR} = (n-1) \left(n - \frac{1}{2} + 2\rho \cos\delta \right), \quad B_{nI} = 2(n-1)\rho \sin\delta$$

$$B_n = (n-1) [(n-1)^2 + 4\rho^2 + 4(n-1)\rho \cos\delta]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \beta_n = \frac{2\rho \sin\delta}{n-1+\rho \cos\delta}$$

$$\begin{aligned}
 L(\beta_2+n) &= n(n-2\rho\exp(i\delta)) \\
 &= L'_{nR} + iL'_{nI} = L'_n \exp(i\alpha'_n) \\
 \text{式中} \quad L'_{nR} &= n(n-2\rho\cos\delta), \quad L'_{nI} = -2n\rho\sin\delta \\
 L'_n &= n[n^2+4\rho^2-4n\rho\cos\delta]^{\frac{1}{2}} \\
 \tan \alpha'_n &= \frac{2\rho\sin\delta}{2\rho\cos\delta-n}
 \end{aligned} \tag{3.4d}$$

$$\begin{aligned}
 M_1(\beta_2+n) &= \frac{2i}{\alpha} \left(n - \frac{1}{2} - \rho\exp(i\delta) \right) \\
 &= A'_{nR} + iA'_{nI} = A'_n \exp(i\alpha'_n) \\
 \text{式中} \quad A'_{nR} &= \frac{2}{\alpha} \left[2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho\sin\delta - \rho^2\sin 2\delta \right]
 \end{aligned} \tag{3.4e}$$

$$\begin{aligned}
 A'_{nI} &= \frac{2}{\alpha} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho\cos\delta + \rho^2\cos 2\delta \right] \\
 A'_n &= \frac{2}{\alpha} \left\{ \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^2 - 4\rho \left(n - \frac{1}{2} \right) \cos\delta \left[\rho^2 + \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - \rho \left(n - \frac{1}{2} \right) \cos\delta \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 \tan \alpha'_n &= \frac{\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho\cos\delta + \rho^2 \cos 2\delta}{2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \rho\sin\delta - \rho^2\sin 2\delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_2(\beta_2+n) &= (n-1)(n-2\rho\exp(i\delta)) \\
 &= B'_{nR} + iB'_{nI} = B'_n \exp(ib'_n) \\
 \text{式中} \quad B'_{nR} &= (n-1)(n-1-2\rho\cos\delta), \quad B'_{nI} = -2(n-1)\rho\sin\delta \\
 B'_n &= (n-1) [(n-1)^2+4\rho^2+4(n-1)\rho\cos\delta]^{\frac{1}{2}} \\
 \tan b'_n &= \frac{2\rho\sin\delta}{2\rho\cos\delta-(n-1)}
 \end{aligned} \tag{3.4f}$$

由此得到级数系数的分解

$$\begin{aligned}
 v_{\sigma, n} &= |v_{\sigma, n}| \exp(i\Delta_{\sigma n}) = v_{\sigma nR} + i v_{\sigma nI} \\
 v_{1,1} &= \frac{A_0}{L_1} \exp[i(a_0-l_1)] \\
 v_{1,2} &= \frac{1}{L_1} \left\{ B_0 \exp[i(b_0-l_2)] + \frac{A_0 A_1}{L_1} \exp[i(a_0+a_1-l_1-l_2)] \right\} \\
 v_{1,3} &= \frac{1}{L_3} \left\{ \frac{A_0 B_1}{L_1} \exp[i(a_0+b_1-l_1-l_3)] + \frac{B_0 A_1}{L_2} \exp[i(b_0+a_1-l_2-l_3)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_0 A_1 A_2}{L_1 L_2} \exp[i(a_0+a_1+a_2-l_1-l_2-l_3)] \right\} \\
 v_{1,4} &= \frac{1}{L_4} \left\{ \frac{B_0 B_2}{L_2} \exp[i(b_0+b_2-l_2-l_4)] + \frac{B_0 A_2 A_3}{L_2 L_3} \exp[i(b_0+a_2+a_3 \right. \\
 &\quad \left. -l_2-l_3-l_4)] + \frac{A_0 B_1 B_3}{L_1 L_3} \exp[i(a_0+b_1+b_3-l_1-l_3-l_4)] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_0 A_1 B_2}{L_1 L_2} \exp[i(a_0 + a_1 + b_2 - l_1 - l_2 - l_4)] + \frac{A_0 A_1 A_2 A_3}{L_1 L_2 L_3} \exp\left[i\left(\sum_0^3 a_i - \sum_1^4 l_j\right)\right] \\
& \quad \dots\dots \\
v_{2,1} &= \frac{A'_0}{L'_1} \exp[i(a'_0 - l'_1)] \\
v_{2,2} &= \frac{1}{L'_1} \left\{ B'_0 \exp[i(b'_0 - l'_1)] + \frac{A'_0 A'_1}{L'_1} \exp[i(a'_0 + a'_1 - l'_1 - l'_2)] \right\} \\
v_{2,3} &= \frac{1}{L'_1} \left\{ \frac{A'_0 B'_0}{L'_1} \exp[i(a'_0 + b'_1 - l'_1 - l'_2)] + \frac{B'_0 A'_1}{L'_2} \exp[i(b'_0 + a'_1 \right. \\
& \quad \left. - l'_2 - l'_3)] + \frac{A'_0 A'_1 A'_2}{L'_1 L'_2} \exp\left[i\left(\sum_0^2 a_i - \sum_1^3 l_j\right)\right] \right\} \\
v_{2,4} &= \frac{1}{L'_1} \left\{ \frac{B'_0 B'_2}{L'_2} \exp[i(b'_0 + b'_2 - l'_2 - l'_1)] + \frac{B'_0 A'_1 A'_2}{L'_1 L'_2} \exp[i(b'_0 + a'_1 + a'_2 - l'_2 - l'_3 - l'_1)] \right. \\
& \quad + \frac{A'_0 B'_1 B'_3}{L'_1 L'_3} \exp[i(a'_0 + b'_1 + b'_3 - l'_1 - l'_3 - l'_2)] \\
& \quad + \frac{A'_0 A'_1 B'_2}{L'_1 L'_2} \exp[i(a'_0 + a'_1 + b'_2 - l'_1 - l'_2 - l'_3)] \\
& \quad \left. + \frac{A'_0 A'_1 A'_2 A'_3}{L'_1 L'_2 L'_3} \exp\left[i\left(\sum_0^3 a_i - \sum_1^4 l_j\right)\right] \right\}, \dots
\end{aligned}$$

因此得到

$$\left. \begin{aligned}
V_1(\varphi) &= \exp[-\beta_{1r}\varphi] \sum_n |v_{1n}| \exp[i\{(n + \beta_{1R})\varphi + \Delta_{1n}\}] \\
V_2(\varphi) &= \exp[+\beta_{1r}\varphi] \sum_n |v_{2n}| \exp[i\{(n + \beta_{2R})\varphi + \Delta_{2n}\}]
\end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

由于

$$\left. \begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos 2\delta = \frac{1}{4\rho^2} \\
\cos \delta &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}} \\
\sin \delta &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2\delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}}
\end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

由此得到

$$\left. \begin{aligned}
\beta_{1R} &= -\frac{1}{2} + \rho \cos \delta = -\frac{1}{2} + \frac{(1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} [1 + \varepsilon(1 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}]^{1/2} \\
\beta_{2R} &= -\frac{1}{2} - \rho \cos \delta = -\frac{1}{2} - \frac{(1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} [1 + \varepsilon(1 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}]^{1/2}
\end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\beta_{1r} = -\beta_{2r} = \rho \sin \delta = \frac{(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} [1 - \varepsilon(1+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$$

代入 β_1, β_2 , 分解虚实部, 级数解的显式如下:

$$\left. \begin{aligned} \begin{cases} V_{1R} \\ V_{1I} \end{cases} &= \exp \left\{ \frac{-(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}} \varphi \right\} \sum_n |v_{1n}| \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}} \varphi + \Delta_{1n} \right] \\ \begin{cases} V_{2R} \\ V_{2I} \end{cases} &= \exp \left\{ \frac{+(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}} \varphi \right\} \sum_n |v_{2n}| \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}} \varphi + \Delta_{2n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中绝对值 $|v_{1n}|, |v_{2n}|$ 和幅角 Δ_{1n}, Δ_{2n} 的显式前已给出。

显然, 一般解 (3.9) 表示为周期函数, 且有阻尼。按惯例, 方程的最高阶导数如有小参数乘子, 必然与阻尼现象有密切连系。因此, 环壳的边缘效应由指数因子 $\exp\{-\beta_{1r}\varphi\}$ 表示。令

$$d = \frac{1}{\beta_{1r}} \quad (3.10)$$

则 φ 在 $(0, d)$ 间隔内可以称为“边缘效应区域”。

再者, 在 $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ 变换下, 方程保持不变, 基本解 $\{V_1, V_2\}$ 变为 $\{\lambda_1 V_1, \lambda_2 V_2\}$, 其中

$$\lambda_1 = \exp(2\pi\beta_1), \lambda_2 = \exp(2\pi\beta_2) \quad (3.11)$$

这和单值系数的方程具有单值群的指标完全一致。

四、特例 $\left(\frac{8\mu}{\alpha}\right) \gg 1$

因为在大多数情况下, 有

$$\nu = \frac{1}{3} \quad (0 < \alpha < 1, \frac{a}{h} \leq 10)$$

故

$$\frac{8\mu}{\alpha} = 8\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a}{h} \approx 80\sqrt{\frac{8}{3}} \gg 1 \quad (4.1)$$

因此 $\left(\frac{8\mu}{\alpha}\right) \gg 1$ 情况在实际中极为重要。在这种情况下, 数值分析可以大大简化。由于

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{8\mu} \ll 1, \delta = \frac{\pi}{4} \quad (4.2)$$

故

$$\rho \cos \delta = \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \{1 + o(\varepsilon)\}$$

$$\rho \sin \delta = \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \{1 + o(\varepsilon)\}$$

且

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1+i}{2\sqrt{2\varepsilon}}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1+i}{2\sqrt{2\varepsilon}}$$

再者, 有

$$\left. \begin{aligned} L(\beta_1+n) &= n \left\{ n + \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}}(1+i) \right\} \\ M_1(\beta_1+n) &= \frac{2i}{\alpha} \left\{ n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}}(1+i) \right\}^2 \\ M_2(\beta_1+n) &= (n-1) \left\{ (n-1) + \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}}(1+i) \right\} \\ L(\beta_2+n) &= n \left\{ n - \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}}(1+i) \right\} \\ M_1(\beta_2+n) &= \frac{2i}{\alpha} \left\{ n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}}(1+i) \right\}^2 \\ M_2(\beta_2+n) &= (n-1) \left\{ (n-1) - \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}}(1+i) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

由此直接得到虚实部分解。

此时, v_{1n} , v_{2n} 的振幅和幅角分别用 $|v_{1n}^0|$ 、 $|v_{2n}^0|$ 和 δ_{1n}^0 、 δ_{2n}^0 来表示, 则得一般解。

$$\left. \begin{aligned} V_1(\varphi) &= \exp \left[\frac{-1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \varphi \right] \sum |v_{1n}^0| \exp \left\{ i \left[\left(n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \right) \varphi + \delta_{1n}^0 \right] \right\} \\ V_2(\varphi) &= \exp \left[\frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \varphi \right] \sum |v_{2n}^0| \exp \left\{ i \left[\left(n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \right) \varphi + \delta_{2n}^0 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

最后, 在这一极限情况下, 有

$$\text{边缘效应深度: } d = 2\sqrt{2\varepsilon}$$

$$\text{虚周期因子: } \lambda_1 = \exp \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2\varepsilon}} - 1 \right) \pi \right]$$

$$\lambda_2 = \exp \left[\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2\varepsilon}} - 1 \right) \pi \right]$$

五、讨 论

1° 在一般细度比情况下, 环壳方程的基本解属于正则积分范畴。它的指标和展开系数以自然方式表为封闭的显式。而且正则积分只是从 0 到 ∞ 的单边无穷级数。这些事实使应力和应变的数值分析大大简化。

所求得的级数解由一虚周期函数来表示, 具有阻尼, 边缘效应的作用范围与小参数 ε 有关。

同理, 利用上法, 可得大宗量时级数解的显示式。

2° 细环壳($\alpha \rightarrow 0$)是另一种重要的情况。这时,壳的基本方程化为 Mathieu 方程形式: $d^2V/d\varphi^2 + (a + k\cos 2\theta)V(\varphi) = 0$, 其中 $a = 0$, k 是个大参数。由于 Mathieu 方程的理论早已建立, 这里, 只作一点记注。在现有讨论中采用形式解方法, 它导致三项递推关系, 因此指标和展开系数只能写成不封闭的, 非显示表式。但是, 如果采用本文作者的 建议, 引进树图法^[4,5], 那末留数定理可以给出 Mathieu 函数的显式, 比连分法的表达更直接、更有一般性。利用树图法讨论细环壳将在另文阐述。

3° 弹性薄壳理论中一个相当重要而又相当复杂的问题是对旋成壳求严格解。这时, 基本方程表为辅助函数 \tilde{T} 和 \tilde{U} 的联立方程组 (参见 Novozhilov^[1] 第四章第二节中方程组 (2.17))。由于这一高阶方程组奇点的特殊性质, 事先难以假定形式解, 目前仍无完善的讨论。实际上, 此方程组一般属于非 Fuchs 类型, 应用本文的方法略加推广可以得出解的解析构造。讨论将另行发表。

参 考 文 献

- [1] Novozhilov, V. V., *Theory of Thin Shells*(1951), (俄文), 第四章 (及其中引用的文献)。
- [2] 钱伟长、郑思樑, 轴对称圆环壳的一般解, *应用数学和力学*, (1980), 287—300。
- [3] 钱伟长、郑思樑, 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用, *应用数学和力学*, **2**, 1(1981), 97—111。
- [4] 董明德, Poincaré 非正则积分问题(讲义, 待出版)。
- [5] Dong Ming-de, (a) Non-perturbative solutions of Bloch-Mathieu Hamiltonian system, *Physics Letters*, **97A**, 7, Sep.(1983), 275—279. (b) The problem of secular terms: Non-perturbative analysis of the Hill-Bloch system, *ibid.*, **98A**, 4 Oct.(1983), 156—160。

New Solutions of Novozhilov's Equation of Toroidal Shells

Dong Ming-de

(Institute of Theoretical Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

New solutions are obtained for Novozhilov's equation of toroidal shells having general slenderness ratio.

In contrast to the results by continued fraction technique, the exponents and expansion coefficients of our series solutions are all closed and explicit. The series satisfies shell equation identically. Convergence proof is also demonstrated.

Explicit expressions for boundary effect and monodromy indices are also given. Finally, we discuss the possibility of applying the present method to solve exactly the fundamental system of equations for elastic shells with rotational symmetry.