应用数学和力学，第6卷第4期（1985年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Poincaré 非正则积分问题的新进展

董　明　德

（中国科学院理论物理所，1983年9月9日收到*）

摘　　要

关于非 Fuchs 型方程，Poincaré 曾经作出过重要的论断：没有方法可以求出非正则积分的显

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n x^{(\rho+n)}$$

示表述。

为了阐明这一论断的实质，我们证明对应定理：非正则积分是类具有树结构的新型解析函数，其中一部份解是通常的递推级数，而另一部则是不遵循递推关系的"树级数"。

与经典理论（Hill-Poincaré-von Koch）计算无穷行列式的数值解不同，本法自然地给出严格解析解的显示表式。本法可以建立统一的解析理论以讨论一般变系数方程，包括有奇线在内的多种奇点。由于树级数具有自守性，我们讨论 Poincaré 猜测的意义。

一、Poincaré 非正则积分问题

如所周知，微分方程的解析理论发端于 Cauchy 的定域性存在定理。其后，L. Fuchs (1865)[1]规定微分方程解析理论的基本任务不仅在于对方程求积分，而且在于研究解在整个平面的性质。Fuchs 定理证明方程存在正则解的充要条件是其系数具有所谓"正则极点"。Fuchs 型方程的正则积分理论早已形成比较完整的体系，它的应用已经深入到数学物理的各个领域中了。

但是，有关非正则积分的发展情况却大不相同。虽然，它比正则积分在理论上和应用上更具有一般性，而且经过 Fuchs, Poincaré, Hill, Mittag-Leffler, Liapounoff, Birkhoff 等著名数学家的长期探讨，但是非正则积分的严格解的显示表述仍然无法得到，至今只能采用种种近似方法和数值计算。

关于非正则积分问题，Poincaré 有过很多贡献，他在1880年巴黎科学院的数学大奖征文**中先提出渐近解法，接着又创立自守函数理论来讨论这一问题。

后来 Poincaré 在1887年作出历史性的论断，认为没有任何方法可以求出非正则积分 $\left(x^\rho \sum_{-\infty}^{\infty} c_n x^n\right)$ 的显式表述。Poincaré 论断的原始表述如下：

"Soit une équation linéaire de la forme suivant:

* 1980年2月第一次收到。

** 题目是《Pefectionner en quelque point important la theorie des équations différentielles linéaires à une seul variable indépendante》参见全集卷一p.336.

$$P_n\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_1\frac{dy}{dx}+P_0y=0$$

où les P sont des polynomes entires en x d'un même degré m.

On démontre que, pour x tres grand, cette équation admet n intégrales de la forme suivant:

$$x^{\rho_i}\psi_i(x) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

Les ψ étant des séries convergentes doublement infinies procédant suivante les puissances positives et negative de x. Mais on n'a aucun moyen de déterminer les exponants ρ_i et les coefficients des series. (Oeuvres T. I, p.333; *Acta Mathematica* T. 10 (1887) p.310—312)"

【设有一线性方程形式如下

$$P_n\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_1\frac{dy}{dx}+P_0y=0$$

其中P是x的同一幂次m的完全多项式。

可以证明，当x甚大时，此方程有n个积分如下

$$x^{\rho_i}\psi_i(x)$$

所有 ψ_i 是 x 的正幂和负幂无穷收敛级数。但是没有任何方法决定此级数的 指标和系数。(数学学报，第10卷(1887)，310—312页；或全集，卷1，333—335页)】

对于上述论断顺便作两点註记。

(1) 方程类型

当方程系数是同次多项式时，该方程将具有非正则极点。但此条件在理论 探 讨和实际应用中限制过强，并不自然。为了对非正则积分作较系统的研究，须要考虑更一般的方程。我们将讨论一般非 Fuchs 型方程 (标准形式见下)。

(2) 基本解系

熟知对于正则积分，当指标差为零或整数时，相应的线性独立解中将出现对数奇异性。对于非正则积分，基本解系的求得相当复杂；在一般情况下，Frobenius 的参数微分法并不成立。但是，利用本文所提出的解析方法可以统一方式得到方程的基本解系的显示表式。

与正则积分相比，非正则积分在理论上更有一般性，在应用上更有广泛性。就二阶方程而言，比较熟知的例子如下：

a. 单周期系数方程——如月球进动的 Hill 方程，晶格中电子运动的 Bloch 方程等。

b. 双周期系数方程——如椭球 Helmholtz 方程。

c. 具有奇异势的 Schrödinger 方程和 Dirac 方程等。

d. 弯曲时空中波动方程 (如 Schwarzschild, Friedman, Kerr 度规等)。

从解析理论角度而言，非 Fuchs 型方程所定义的函数是类新颖解析函数。这一论断具有根本性的意义。按照 Poincaré 猜测，它和自守函数论密切相关。

有关非正则积分问题的重要研究如下：

1878 Hill 对于月球进动的无穷行列式分析[2],

1880 Poincaré 的渐近解法和自守函数理论[3],

1883 Thomé 的常规解法[4],

1885 Fabry 的次常规解法[5],

1891 von Koch 的收敛性证明[6],

1896 Liapounoff的小参数展开法[7],

1913 Birkhoff 的回路矩阵法[8],

1948 Brillouin 的 JWKB 法[9]等等.

上述种种方法基本上可分为两类:(1) 各种近似解法和(2)无穷行列式的数值解法.

如所周知,渐近解常常是发散的,它不构成完整的基本解系,而且有时求得的解并不是唯一的.和Poincaré渐近解相似,Thomé 常规解和 Fabry 次常规解也都是以事先假定的形式解为前提,因此不能为一般理论的建立提供基础.

Liapounoff 的小参数展开法,Brillouin 的JWKB 法,Birkhoff 的回路矩阵法以及新近讨论的两点联络法等等都属于近似法范畴.它们对于特定形式的方程常能给出有效的近似解,但是根本不能阐明非正则积分的真实解析结构.

值得注意的是以无穷行列式为基础的经典理论(或称 Hill-Poincaré-von Koch 理论).Hill 关于限制性三体问题的数值分析开辟了一条重要的途径.假设非正则积分具有赝周期级数解形式,待定系数法给出无穷元的无穷方程组,由此所得的无穷行列式可用来决定指标的数值,但无法写出指标的显式.其后,Poincaré 论证了 Hill 行列式的绝对收敛性的充要条件.von Koch 继而证明了上述形式解在一定条件下在环域内的解析性,从而完成了利用无穷行列式求数值解的经典理论.

显而易见,形式解中 Fourier 系数和指标的表式归根结底是不能得到的,其原因在于形式解具有无穷个正、负幂次项,按照待定系数法,指标和 Fourier 系数都是方程参数的新超越函数,通过无穷行列式来表示.这一情况可简称为"∞困难".简言之,形式解必然导致无穷行列式,从而必然导致 Poincaré论断:无法写出解的指标和展开系数.也就因此,Hill 函数的解析表述无法得到,非 Fuchs 型方程的解析理论至今未获应有的进展.

经典理论是当无穷行列式绝对收敛时,利用截断法取 $N\times N$有限行列式求近似解.因此,无穷行列式理论对数值解提供一般基础,但是非正则积分的真实结构仍付阙如.还应该指出,数值计算根本不能给出基本解系的一般表述,即当指标差为零或整数时,通常的 Frobenius 参数微分法一开始就无法应用.再者,根据微分方程的基本定理,线性独立解的个数等于方程的阶数,因此指标的个数等于方程的阶数,这在无穷行列式理论中是个待证的问题.

二、新方法的特点

我们的目的是求非 Fuchs 型方程本身所定义的一类新型的解析函数.按照 Briot 和 Bouquet 的观点,方程本身就是函数的定义,因此特定类型的方程定义了特定类型的函数.

首先需要阐明,非正则积分的内禀结构不是通常所假设的形式解,$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n x^{\rho_i+n}$(或$\sum_{-\infty}^{\infty}a_n\cdot e^{i(\nu+2n)t}$)在物理问题中,$x$是空间变量,$t$是时间变量,前者含 Laurent 级数,常称为Bloch 解,后者含 Fourier 级数,常称为 Floquet 解.为简便计,两者可统称为 Floquet-Bloch 形式解.假定形式解实质上是对非正则积分的原始结构再作一次 Laurent(或 Fourier)展开,这将使展开系数更加复杂化,以致不能直接写出显式.最根本的是先验解的假定排除了求得原始表式的可能性.

为了发现非正则积分的原始结构而建立的新方法，必须克服经典理论中的三个原则性困难：(1) 排除先验解的假定，求解的内禀结构或自然解；(2) 正、负幂无穷级数解引起 $\pm\infty^2$ 困难；(3) 克服级数用递推关系的局限性。利用数学归纳法不能写出无穷行列式的一般项，简单算例可参见[11]。这一点揭示了经典理论的逻辑上缺陷：一开始假定解遵循数学归纳法，最后得到的解不遵循数学归纳法。本文的结果表明，只有将数学归纳法推广到树图归纳法才能求出非正则积分的解析表式。其原因很简单也很根本，因为非正则积分的内禀结构是树结构。

我们提出的新方法是由对应关系、解析延拓原理和树图归纳法三个环节组成。利用本法可以绕过上述三点困难。现略述如下。

(1) 对应原理

为求非正则积分的原始结构，摒除先验解的假定，直接从方程本身求解，因此根据方程的内在性质建立对应原理如下：

任何一个 l 阶的非 Fuchs 型方程的基本解系为 $\{\varphi_\sigma\}$ $(\sigma=1,\cdots,l)$，相应的退化常系数方程 $L\mathring{\varphi}=0$ 的基本解系 $\{\mathring{\varphi}_\sigma\}$，则 φ_σ 与 $\mathring{\varphi}_\sigma$ 之间存在对应关系：

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\mathring{\varphi}_\sigma(\zeta)$$

其中对应函数 $\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$ 只与原始方程的算符结构有关。

为此须要进一步证明分解定理：任一 l 阶变系数方程可分解为 l 个 Fredholm 型变系数泛函方程。设 $\mathscr{F}$ 表示 Fredholm 微分积分算符，有

$$\mathscr{F}\varphi_\sigma=\mathring{\varphi}_\sigma$$

式中 $\mathscr{F}=\mathscr{D}^{-1}$。进一步应用双边积分变换，Cauchy 定理给出对应函数的解析表式。

(2) 解析延拓原理

由于非 Fuchs 型方程中正、负幂次项同时存在，因此级数解中正、负幂级数必然同时出现。Hill-Poincaré-von Koch 理论中，由于根据代数法，形式解导致无穷元的无穷方程组（即 ∞^2 困难）。反之，如果采用解析法，正幂和负幂级数分别在左、右半平面解析，并在互相覆盖域上相等，根据解析延拓原理，这两部分级数可以作为同一个函数的互相延拓的元。积分变换基本定理和留数定理将自然地给出解的构造。这种延拓处理是 Wiener-Hopf 方法的基础，也是本文求得非正则积分的关键之一。这里不存在支点分解问题，但是留数级数及其求和问题则是过去未曾出现过的。

(3) 树图法

对于熟知的正则积分，级数解有一般项表示，如 Legendre 函数，数学归纳法成立。非正则积分的一个根本性困难是其中正负幂次并存时将引起相消，$\sum\limits_{i=1}^{\lambda} n_i=0$，简称"收缩"。收缩会产生高阶极点序列。而且更重要的是相邻两项之间的收缩并不遵守数学归纳法，求和时必须逐项绘出树图。因此对于这类积分，数学归纳法不够应用，必须采用树图法来归纳。在树图归纳法中利用序列求和公式和树算符可以得到级数解的解析表述。树级数解的一个特点是每一展开系数的高阶修正项是不可穷尽的。这一点也只是树结构所特有的。

全部分析表明，非正则积分是类新型的解析函数，它通过方程的参数表成 Taylor-Fourier 混合级数：即(1) 作为 Fourier 级数，它的每一 Fourier 系数是 Taylor 级数，如果视为 Taylor 级数，它的每一 Taylor 系数则是 Fourier 级数；(2) 所有 Taylor 系数又

是方程参数的常项树级数，高阶修正项的树结构具有不可穷尽性。因此，这类级数可简称为“树级数”。

与无穷行列式理论相比较，树级数本身表明它是一般解，是类新型函数。再者，它的求和程序有确定的规律性，只要作出逐“代”的树图，根据收缩序列的求和公式，即得树级数。其中包括与λ代树图相对应的$(\lambda+1)$代直到∞代的主要项，这些项属于数学归纳法类型。最后，为便于数值分析，根据已知参数的数量阶，从解析式中对主要项可以进行单独处理。应该强调指出，树级数是严格解，它和微扰解有实质性的不同。通常微扰论中按小参数ϵ展开的ϵ^λ称为λ阶项。这里为避免混淆，树图的λ“代”是指$\left(\sum'_{n_1}\sum'_{n_2}\cdots\sum'_{n_\lambda}\right)$类型的一切项。两种展开的意义并不相同。

一般文献中，当方程的所有奇点全是正则极点时，则称此方程属于Fuchs型。非Fuchs型方程没有确切的定义。以下约定：非 Fuchs 型方程是指所有奇点全是非正则极点或本性奇点；准 Fuchs 型方程是指正则极点和非正则极点同时并存。又，方程的系数函数为非整幂次，且无收缩时称为广义Fuchs型方程，有收缩时则称广义非 Fuchs 型方程（收缩的定义见后）。最后两类方程暂不详述。本文方法可以扩大方程奇点类型的讨论范围，将正则、非正则极点和本性奇点、代数奇点、超越奇点以及奇线等统一处理。

三、一般非 Fuchs 型方程

方程的标准形式

设在一 Riemann 面上给定一个具有$(\mu+1)$个奇点$(e_1,e_2,\cdots,e_\mu,\infty)$的$l$阶变系数微分方程：

$$\mathscr{L}\left(z,\frac{d}{dz}\right)\varphi(z)\equiv\sum_{\mu=0}^{l}P_\mu(z)z^\mu\frac{d^\mu\varphi}{dz^\mu}=0 \tag{3.1}$$

当方程在$z=e_i$处具有本性奇点，则系数函数$P_\mu(z)$在此奇点邻域有展开（为简单计，令$e_i=0$）

$$P_\mu(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}p_{\mu,n}z^n \tag{3.2}$$

$p_{\mu,n}$是展开系数。并设$P_\mu(z)$ $(\mu=0,1,\cdots,l)$在公共环域K_z内解析

$$K_z:\ \{\rho_1<|z|<\rho_2\}$$

特例是当方程只有两个本性奇点，$z=0$和$z=\infty$，且$\rho_1\to0$，$\rho_2\to\infty$。

令$z=1/z'$，可讨论无穷大处解的行为。

较一般情况是系数$P_\mu(z)$是Laurent级数，通常遇到简化情况如下。

(1) $P_\mu(z)$是半纯函数

$$P_\mu(z)=p_{\mu,-n_\mu}z^{-n_\mu}+\cdots\cdots+p_{\mu,0}+p_{\mu,1}z+\cdots$$

这时方程在$z=0$处有N阶非正则极点，N是$n_\mu>0$ $(\mu=0,1,\cdots,l)$的最大值。

(2) $P_\mu(z)$是多项式

$$P_\mu(z)=p_{\mu,-n_\mu}z^{-n_\mu}+\cdots+p_{\mu,0}+p_{\mu,1}z+\cdots+p_{\mu,m_\mu}z^{m_\mu}$$

这时方程在$z=0$处有N阶非正则极点，N是$n_\mu>0$ $(\mu=0,1,\cdots,l)$的最大值。Poincaré的同次多项式情况是特例：$\mu-n_\mu=m>0$，$\mu-m_\mu=0$。

$$z^\mu P_\mu(z)=p_{\mu,m}z^m+p_{\mu,m-1}z^{m-1}+\cdots+p_{\mu,0}$$

(3) $z^\mu P_\mu(z)$是Taylor级数或其截断多项式：

$$z^\mu P_\mu(z)=p_{\mu,0}+p_{\mu,1}z+\cdots+p_{\mu,n}z^n$$

这时方程在$z=0$具有正则极点。按Fuchs定理，方程具有正则积分$\sum\limits_0^\infty c_n z^{\beta+n}$的充要条件是$z=0$为正则极点，现作为特例纳入统一处理。不仅如此，在最后讨论中将指出本法可统一处理其它几种类型奇点。

利用简单变换 $z=e^\zeta$，将算符$\mathscr{L}\left(e^\zeta,\ \dfrac{d}{d\zeta}\right)$分离为两部份：常系数算符$L\left(\dfrac{d}{d\zeta}\right)$和变系数算符$\sum\limits_n{}' e^{n\zeta}M_n\left(\dfrac{d}{d\zeta}\right)$。因此，有$\left(D=\dfrac{d}{d\zeta}\right)$

$$L(D)\varphi=\sum_n{}' e^{n\zeta}M_n(D)\varphi \qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{3.3}$$

其中主算符$L(D)$和次算符$M_n(D)$分别为

$$L(D)=p_{l,0}D(D-1)\cdots(D-l+1)+p_{l-1,0}D(D-1)\cdots(D-l+2)+\cdots+p_{0,0}$$
$$M_n(D)=p_{l,n}D(D-1)\cdots(D-l+1)+p_{l-1,n}D(D-1)\cdots(D-l+2)+\cdots+p_{0,n}$$

设上式的零点分别有β_σ和$\gamma_{n,j}$，则

$$L(D)=\prod_\sigma(D-\beta_\sigma) \qquad (\sigma=1,\cdots,l)$$

$$M_n(D)=\alpha_n\prod_j(D-\gamma_{n,j}) \qquad (j=1,\cdots,l)$$

已取$p_{l,0}=1$，$p_{l,n}=\alpha_n$。故方程(3.3)可写为

$$\prod_\sigma(D-\beta_\sigma)\varphi=\sum_n{}'\alpha_n e^{n\zeta}\prod_j(D-\gamma_{n,j})\varphi \tag{3.4}$$

方程(3.3)和(3.4)称为一般非Fuchs型方程的标准形式，因为它对于求解、分类和推广有明显优越性。

以下约定求和记号$\sum\limits_n{}'$中$n=\pm1,\pm2,\cdots$。简化情况只须考虑$n=1,\cdots,N_1,-1,\cdots,-N_2$ (N_1，N_2是正整数或零)，显然M_n的阶数不超过L的阶数。通常 ($l-1$) 阶项通过变换可消去。

为简化讨论，设指标集$\{\beta_\sigma\}$中两两之差不等于零或整数。不然，计算较繁须另行讨论，本法能自动给出基本解系，经典方法则并不适用。

四、等 价 定 理

退化方程

$$L\mathring{\varphi}(\zeta)=0 \tag{4.1}$$

的基本解系是$\{\mathring{\varphi}_\sigma(\zeta)\}=\{e^{\beta_\sigma\zeta}\}$，$L(\beta_\sigma)=0$。

Green函数$g(\zeta-\zeta')$满足方程

$$Lg(\zeta-\zeta')=\delta(\zeta-\zeta') \tag{4.2}$$

$\delta(\zeta-\zeta')$是Dirac的δ函数。因此，方程的解如下：

$$\varphi(\zeta)=\mathring{\varphi}(\zeta)+\int_{-\infty}^{\infty}g(\zeta-\zeta')\sum_{n}{}' e^{n\zeta'}M_n\left(\frac{d}{d\zeta'}\right)\varphi(\zeta')d\zeta' \tag{4.3}$$

按照线性分解原理，有

$$\varphi(\zeta)=\Sigma c_\sigma\varphi_\sigma(\zeta),\qquad \mathring{\varphi}(\zeta)=\Sigma c_\sigma\mathring{\varphi}_\sigma(\zeta) \tag{4.4}$$

因此得到l个互相独立的变系数微分积分方程

$$\varphi_\sigma(\zeta)-\int_{-\infty}^{\infty}h(\zeta-\zeta',\zeta')\varphi_\sigma(\zeta')d\zeta'=\mathring{\varphi}_\sigma(\zeta)\qquad (\zeta=\xi+i\eta) \tag{4.5}$$

$$h(\zeta-\zeta',\zeta')=g(\zeta-\zeta')\sum_{n}{}' e^{n\zeta'}\ M_n\left(\frac{d}{d\zeta'}\right)$$

注意，积分极限是$-\infty$到$+\infty$。容易证明，由于$\mathring{\varphi}_\sigma(\zeta)\neq 0$，上述方程存在非零解，且为唯一。

等价定理

任一l阶非Fuchs型方程可以分解为l个互相独立的 Fredholm 型变系数泛函方程(4.5)。

五、对 应 关 系

根据双边Laplace变换的基本定理，原函数$\varphi(\xi)$的映象$\phi(s)$

$$\phi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-s\xi}d\xi \tag{5.1}$$

绝对收敛于某一带域$u_1<\mathrm{Re}s<u_2$时，则有

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\phi(s)e^{s\xi}ds \tag{5.2}$$

其中$u_1<u<u_2$。

对一确定解$\varphi_\sigma=e^{\beta_\sigma\xi}$，设$\mathrm{Re}\beta_\sigma>0$，取

$$\mathring{\varphi}_\sigma^+(\xi)=\begin{cases}e^{\beta_\sigma\xi}, & \xi<0\\ 0, & \xi>0\end{cases};\quad \mathring{\varphi}_\sigma^-(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ e^{\beta_\sigma\xi}, & \xi>0\end{cases} \tag{5.3}$$

显然，Green函数的映象$G(s)$为

$$G(s)=\frac{1}{L(s)}=\prod_\sigma(s-\beta_\sigma)^{-1} \tag{5.4}$$

定义对s的位移算符$\exp[\pm n\partial_s]$如下

$$\exp[\pm n\partial_s]F(s)=F(s\pm n)$$

利用卷积定理、位移法则和Green函数的性质，从Fredholm泛函方程组得到

$$\phi_\sigma(s)-H(s)\phi_\sigma(s)=\mathring{\phi}_\sigma(s) \tag{5.5}$$

$$H(s)=\frac{1}{L(s)}\sum_{n}{}'\exp[-n\partial_s]M_n(s)$$

因此有

$$\phi_\sigma(s)=\frac{1}{1-H(s)}\cdot\overset{\circ}{\phi}_\sigma(s) \tag{5.6}$$

核算符的映象

$$\frac{1}{1-H(s)}\cdot=\sum_\lambda H^\lambda(s)\cdot=\sum_\lambda\left\{\frac{1}{L(s)}\sum_n{}'\exp[-n\partial_s]M_n(s)\right\}^\lambda\cdot$$

$$=\sum_\lambda\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_n{}'\right)\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(s-n_{(k)})}{L(s)L(s-n_{(k)})}L(s-n_{(\lambda)})\exp[-n_{(\lambda)}\partial_s]\cdot$$

不难证明逆算符$\frac{1}{1-H(s)}$的存在性及其二项式展开的合法性。根据Picard逐次逼近法，取$\overset{\circ}{\phi}_\sigma(s)$为零级近似代入下式的右端

$$\phi_\sigma=\overset{\circ}{\phi}_\sigma+H\overset{\circ}{\phi}_\sigma$$

逐次迭代，得逼近序列$\{\underset{(n)}{\phi_\sigma}\}$

$$\underset{(1)}{\phi_\sigma}=\overset{\circ}{\phi}_\sigma+H\overset{\circ}{\phi}_\sigma$$

$$\underset{(2)}{\phi_\sigma}=\overset{\circ}{\phi}_\sigma+H\overset{\circ}{\phi}_\sigma+H^2\overset{\circ}{\phi}_\sigma$$

$$\cdots\cdots$$

$$\underset{(\lambda)}{\phi_\sigma}=\overset{\circ}{\phi}_\sigma+H\overset{\circ}{\phi}_\sigma+\cdots+H^\lambda\overset{\circ}{\phi}_\sigma$$

最后一式是$[1-H]^{-1}\overset{\circ}{\phi}_\sigma$展开的$\lambda$项部份和。进一步须证：映象序列$\{\underset{(\lambda)}{\phi_\sigma}\}$当$\lambda\to\infty$存在极限，与此相应，函数序列$\{\underset{(\lambda)}{\varphi_\sigma}\}$也存在极限$\varphi_\sigma(\xi)$。这里不拟详述有关论证的细节，而将遵循Heaviside运算微积的基本精神，验证最后结果是否满足方程。级数解的收敛证明须单独讨论。

六、解 析 延 拓

将$\phi_\sigma(s)$分解为两部份

$$\phi_\sigma(s)=\phi_\sigma^+(s)+\phi_\sigma^-(s) \tag{6.1}$$

$\phi_\sigma^-(s)$在$\mathrm{Re}s<u_2$正则，$\phi_\sigma^+(s)$在$\mathrm{Re}s>u_1$正则。同理，将$\frac{1}{1-H(s)}\cdot\overset{\circ}{\phi}_\sigma(s)$分解两部分：

$$\frac{1}{1-H(s)}\cdot\overset{\circ}{\phi}_\sigma(s)=F_\sigma^+(s)+F_\sigma^-(s) \tag{6.2}$$

$$F_\sigma^-(s)=\frac{1}{s-\beta_\sigma}+\frac{1}{L(s)}\left\{\left(\sum_{n_1}{}'\right)_+\frac{M_{n_1}(s-n_1)}{s-\beta_\sigma-n_1}+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\right)_+\prod_{k=1}^{\lambda-1}\frac{M_{n_k}(s-n_{(k)})}{L(s-n_{(k)})}\frac{M_{n_\lambda}(s-n_{(\lambda)})}{s-\beta_\sigma-n_{(\lambda)}}+\cdots\right\}\qquad(n_{(\lambda)}\geqslant0)$$

$$F_\sigma^+(s)=\frac{-1}{L(s)}\left\{\left(\sum_{n_1}{}'\right)_+\frac{M_{n_1}(s-n_1)}{s-\beta_\sigma-n_1}+\cdots\right.$$

$$+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\prod_{k=1}^{\lambda-1}\frac{M_{n_k}(s-n_{(k)})}{L(s-n_{(k)})}\ \frac{M_{n_\lambda}(s-n_{(\lambda)})}{s-\beta_\sigma-n_{(\lambda)}}+\cdots\Big\}\qquad (n_{(\lambda)}<0)$$

因此得到

$$P(s)=\phi_\sigma^+(s)-F_\sigma^+(s)=-(\phi_\sigma^-(s)-F_\sigma^-(s))\tag{6.3}$$

显见第二式于Re$s>u_1$正则，第三式于Re$s<u_2$正则，上述方程定义于$u_1<$Re$s<u_2$。根据解析延拓原理，$P(s)$在整个s平面正则。由于$M_n(s)/L(s)=O(s^{-l+m_n})$，考虑上式在$|s|\to\infty$处行为，由Liouville定理知$P(s)\equiv 0$。故得

$$\phi_\sigma^+(s)-F_\sigma^+(s)=0,\quad \phi_\sigma^-(s)-F_\sigma^-(s)=0\tag{6.4}$$

现在的关键是对上两方程按极点序列的构造再作一次分解。注意，非Fuchs型方程的根本特点是：正负幂次n_i同时并存，因此可能产生“收缩”。与之相反，Fuchs型方程的求和指标n_i全是正号或全是负号，因此不存在任何收缩，它只是非Fuchs型方程的特例而已。

将展开式的第λ代项

$$\Big(\sum_n{}'\frac{1}{L(s)}\exp[-n\partial_s]M_n(s)\Big)^\lambda=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\prod_{k=1}^{\lambda-1}\frac{M_{n_k}(s-n_{(k)})}{L(s)L(s-n_{(k)})}$$

$$\cdot\frac{M_{n_\lambda}(s-n_{(\lambda)})}{s-\beta_\sigma-n_{(\lambda)}}\exp[-n_{(\lambda)}\partial_s]$$

按$(n_1,\ n_2,\cdots,n_\lambda)$幂次和的一切可能组合分为三类，即(1) 无收缩项、(2) 全收缩项和 (3) 半收缩项，分别以星号*，**和***来标记。

与之相应，$\phi_\sigma(s)$和$[1-H(s)]^{-1}\cdot\mathring{\phi}_\sigma(s)$可分为下列三部份。

(1)$\phi_\sigma^*(s)$——无收缩部

各项中所有n_i都不参加收缩，

$$\phi_\sigma^*(s)=\Big\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\mathring{\phi}_\sigma(s)\Big\}^*$$

(2) $\phi_\sigma^{**}(s)$——全收缩部

各项中所有n_i都参加收缩，每项可有一个或多个收缩，

$$\phi_\sigma^{**}(s)=\Big\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\mathring{\phi}_\sigma(s)\Big\}^{**}$$

(3) $\phi_\sigma^{***}(s)$——半收缩部

各项中部份n_i参与收缩，部份n_i不参与收缩，即每项中至少含有一个收缩，而且至少有一个n_i不参与收缩，

$$\phi_\sigma^{***}(s)=\Big\{\frac{1}{1-H(s)}\cdot\mathring{\phi}_\sigma(s)\Big\}^{***}.$$

考虑到左右半平面的解析延拓，故有分解

$$\phi_\sigma^\pm(s)=\phi_\sigma^{*\pm}(s)+\phi_\sigma^{**\pm}(s)+\phi_\sigma^{***\pm}(s)\tag{6.5}$$

从而得到三组方程如下：

$$\phi_\sigma^{*\pm}(s)-F_\sigma^{*\pm}(s)=0,\quad \phi_\sigma^{**\pm}(s)-F_\sigma^{**\pm}(s)=0,\quad \phi_\sigma^{***\pm}(s)-F_\sigma^{***\pm}(s)=0\tag{6.6}$$

因此($u_1<u<u_2$)

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{*\pm}(\xi)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\phi_\sigma^{*\pm}(s)e^{s\xi}ds\\
\varphi_\sigma^{**\pm}(\xi)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\phi_\sigma^{**\pm}(s)e^{s\xi}ds\\
\varphi_\sigma^{***\pm}(\xi)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\phi_\sigma^{***\pm}(s)e^{s\xi}ds
\end{aligned}\right\} \tag{6.7}
$$

七、对 应 原 理

进一步对上述映象反演，并结合树图归纳法可以求得原函数的显式[19]。从而得到

对应原理：

非Fuchs型方程及其退化方程的基本解系$\{\varphi_\sigma\}$，$\{\mathring{\varphi}_\sigma\}$之间存在简单的对应关系

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\mathring{\varphi}_\sigma(\zeta) \tag{7.1}$$

$$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)+\mathscr{D}_\sigma^{**}(\zeta)+\mathscr{D}_\sigma^{***}(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}D_{\sigma kn}\zeta^k e^{n\zeta} \tag{7.2}$$

对应函数$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$在一已知的平行带域内解析。它是无收缩部、全收缩部和半收缩部的对应函数$\mathscr{D}_\sigma^*$，$\mathscr{D}_\sigma^{**}$，$\mathscr{D}_\sigma^{***}$之和：

$$\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma m}e^{m\zeta}$$

$$
\begin{aligned}
A_{\sigma m}=\frac{1}{L(\beta_\sigma+m)}\Big\{&M_m(\beta_\sigma)+{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big)_m\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}+\cdots\\
&+{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)_m\prod_{k=1}^{\lambda}\frac{M_{n_k}(\beta_\sigma+n_{(k-1)})}{L(\beta_\sigma+n_{(k)})}L(\beta_\sigma+n_{(\lambda)})+\cdots\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{D}_\sigma^{**}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{\sigma k}\zeta^k$$

$$\mathscr{D}_\sigma^{***}(\zeta)=\sum_m\sum_k C_{\sigma km}\zeta^k e^{m\zeta}$$

注意：$\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)$是个Fourier级数，系数$A_{\sigma m}$遵循递推关系。$\mathscr{D}_\sigma^{**}(\zeta)$ 是个 Taylor 级数。$\mathscr{D}_\sigma^{***}(\zeta)$是Taylor-Fourier混合级数，系数$B_{\sigma k}$和$C_{\sigma km}$通过方程参数有显示表述。

对应原理还可表述成具有明显的赝周期性[19]：

$$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma,m}e^{(\nu_\sigma+m)\zeta} \tag{7.3}$$

其中指标和展开系数是方程参数的树级数：

$$A_{\sigma m}={}^{(1)}A_{\sigma,m}+{}^{(2)}A_{\sigma,m}+{}^{(3)}A_{\sigma,m}+\cdots$$
$$\nu_\sigma={}^{(2)}\nu_\sigma+{}^{(3)}\nu_\sigma+{}^{(4)}\nu_\sigma+\cdots$$

左上角标(i)表示第i代子树图所作的贡献。现述主要修正项推导如下（高阶树图计算较繁，暂略去）

$$^{(1)}\varphi_\sigma(\zeta)=T_\sigma(\zeta)e^{\beta_\sigma\zeta}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{(1)}A_{\sigma,m}e^{(\beta_\sigma+m)\zeta}$$

其中 $$T_\sigma(\zeta)=T(s,\zeta)\,|_{s=\beta_\sigma}=\Sigma\,{}^{(1)}A_m(s)\,|_{s=\beta_\sigma}e^{m\zeta}$$

$$^{(1)}A_m(s)=\frac{1}{L(s+m)}\left\{M_m(s)+\sum_{n_1}{}'M_{n_1}(s)\left[1-\sum_{n_2}{}'M_{n_2}(s+n_1)\exp[n_2\partial_{n_1}]\right]^{-1}\cdot\frac{M_{m-n_1}(s+n_1)}{L(s+n_1)}\right\}$$

考虑收缩$\langle\overparen{n_1n_2}\rangle$及其$A,D$序列的贡献。

$$\langle\overparen{n_1n_2}\rangle=\lim_{s\to\beta_\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\{\varDelta(s)e^{s\zeta}\},\quad \varDelta(s)=\sum_{n_1}{}'\frac{M_{n_1}(s-n_1)M_{-n}(s)}{L'(s)L(s-n_1)}$$

$$A\langle\overparen{n_1n_2}\rangle=\lim_{s\to\beta_\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\{\varDelta(s)T(s,\zeta)e^{s\zeta}\}$$

$$D\langle\overparen{n_1n_2}\rangle=\langle\overparen{n_1n_2}\rangle+\langle\overparen{n_1n_2}^2\rangle+\langle\overparen{n_1n_2}^3\rangle+\cdots=\lim_{s\to\beta_\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\varDelta^k(s)e^{s\zeta}\}$$

由此得DA复合序列

$$DA\langle\overparen{n_1n_2}\rangle=\lim_{s\to\beta_\sigma}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\varDelta^k(s)T(s,\zeta)e^{s\zeta}\}$$

因此，有

$$\begin{aligned}{}^{(2)}\varphi_\sigma(\zeta)&={}^{(1)}\varphi_\sigma(\zeta)+DA\langle\overparen{n_1n_2}\rangle\\&=\lim_{s\to\beta_\sigma}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\varDelta^k(s)T(s,\zeta)e^{s\zeta}\}\\&=\lim_{s\to\beta_\sigma}\exp\left\{\frac{\partial}{\partial s}\varDelta(s)\right\}\cdot T(s,\zeta)e^{s\zeta}\\&=\sum{}^{(2)}A_{\sigma,m}e^{({}^{(2)}\nu_\sigma+\beta_\sigma+m)\zeta}\end{aligned}$$

其中 $$^{(2)}\nu_\sigma=\varDelta(s)\Big|_{s=\beta_\sigma}=\sum_{n}{}'\frac{M_n(s-n)M_{-n}(s)}{L'(s)L(s-n)}\Big|_{s=\beta_\sigma}$$

$$^{(2)}A_{\sigma,m}={}^{(1)}A_{\sigma,m}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k\{\varDelta^k(s)\,{}^{(1)}A_m(s)\}\Big|_{s=\beta_\sigma}$$

讨论

1. 根据经典理论，形式解$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{(\rho+n)\zeta}$的假定必然导致无穷行列式。由于无穷行列式的

一般展开项无法写出，非正则积分的解析显式无法求得，只能求得数值解。

根据本文的对应原理，将非Fuchs型方程化为微分积分方程组，利用积分变换和留数定理自动给出非正则积分的显式，它是严格的解析解。

2. 对于异常分布的Green极点（即指标差等于零或一整数），基本解系中将出现一阶以上的对数奇点，根据本法可得相应的对应函数。这时Frobenius参数微分法并不普遍地成立。

3. 根据对应函数法可以统一讨论具有正则、非正则极点，本性奇点，代数奇点，对数奇点，超越奇点以至奇点的方程，从而扩大解析理论的研究范围。

参考文献

[1] Fuchs, L., Zur Theorie der linearen Differential gleichungen mit verändlichen Coefficienten, *J. fur Math.*, **66** (1866), 121; *Gesammelte Werke*, T. **1** (1904), 111—240.

[2] Hill, G. W., On the part of the motion of lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Am. J. Math.*, T. **1** (1878); *Acta Math.*, T. Ⅷ (1886), 1—36.

[3] Poincaré, H., (a) Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies, *Am J. of Math.*, Ⅶ (1885), 1—56; *Oeuvres*, T **1**, 226—289. (b) Sur les intégrals irréguliéres des équations linéaires, *Acta Math.*, T. **8**, (1886), 295—344; *Oeuvres*, T **1**. 290—332. (c) Remmarques sur les intégrales irréguléres des équations linéaires (Réponse á M. Thomé) *Acta Math*, T. **10** (1887), 310—312; *Oeuvres*, T. **1**, 333—335, 336—373.

[4] Thomé, L. W., *Crelle*, T. **XCV** (1883), 75.

[5] Fabry, Thése, *Gauthler-Villars*, Paris (1885).

[6] von Koch, H., *Acta Math.*, T. **15** (1891), T. **16** (1892-3), 217—295, T. **24** (1901), 89—122.

[7] Liapounoff, A., *C. R.*, T. **CXXIII** (1896), 1248—1252.

[8] Brikhoff, G. D., *Proc*, *Am. Acad*, 49 (1913), 54—568; *Col. Math, Paper*, Vol. Ⅰ.

[9] Brillouin, L., *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948).

[10] Schlesinger, L., *Handbuch der Theorie der Differentialgleichungen*, T. Ⅰ—Ⅲ (1898).

[11] Forsyth, A. R., *Theory of Differential Equations*, Vol. Ⅳ, ch 7, 8.

[12] Голубев В. В., (a) *Лекции по Аналитической Теории Дифференциальных Уравнений*, 2-е изд., Гостехиздат, Москва (1950); (b) *Лекции по Интегрированию Уравнений Движений Движения Тяжелого Твердого Тела Ококло Неподвижной Точки*, Гостехиздат, Москва (1953).

[13] Erdelyi, A., *Higher Trascendental Functions*, Vol. Ⅰ—Ⅲ (1953).

[14] Bieberbach, L., *Theorie der Gewohnliche Diff* (1965).

[15] Van der Pol, B., H. Bremmer, *Operational Calculus on the Two-Sided Laplace Integral* (1947).

[16] Wiener, N. and R. Payley, *Fourier Transform in the Complex Domain* (1934).

[17] Dong Ming-de, *Intrinsic Structure of Hill Function*, Report on the Congress of Chinese Astronomical Society (1978 Aug, Shanghai). A Summary was published in *Acta Astronomica Sinica*, **21**, 1 (1980).

[18] Dong Ming-de, On Poincare's problem of irregular integrals (to be published).

[19] Dong Ming-de, *New Developments in the Mathematical Theory and Physical Application for Equations of Fuchsian and Non-Fuchsiann Type* (1980, Lecture Notes, unpublished)

[20] Hagihara, Y., *Celestial Mechanics*, Vol. I—III, M. I. T. Press (1970).

[21] Harry, F., *Graph Theory* (1971).

New Development in Poincaré's Problem of Irregular Integrals

Dong Ming–de

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In connection with non-Fuchsian equations Poincaré has made an important conclusion; It is impossible to obtain explicit expressions of irregular integrals $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n x^{(\rho+n)}$.

To elucidate the essence of Poincaré's problem, we establish correspondence theorem. Irregular integrals are analytic functions of new kind, possessing tree structure, part of which can be represented by conventional recursive series, while its remaining part is expressed by the so-called tree series, not subjecting to any recursive relation at all.

In contrast to the numerical solution calculated by infinite determinant of classical theory (Hill-Poincaré-von Koch), our method yields naturally exact analytic solution in explicit form. The method proposed may be used to construct a unifying theory for general equations with variable coefficients, having various kinds of singularities as singular lines.

The significance of Poincaré conjecture is discussed. The tree series obtained belong to higher automorphic functions.